

Шифрин Б.М.

Кировоградская летная академия
Национального авиационного университета,
г. Кировоград, Украина
E-mail: b_shifrin@mail.ru

**О ПРИМЕНИМОСТИ МОДЕЛЕЙ ТРЕНИЯ
НА ПНЕВМОКОЛЕСЕ КЕЛДЫША-НЕЙМАРКА-
ФУФАЕВА**

УДК 629.735.015:533.6.013.43

Ю. И. Неймарк и Н. А. Фуфаев предложили две упрощенные версии модели М. В. Келдыша для расчета компонент трения на пневмоколесе в условиях квазиадгезионного контакта шины с опорной поверхностью. После их опубликования группой С. Кларка были проведены эксперименты по замеру трения на пневмоколесе при его гармонических колебаниях. В статье теоретические результаты Келдыша-Неймарка-Фуфаева сопоставлены с экспериментальными группы С. Кларка и сделан вывод о возможности использования упрощенных по Неймарку-Фуфаеву уравнений модели Келдыша.

Ключевые слова: трение, пневмоколесо, колебание, М.В. Келдыш.

Введение

Математические модели, описывающие движение пневмоколесной машины (автомобиля, движущегося по земле самолета, скутера и т.п.) и учитывающие большое число конструктивно-эксплуатационных факторов, зачастую оказываются трудноразрешимыми. Поэтому возникает задача разработки наиболее простых математических моделей трения на пневмоколесах, использование которых снизит сложность общей модели движения машины.

При малых углах увода зона скольжения пренебрежима или, говоря иначе, реализуется квазиадгезионный контакт. Используя различные допущения и подходы, для квазиадгезионных контактов предложен большой набор моделей трения на пневмоколесе [1, 2]. Одной из наиболее полных, последовательных и удачных моделей данного класса является модель М. В. Келдыша [1 – 4]. В [5] Ю. И. Неймарк и Н. А. Фуфаев рассмотрели два случая упрощения уравнений М. В. Келдыша: (а) случай движения с большой скоростью и (б) случай достаточно жестких пневматиков.

В [4] на основе уравнений М. В. Келдыша [3] изучены поперечная сила трения и момент сил трения вокруг центральной вертикальной оси (или восстанавливающий момент) для буксируемого пневмоколеса, тяга которого совершает вынужденные гармонические колебания. Кроме того, выделены предельные варианты движений такого пневмоколеса, а именно: (i) поперечно поступательные колебания и (ii) колебания при верчении. Результаты моделирования были сопоставлены с экспериментальными [5] и найдено их хорошее согласие.

В настоящей статье на основе упрощенных уравнений М. В. Келдыша [5] (уравнения Келдыша-Неймарка-Фуфаева или уравнения К-Н-Ф) получены общие решения задачи колебаний буксируемого пневмоколеса, а также частные решения для вариантов движения (i) и (ii). Частные решения сопоставлены с решением по исходным уравнениям [3, 4].

Результаты сопоставления показали, что уравнения К-Н-Ф для случая (а) имеют очень узкое применение – они могут служить лишь базой для изучения трения при сверхбольших скоростях буксировки. Напротив, уравнения К-Н-Ф для случая (б) вполне пригодны для изучения трения на реальных пневмоколесах при *определенных режимах их движения*.

Сведения об используемых в статье моделях и решениях

1. *Модель буксируемого пневмоколеса М. В. Келдыша* [3]. Рассмотрим буксируемое пневмоколесо с выносом назад L (рис. 1).

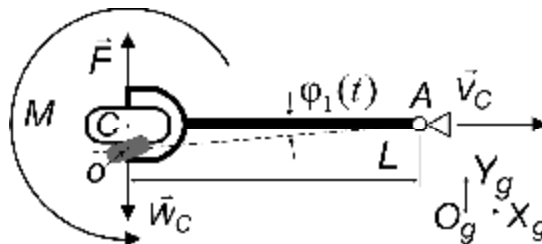


Рис. 1 – Буксируемое пневмоколесо

Считаем, что пневмоколесо закреплено так, что его диск всегда строго перпендикулярен опорной плоскости, а тяга AC абсолютно жесткая и длина ее произвольна, $0 \leq L < L_* \rightarrow \infty$. На рисунке показаны лежащие в опорной плоскости неподвижные оси $O_g X_g Y_g$ и пятно контакта шины с этой плоскостью, центр которого обозначен o .

