# Scie ipersoniche (*)

L. De Socio (**)

Ricevuto il 18 Maggio 1963

Riassunto. — Vengono scritte le equazioni per le scie ipersoniche tenendo conto degli effetti incrociati tra i gradienti di temperatura e di concentrazione elettronica ed il gradiente di potenziale elettrico. L'adimensionalizzazione delle equazioni mette in evidenza i parametri fondamentali caratteristici dei fenomeni connessi con le scie.

L'analisi di questi parametri mostra come taluni effetti incrociati possano avere una notevole importanza in un vasto corridoio di volo praticamente realizzabile.

Summary. — The equations for the hypersonic wakes are written, taking into account the cross effects between the gradients of temperature and the electronic concentration and the gradient of electrical potential.

By the dimensional analysis of the equations the fundamental parameters affecting the phenomenological behaviour of the wakes are evidenced.

The analysis of these parameters shows that some cross effects have a noticeable importance in a large flight corridor of pratical interest.

## Introduzione.

L'interesse per le scie ipersoniche si è accentuato ultimamente in relazione agli studi sul rientro di capsule spaziali, sulle traiettorie dei mobili balistici e delle meteore. In particolare la presenza della scia ipersonica comporta una serie di problemi relativi ai sistemi di rilevamento e di radiocomunicazione per i mobili che procedono a forti velocità nell'atmosfera. Fino ad oggi la letteratura scientifica non ha tenuto

---

(*) Nota presentata al 2° Congresso Internazionale Tecnico Scientifico dello Spazio. Roma, 19-23 Giugno 1962.

(**) Istituto di Aeronautica - Universita - Napoli

conto, nella determinazione delle caratteristiche delle scie ipersoniche, dei cosiddetti effetti incrociati, cioè della interazione mutua tra gradienti dei parametri di stato, come i gradienti di concentrazione elettronica e di temperatura, ed il gradiente di potenziale elettrico determinato dai moti relativi tra particelle cariche di segno diverso. In effetti, qualora si dimostrasse che tale gradiente di potenziale elettrico ha un peso cospicuo nel bilancio dei fattori agenti sulle caratteristiche della scia, i metodi di studio finora seguiti risulterebbero inadeguati.

È scopo di questa nota dimostrare che, nella valutazione dei profili di concentrazione elettronica, attraverso la regione diffusiva, bisogna tener conto della presenza del gradiente di potenziale elettrico indotto, a meno che la variazione di temperatura nella zona dissipativa non sia molto piccola. Gli effetti di diffusione termica potranno invece completamente trascurarsi: tale ultima osservazione può d'altro canto già farsi, considerando i risultati ottenuti da Chapman et al. ([5]).

Le scie ipersoniche andranno quindi, in genere, studiate considerando anche l'equazione di Poisson per la distribuzione del potenziale elettrico al fine di rendere completo il gruppo di equazioni di solito trattato.

L'autore desidera esprimere il suo ringraziamento al Prof. Luigi G. Napolitano per le discussioni ed i suggerimenti ricevuti nel corso di questo lavoro.

## *Equazioni fondamentali.*

Le equazioni per le scie ipersoniche nel caso piano isobarico si scrivono:

continuità: $(\varrho u)_x + (\varrho v)_y = 0$

diffusione elettroni: $\varrho u c_{1x} + \varrho v c_{1y} = (A_{10} T_y + A_{11} c_{1y} + A_{12} \varphi_y)_y = (J_1)_y$

diffusione ioni: $\varrho u c_{2x} + \varrho v c_{2y} = (A_{20} T_y + A_{21} c_{1y} + A_{22} \varphi_y)_y = (J_2)_y$

moto: $\varrho u u_x + \varrho v u_y = (\mu u_y)_y$

energia: $\varrho u h_x + \varrho v h_y = (A_{00} T_y + A_{01} c_{1y} + A_{02} \varphi_y)_y + (\mu u_y)^2 = (J_0)_y$

dove $J_1$, $J_2$, $J_0$ sono i flussi di massa del componente 1 (elettroni), 2 (ioni) e di energia (0) rispettivamente. Tali flussi possono porsi in funzione dei gradienti $\nabla T$, $\nabla c_1$ e $\nabla \varphi$ attraverso i coefficienti fenomenologici $A_{ij}$.

Peraltro la termodinamica dei processi irreversibili dimostra che gli $A_{ij}$ non soddisfano il principio di Onsager, poichè il sistema dei flussi non è quello direttamente coniugato con le forze scelte.

Il sistema $\nabla T$, $\nabla c_1$, $\nabla \varphi$ comporterebbe infatti i flussi (1):

$$\frac{J_s^c}{T} \; ; \quad \frac{b_1 J_1 + b_2 J_2}{T} \; ; \quad \frac{I}{T}$$

dove $J_s^c$ è il flusso di entropia di conduzione, non legato ad alcun trasporto di massa. $I$ è la densità di corrente elettrica, $I = e_1 J_1 + e_2 J_2$, e:

$$b_i = \frac{\partial (\mu_i - \mu_3)}{\partial C_1} - \frac{e_1}{e_2} \frac{\partial (\mu_i - \mu_3)}{\partial C_2}$$

Il sistema di flussi $J_0$, $J_1$ e $J_2$ è invece direttamente coniugato alle tre forze generalizzate:

$$F_0 = - \frac{\nabla T}{T}$$
$$F_1 = - \nabla(\mu_1 - \mu_3) - (S_1 - S_3)\, \nabla T - e_1 \nabla \varphi$$
$$F_2 = - \nabla(\mu_2 - \mu_3) - (S_2 - S_3)\, \nabla T - e_2 \nabla \varphi$$

attraverso i coefficienti fenomenologici $L^*_{ij}$ (1). Ne segue quindi che i coefficienti $A_{ij}$ andranno determinati considerando proprio il sistema congruente e ricavandoli in funzione degli $L^*_{ij}$. Tralasciando i vari passaggi, si ottiene in tal guisa:

$$\begin{aligned}
A_{00} &= - L^*_{00}/T \\
A_{01} &= - b_2 L^*_{02} \\
A_{02} &= - e_2 L^*_{02} \\
A_{10} &= - L^*_{10}/T \\
A_{11} &= - b_1 L^*_{11} \\
A_{12} &= - e_1 L^*_{11} \\
A_{20} &= - L^*_{20}/T \\
A_{21} &= - [b_1 L^*_{21} + b_2 L^*_{22}] \\
A_{22} &= - [e_1 L^*_{21} + e_2 L^*_{22}]
\end{aligned}$$

Tutti gli $L^*_{ij}$ sono stati determinati in Bibl. (1) nella ipotesi di plasma Lorentziano imperfetto debolmente ionizzato.

Per procedere alla adimensionalizzazione delle equazioni, facciamo le posizioni:

$$T^+ = \frac{T}{T_0} \; ; \quad \varrho^+ = \frac{\varrho}{\varrho_0} \; ; \quad u^+ = \frac{u}{V_0} \; ; \quad v^+ = \frac{v}{V_0} \; ; \quad x^+ = \frac{x}{L_0} \; ;$$

$$y^+ = \frac{y}{L_0} \; ; \quad \varphi^+ = \frac{\varphi}{\varphi_0} \; ; \quad A_{ij}^+ = \frac{A_{ij}}{(A_{ij})_0} \; ; \quad J_1^+ = \frac{J_1}{\varrho_0 V_0 c_{10}} \; .$$

Mentre le grandezze $T_0$, $\varrho_0$ ecc. hanno il consueto significato di grandezze di riferimento caratteristiche del fenomeno (valori all'infinito o valori del punto di ristagno del corpo ecc.), la scelta di $\varphi_0$ è stata compiuta tenendo conto delle considerazioni che seguono.