Из [3] можно получить такую систему уравнений, достаточных для решения прямой задачи динамики буксируемого пневмоколеса:

$$\left. \begin{aligned} F &= k_F \xi, M = k_M \chi, \\ \dot{\xi} + W_C &= -V_C (\chi + \phi_1), \\ \dot{\chi} + \dot{\phi}_1 &= V_C (\alpha \xi - \beta \chi) \end{aligned} \right\}, \quad (1)$$

где F – поперечная сила трения;

M – восстанавливающий момент;

k_F, k_M – боковая и крутильная жесткости шины;

ξ, χ – ее линейная и угловая деформации;

\dot{V}_C, \dot{W}_C – векторы переносной и относительной скорости центра масс пневмоколеса;

ϕ_1 – угол поворота тяги;

α, β – кинематические коэффициенты;

точками сверху обозначены производные по времени t .

Величины k_F, k_M, α, β являются механическими константами шины и требуют экспериментального определения.

Вектор переносной скорости (или вектор скорости буксировки) \dot{V}_C считаем постоянным, а величина относительной скорости составляет:

$$W_C = L \dot{\phi}_1. \quad (2)$$

Двумерный вектор $\{F, M\}$ описывает трение на пневмоколесе и является предметом изучения данной статьи. При заданном законе «малых» поворотов тяги $\phi_1(t)$ уравнения (1), (2) позволяют найти функции времени $F(t), M(t), \xi(t), \chi(t)$.

Решение такой задачи для случая

$$\phi_1(t) = \phi_0 \sin \Omega t, \quad (3)$$

где $\phi_0 = const$ – амплитуда и $\Omega = const$ – частота вынужденных гармонических колебаний тяги, как было упомянуто во введении, представлено в [4]. Напомним, здесь углы ϕ_0 настолько малы, что скольжение в пятне контакта можно не учитывать.

2. Упрощенная модель М. В. Келдыша для движения с большой скоростью (случай а)). Уравнения для нахождения F и M , полученные в [5] для достаточно больших скоростей буксировки, в принятых нами обозначениях имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} F/a &= \dot{\phi}_1 - \beta V_C (w + \phi_1), \\ M/b &= -(w + \phi_1) \end{aligned} \right\}, \quad (4)$$

где $a = const = k_F / (\alpha V_C)$; $b = const = k_M$; $w = W_C / V_C \neq const$.

3. Упрощенная модель М. В. Келдыша для достаточно жестких пневматиков (случай б)). Вместо (4) теперь будем иметь [5]:

$$F = k_F \xi, M = k_M (\alpha / \beta) \xi. \quad (5)$$

Для нахождения деформации ξ нужно использовать дифференциальное уравнение:

$$\ddot{\xi} + V_C (\alpha / \beta) \dot{\xi} = -V_C (w + \varphi_1). \quad (6)$$

Решения по упрощенным моделям М. В. Келдыша

Положим (3) и с помощью уравнений (4) и (5), (6) найдем и верифицируем зависимости $F(t), M(t)$ для вариантов движения (i) и (ii).

К варианту (i) придем при $L \rightarrow \infty$; при этом пневмоколесо будет совершать поперечно поступательные колебания:

$$Y_C = Y_0 \sin \Omega t,$$

где $Y_0 = L\varphi_0$ – амплитуда поперечно поступательных колебаний.

Вариант движения (ii) будет иметь место при $L = 0$, а пневмоколесо при этом – подвергаться колебаниям вращения.

Решения при произвольной длине L найдем в виде:

$$F = A_F^* \sin(\Omega t + \beta_F), M = A_M^* \sin(\Omega t + \beta_M), \quad (7)$$

где A_F^*, A_M^* – амплитуды и β_F, β_M – фазы колебаний. Зависимости (7) описывают трение на пневмоколесе по истечению некоторого периода времени после начала действия возмущений.

В итоге для случая а) найдем:

$$\left. \begin{aligned} A_F^* &= k_F \varphi_0 (\alpha V_C)^{-1} \sqrt{(1 - \beta L)^2 \Omega^2 + (\beta V_C)^2}, \\ \beta_F &= \text{arctg}[\Omega(\beta L - 1)(\beta V_C)^{-1}]; \\ A_M^* &= k_M \varphi_0 \sqrt{1 + (L\Omega / V_C)^2}, \\ \beta_M &= \text{arctg}(L\Omega / V_C) \end{aligned} \right\}, \quad (8)$$

а для случая б) –

$$F(t) = k_F \xi(t), M(t) = k_M (\alpha / \beta) \xi(t), \xi(t) = A_\xi \sin(\Omega t + \beta_\xi), \quad (9)$$

где

$$\left. \begin{aligned} A_\xi &= (\varphi_0 / \det) \sqrt{[L\Omega^2 + V_C^2 (\alpha / \beta)]^2 + [L\Omega V_C (\alpha / \beta) - \Omega V_C]^2}, \\ \det &= \Omega^2 + V_C^2 (\alpha / \beta)^2; \\ \beta_\xi &= \text{arctg}(c_\xi / s_\xi), \\ c_\xi &= \Omega V_C [L(\alpha / \beta) - 1], s_\xi = L\Omega^2 + V_C^2 (\alpha / \beta)^2 \end{aligned} \right\},$$

очевидно, что

$$A_F^* = k_F A_\xi, \beta_F = \beta_\xi \text{ и } A_M^* = k_M (\alpha / \beta) A_\xi, \beta_M = \beta_\xi. \quad (10)$$

Амплитуды A_F^* , A_M^* и фазы β_F , β_M для вариантов движения (i) и (ii) можно найти, используя уравнения (8) – (10) и предельные переходы $L \rightarrow \infty$ (i) или $L = 0$ (ii), либо, обращаясь к исходным уравнениям (1) – (6), и, требуя для варианта (i):

$$Y_C = Y_0 \sin \Omega t, \quad \varphi_1 = \text{const} = 0,$$

а для варианта (ii) – :

$$Y_C = \text{const} = 0, \quad \varphi_1 = \varphi_0 \sin \Omega t.$$

Найденные выражения для амплитуд и фаз представим в табл. 1.

Видоизменим выражения табл. 1. Наружный диаметр необжатой шины обозначим D и введем в рассмотрение ряд безразмерных величин:

$$A_F^{j-i} = \frac{A_F^*}{k_F Y_0}, A_M^{j-i} = \frac{A_M^*}{k_F Y_0 D} \text{ – безразмерные амплитуды для случая } j \text{) и варианта } i,$$

$A_F^{j-ii} = \frac{A_F^*}{k_F D \varphi_0}, A_M^{j-ii} = \frac{A_M^*}{k_F D^2 \varphi_0}$ – безразмерные амплитуды для случая j) и варианта ii , здесь и далее $j = a, б$.

$$\kappa = \frac{k_M}{k_F D^2} \text{ – коэффициент крутильной жесткости;}$$

$$\bar{\Omega} = \Omega D / V_C \text{ – число С. Кларка [6];}$$

$$\bar{\Omega}_1 = \bar{\Omega} \cdot \frac{\beta}{\alpha D}, \bar{\Omega}_2 = \frac{\bar{\Omega}}{\beta D}, \bar{\Omega}_3 = \frac{\bar{\Omega}}{\alpha D^2} \text{ – безразмерные частоты возмущений.}$$

Вместо табл. 1 построим табл. 2.