È stato dimostrato sperimentalmente ([6]) la possibilità di ottenere in un plasma un campo elettrico indotto mediante l'applicazione di un gradiente di temperatura. Si è cioè messa in luce, anche per mezzi gassosi, come già per i solidi, la presenza di un effetto Seebeck. In Bibl. ([1]) si è ricavato mediante la termodinamica dei processi irreversibili ed i risultati della teoria cinetica dei gas la espressione del coefficiente di Seebeck per i plasmi Lorentziani debolmente ionizzati.

In particolare detto coefficiente di Seebeck risulta espresso da:

$$S = \left(\frac{\nabla\varphi}{\nabla T}\right)_{\substack{T_1=0\\T_2=0}} = \frac{15}{8}\,\frac{K}{e}\left(1 + \frac{n_2}{n_3}\,\frac{D_{23}}{D_{12}}\right) .$$

Sembra quindi opportuno scegliere, quale valore di riferimento per $\varphi$, proprio: $\varphi_0 = S\Delta_0 T$, dove $\Delta_0 T$ è una opportuna differenza di temperatura.

Per es. $\Delta_0 T$ può essere il valore massimo della differenza di temperatura attraverso la scia.

Con siffatte considerazioni e tenendo conto del sistema che lega gli $A_{ij}$ e gli $L^*_{ij}$ è possibile scrivere le due equazioni della diffusione e l'equazione dell'energia in termini adimensionali come segue (*):

$$\begin{aligned}\varrho u c_{1x} + \varrho v c_{1y} = \frac{(A_{11})_0}{\varrho_0 V_0 L_0}\Bigg[\frac{D_1^T{}_0 m_1}{K T_0 L_{110}}\left(A_{10}\,T_y\right)_y + \left(A_{11}\,c_{1y}\right)_y +\\ + \frac{15}{8}\,\frac{\Delta_0 T}{T_0}\left(A_{12}\,\varphi_y\right)_y\Bigg] ;\end{aligned} \qquad [1]$$

$$\begin{aligned}\varrho u c_{2x} + \varrho v c_{2y} = \frac{(A_{21})_0}{\varrho_0 V_0 L_0}\Bigg[\frac{D_2^T{}_0 m_2}{K T_0 L_{210}}\left(A_{20}\,T_y\right)_y + \left(A_{21}\,c_{1y}\right)_y +\\ + \frac{15}{8}\,\frac{\Delta_0 T}{T_0}\left(A_{22}\,\varphi_y\right)_y ;\end{aligned} \qquad [2]$$

$$\begin{aligned}\varrho u h_x + \varrho v h_y = \Bigg|\left(\frac{1}{Pr\,Re}\right) A_{00}\,T_y - \left(\frac{1-\gamma}{Sc\,Re}\,\frac{n_1}{n}\right) A_{01}\,c_{1y} +\\ - \left(\frac{1-\gamma}{Sc\,Re}\,\frac{n_1}{n}\right) A_{02}\,\varphi_y\Bigg|_y + \left(\frac{E}{Re}\right) u_y^2 .\end{aligned} \qquad [3]$$

(*) Le grandezze adimensionali vengono d'ora in poi indicate senza asterisco.

I numeri adimensionali che compaiono nelle precedenti equazioni risultano:

$$
\begin{aligned}
Re &= \text{numero di Reynolds} &&= \varrho_0 V_0 L_0/\mu \\
Pr &= \text{numero di Prandtl} &&= \lambda/C_p\mu \\
E &= \text{numero di Eckert} &&= V_0^2/C_p T_0 \\
Sc &= \text{numero di Schmidt} &&= \mu/\varrho_0 D_{23}\,.
\end{aligned}
$$

## Discussioni e Conclusioni.

L'esame delle equazioni su riportate mostra come assuma una particolare influenza sul fenomeno della scia la distribuzione del potenziale elettrico provocato dalla diffusione reciproca tra le particelle cariche.

Si consideri infatti la equazione 1.

A meno del coefficiente $\dfrac{(A_{11})_0}{\varrho_0 V_0 L_0}$, che può ridursi a $\dfrac{1}{Re\,Sc}$ e che rappresenta l'importanza relativa dei processi convettivi e dissipativi, l'influenza del potenziale elettrico sulla diffusione è paragonabile a quello del gradiente di concentrazione elettronica.