Таблица 1

Амплитуда и фаза компонентов трения для различных случаев движения пневмоколеса и вариантов его нагружения

Случай-вариант	Амплитуда	Фаза
a-i	$A_F^* = k_F \beta (\alpha V_C)^{-1} Y_0 \Omega$	$\beta_F = -90^\circ$
a-i	$A_M^* = k_M Y_0 \Omega / V_C$	$\beta_M = -90^\circ$
a-ii	$A_F^* = k_F (\alpha V_C)^{-1} \varphi_0 \sqrt{\Omega^2 + (\beta V_C)^2}$	$\beta_F = \text{arctg}(-\frac{\Omega}{\beta V_C})$
a-ii	$A_M^* = k_M \varphi_0$	$\beta_M = -180^\circ$
б-i	$A_F^* = k_F \sqrt{x^2 + y^2}$, где $x = -\frac{Y_0 \Omega V_C (\alpha / \beta)}{\Omega^2 + (V_C \alpha / \beta)^2}, y = -\frac{Y_0 \Omega^2}{\Omega^2 + (V_C \alpha / \beta)^2}$,	$\beta_F = \text{arctg}(\frac{V_C \alpha / \beta}{\Omega})$
б-i	$A_M^* = k_M (\alpha / \beta) \sqrt{x^2 + y^2}$	$\beta_M = \text{arctg}(\frac{V_C \alpha / \beta}{\Omega})$
б-ii	$A_F^* = k_F \sqrt{s^2 + c^2}$, где $s = -\frac{\varphi_0 V_C^2 (\alpha / \beta)}{\Omega^2 + (V_C \alpha / \beta)^2}, c = -\frac{\varphi_0 \Omega V_C}{\Omega^2 + (V_C \alpha / \beta)^2}$	$\beta_F = \text{arctg}(-\frac{\Omega \beta / \alpha}{V_C})$
б-ii	$A_M^* = k_M (\alpha / \beta) \sqrt{s^2 + c^2}$	$\beta_M = \text{arctg}(-\frac{\Omega \beta / \alpha}{V_C})$

Таблица 2

Случай-вариант	Амплитуда	Фаза
а-і	$A_F^{a-i} = \bar{\Omega}_1$	$\beta_F = -90^\circ$
а-і	$A_M^{a-i} = \kappa \bar{\Omega}$	$\beta_M = -90^\circ$
а-іі	$A_F^{a-ii} = \bar{\Omega}_3 \sqrt{1 + \bar{\Omega}_2^{-2}}$	$\beta_F = \arctg(-\bar{\Omega}_2)$
а-іі	$A_M^{a-ii} = \kappa$	$\beta_M = -180^\circ$
б-і	$A_F^{b-i} = \bar{\Omega}_1 (1 + \bar{\Omega}_1^2)^{-1/2}$	$\beta_F = \arctg(\bar{\Omega}_1^{-1})$
б-і	$A_M^{b-i} = \kappa \bar{\Omega} (1 + \bar{\Omega}_1^2)^{-1/2}$	$\beta_M = \arctg(\bar{\Omega}_1^{-1})$
б-іі	$A_F^{b-ii} = \bar{\Omega}^{-1} (1 + \bar{\Omega}_1^2)^{-1/2}$	$\beta_F = \arctg(-\bar{\Omega}_1)$
б-іі	$A_M^{b-ii} = \kappa \bar{\Omega}_1^{-1} (1 + \bar{\Omega}_1^2)^{-1/2}$	$\beta_M = \arctg(-\bar{\Omega}_1)$

Сопоставление исходных и упрощенных решений

Для авиационного пневмоколеса (табл. 3) построим графики функций $A_F^{j-i}(\bar{\Omega})$, $A_F^{j-ii}(\bar{\Omega})$, $A_M^{j-i}(\bar{\Omega})$, $A_M^{j-ii}(\bar{\Omega})$ и $\beta_F^{j-i}(\bar{\Omega})$, $\beta_F^{j-ii}(\bar{\Omega})$, $\beta_M^{j-i}(\bar{\Omega})$, $\beta_M^{j-ii}(\bar{\Omega})$, которые сопоставим с исходным (не упрощенным!) решением $A_F^i(\bar{\Omega})$, $A_F^{ii}(\bar{\Omega})$, $A_M^i(\bar{\Omega})$, $A_M^{ii}(\bar{\Omega})$ и $\beta_F^i(\bar{\Omega})$, $\beta_F^{ii}(\bar{\Omega})$, $\beta_M^i(\bar{\Omega})$, $\beta_M^{ii}(\bar{\Omega})$, полученным в [4] (рис. 2). Исходное решение показано сплошными линиями, решение для случаев упрощения а) и б) – пунктирными линиями.

Таблица 3

Данные изучаемого пневмоколеса, [3, 4]

Тип колеса	$D, м$	$\alpha, м^{-2}$	$\beta, м^{-1}$	κ
400 x 150	0,4	120	30	0,052

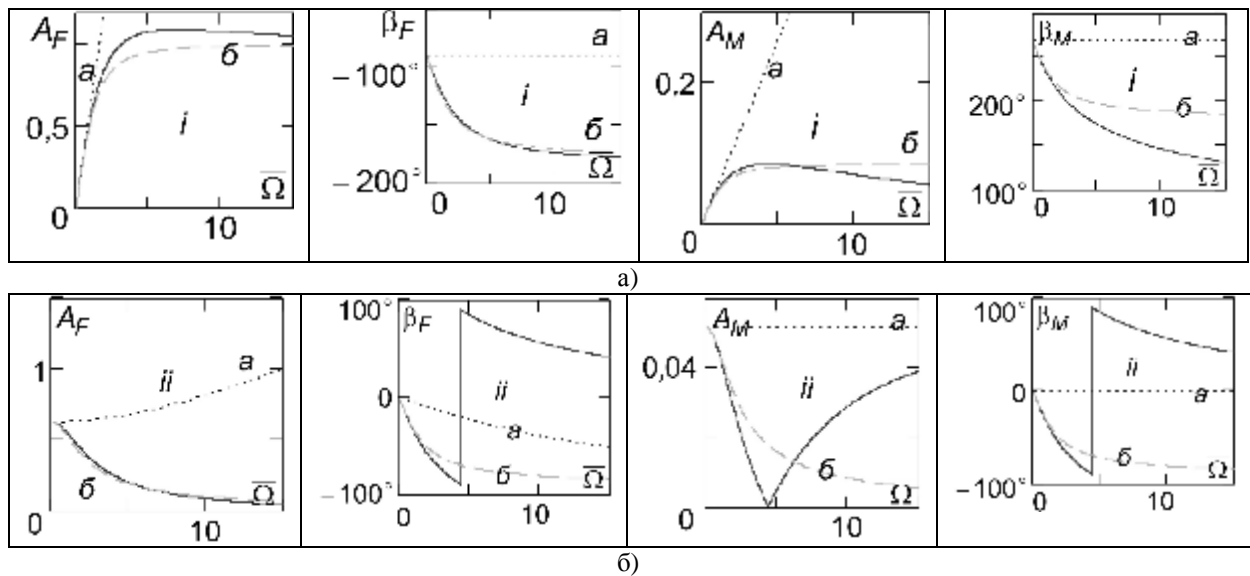


Рис. 2 – Приведенные амплитуды и фазы:
 а – для варианта движения і (поперечно поступательные колебания);
 б – для варианта движения іі (колебания при верчении).

Заключение и выводы

С помощью теоретического теста сопоставлены исходная версия модели трения на пневмоколесе М. В. Келдыша и упрощенные версии упомянутой модели, которые построены Ю. И. Неймарком и Н. А. Фуфаевым для (а) случая движения с «большой» скоростью и (б) случая достаточно жестких пневматиков. Адекватность исходной модели для условий теста проверена ранее в [4].

Сопоставление показало, что модель Келдыша-Неймарка-Фуфаева для случая жестких пневматиков дает хорошие результаты (рис. 2):

- в части «поперечная сила + восстанавливающий момент», если числа С. Кларка невелики, что реализуется при достаточно высоких скоростях движения;

- в части поперечная сила во всем рассмотренном (рис. 2) диапазоне изменения чисел С. Кларка.