L'effetto della diffusione termica risulta invece piccolissimo, nel caso da noi studiato: esso può assumere una certa importanza solo in condizioni particolari di altissime temperature, come in alcuni fenomeni astrofisici (ad es. nella corona solare).

L'equazione dell'energia, infine, mostra come la distribuzione della temperatura non sia invece praticamente controllata dalla distribuzione del potenziale elettrico e dalla concentrazione elettronica.

Da quanto sopra detto discende la necessità di includere nel calcolo della massima parte delle scie ipersoniche lo studio della distribuzione del campo elettrico. Tale determinazione del potenziale elettrico comporterà quindi oltre al sistema di equazioni già riportate, anche l'equazione di Poisson, che sino ad oggi non è stata considerata nella letteratura pertinente, con la conseguenza di una maggiore semplicità ma anche di una scarsa attendibilità, in molti casi.

*Simboli:*

$A_{ij}$ = coefficienti fenomenologici ($i, j = 0, 1, 2$)
$c_i$ = concentrazione di massa per la specie $i$
$C_p$ = calore specifico a pressione costante

$D^T{}_i$ = coefficiente di diffusione termica della specie $i$
$D_{ij}$ = coefficiente di diffusione molecolare binaria per la specie $i$ ed $j$
$E$ = numero di Eckert
$e_i$ = carica elettrica per unità di massa della specie $i$
$e$ = carica elettrica dell'elettrone
$h_D$ = lunghezza di Debye
$h$ = entalpia totale per unità di massa
$I$ = densità di corrente elettrica
$J_i$ = Flusso di massa della specie $i$
$J_0$ = Flusso di energia
$J^s{}_c$ = Fluido di entropia di conduzione
$K$ = costante di Boltzmann
$L_0$ = lunghezza di riferimento
$L_{ij}$ = coefficienti fenomenologici ($i$, $j$ = 0, 1, 2)
$m_i$ = massa molecolare per la specie $i$
$n_i$ = densità di numero per la specie $i$
$Pr$ = numero di Prandtl
$Re$ = numero di Reynolds
$S_i$ = entropia specifica per la specie $i$
$Sc$ = numero di Schmidt
$T$ = temperatura
$u, v$ = componenti di velocità
$\gamma$ = rapporto di calori specifici
$\lambda$ = coefficiente di conducibilità termica
$\mu$ = coefficiente di viscosità
$\varrho$ = densità
$\varphi$ = potenziale elettrico.

I pedici 1, 2, 3 si riferiscono agli elettroni, agli ioni ed alle molecole neutre, rispettivamente.

I pedici $x$, $y$ si riferiscono a derivazione rispetto a $x$, ed a $y$, rispettivamente.

Nota finanziata dal Navy Dept. U.S.A. (Contratto N.O.N.R. 3475 - 00).

## BIBLIOGRAFIA


(1) L. G. Napolitano, L. de Socio, *Study of electromagnetic Properties of non-Uniform Plasmas in Thermal Equilibrium.* «I. A. Rep.», (1962).

(2) S. Feldman, *On Trails of Axisymmetric Hypersonic Blunt Bodies Flying Through the Atmosphere.* «J.A.S.», (June 1961).

(3) M. H. Bloom, *Thermal and Chemical Effects in Wakes.* AGARD Meet. on « High Temp. Aspects of Hypersonic Flow ». (Brussels, April 1962).

(4) J. Hirschfelder, C. Curtiss, R. Bird, *Molecular Theory of Gases and Liquids.* Wiley & Sone, 1954.

(5) S. Chapman, E. Tandberg Hanssen, *Thermal diffusion at High Temperatures in Ionized Gases.* «Proc. Conference on extremely high temperatures», (Boston 1958).

(6) S. Klein, *The direct conversion at thermal energy into electrical energy.* «Proc. 5th Int. Conference on Ionization Phenomena in Gases», (Munich 1961).