Упрощенную для случая (б) версию модели М. В. Келдыша можно рекомендовать к применению при моделировании движений пневмоколесных машин. Однако при этом придется контролировать либо числа С. Кларка, либо положение мгновенного центра скоростей оси пневмоколеса. При малых числах С. Кларка и/или значительных удалениях мгновенного центра скоростей применение упрощенной модели оправдано.

Литература

1. Pacejka, H.V. Tyre and vehicle dynamics / H. V. Pacejka. – Butterworth-Heinemann, 2006. – 642 p.
2. Саркисов, П.И. Обзор моделей нестационарного качения колеса с упругой шиной по недеформируемому опорному основанию / П. И. Саркисов, С.Д. Попов // Инженерный журнал: наука и инновации. – 2013. – Вып. 12. – 18 с. URL: [tp://engjournal.ru/catalog/machin/transport/1129.html](http://engjournal.ru/catalog/machin/transport/1129.html).
3. Келдыш, М.В. Шимми переднего колеса трехколесного шасси / М.В. Келдыш // Труды ЦАГИ, 1945. – №564. – 37 с.
4. Шифрин, Б.М. О модели шины М.В. Келдыша / Б.М. Шифрин // Восточно-европейский журнал передовых технологий. – 2009. – №5/6(41). – С.34 – 37.
5. Неймарк, Ю.И. Динамика неголономных систем / Ю.И. Неймарк, Н.А. Фуфаев. – М.: Наука, 1967. – 520 с.
6. Clark, S. Dynamic properties of aircraft tires /S. Clark, R. Dodge, G. Nybakken// J. aircraft. – 1974. – Vol. 11, №3. – P. 166 – 172.

Надійшла в редакцію 28.11.2014

Shifrin B. Friction on air wheels: an applicability of Keldysh-Neymark-Fufaev models.

Y.I. Neymark and N.A. Fufaev have suggested two simplified versions of M.V. Keldysh model for the lateral friction and self-aligning torque calculation provided there is quasi-adhesive tire contact with the supporting surface. Version (a) is designed for “higher” speed motion and version (b) – for “rigid” air wheels. After the equation have been published by S. Clark group the experiments on the component friction measuring were carried out at air wheels harmonic oscillations.

In the given article version (a) and (b) theoretical results were compared with S. Clark group experiments. It demonstrated that at “small” S. Clark numbers Keldysh-Neymark-Fufaev equations (b) version gives good results in the part of “lateral force + stabilizing moment” and in the part of “lateral force” – there is S. Clark number changes in the whole range, considered in the present article.

Simplified Neymark – Fufaev version (b) can be recommended for use for modelling motion of vehicle systems. For all this either S. Clark numbers or the wheel axle instantaneous speed centre positions have to be controlled. However, the application may appear to be profitable as the motion ranges coverage at which Keldysh-Neymark-Fufaev equations are applicable is sufficiently wide, and the mathematical model simplification is substantial.

Key words: friction, air wheels, oscillation, M. V. Keldysh.

References

1. Pacejka, H.B. Tyre and vehicle dynamics / H. B. Pacejka. – Butterworth-Heinemann, 2006. – 642 p.
2. Sarkisov, P.I. Obzor modelej nestacionarnogo kacheniya kolesa s uprugoj shinoj po nedeforiruemomu opornomu osnovaniyu / P. I. Sarkisov, S.D. Popov // Inzhenernyj zhurnal: nauka i innovacii. – 2013. – vyp. 12. – 18 p. url: [tp://engjournal.ru/catalog/machin/transport/1129.html](http://engjournal.ru/catalog/machin/transport/1129.html).
3. Keldysh, M.V. Shimmi perednego kolesa trexkolesnogo shassi / M.V. Keldysh // Trudy CAGI, 1945. – №564. – 37 p.
4. Shifrin, B.M. O modeli shiny M.V. Keldysha / B.M. Shifrin // Vostochno-evropejskij zhurnal peredovyx texnologij. – 2009. – №5/6(41). – P. 34 – 37.
5. Nejmark, Yu. I. Dinamika negolonomnyx sistem / Yu.I. Nejmark, N.A. Fufaev. – M.: Nauka, 1967. – 520 p.