

Importanza della legge di Hall nei fenomeni ionosferici (*)

A. POZZI - G. CONTURSI (**)

Ricevuto il 18 Maggio 1963

RIASSUNTO. — In questo lavoro si sottolinea come per studiare l'influenza della anisotropia della conduttività elettrica (fenomeno che da luogo alla legge di Hall) sia necessario risolvere due tipi di problemi.

Il primo tipo di problemi riguarda la formulazione di teorie che consentano di esprimere analiticamente la conduttività. A tali argomenti è dedicata la prima parte di questa nota.

Nella seconda parte si analizza l'altra serie di problemi, riguardanti lo studio del moto macroscopico di una corrente fluida il cui coefficiente di conduttività sia anisotropo.

SUMMARY. — This note deals with two problems related to anisotropy of the electrical conductivity.

In the first part of the paper the possibility to evaluate the analytical expression of the coefficient of electrical conductivity has been shown, taking into account some results stated by Jancel and Kahan.

In the second part a suitable simplified analysis enabled us to discuss the macroscopic motion of an ionospheric flow.

1. - INTRODUZIONE.

Numerosi autori hanno segnalato l'importanza del cosiddetto effetto Hall per lo studio dei mezzi ionizzati in misura tale quale si riscontra nella ionosfera.

(*) Nota presentata al 2° Congresso Internazionale Tecnico Scientifico dello Spazio. Roma, 19-23 Giugno 1962.

(**) Istituto di Aeronautica - Università di Napoli.

Tale studio essenzialmente comporta la impostazione e la risoluzione di due problemi. Il primo di questi consiste nella determinazione del coefficiente che definisce l'effetto Hall. Tale determinazione di una proprietà costitutiva del gas, come sarà subito illustrato, va correttamente effettuata sulla base di descrizioni statistiche. Al successivo paragrafo 2 tale impostazione verrà effettuata valendosi degli accurati risultati stabiliti da Jancel e Kahan ⁽²⁾ ed utilizzando determinazioni sperimentali della distribuzione elettronica nell'atmosfera ottenute alcuni anni fa mediante satelliti ⁽³⁾.

Il secondo problema consiste nella descrizione macroscopica delle proprietà di un mezzo dotato di conduttività di Hall. Tale descrizione risulta estremamente complessa stante la non linearità che la presenza di campi elettromagnetici aggiunge a quella caratteristica delle equazioni fluidodinamiche.

Nel presente lavoro, basandosi su schematizzazioni semplificatrici, si mettono in evidenza alcune caratteristiche proprietà derivanti dalla presenza dell'effetto Hall.

2. - LA CONDUTTIVITÀ ELETTRICA NEI GAS.

Una delle difficoltà comuni a tutte le formulazioni macroscopiche è quella della determinazione di opportuni coefficienti che tengano conto di fenomeni che si svolgono su scala microscopica.

Così nel campo della fluidodinamica per tener conto degli scambi di quantità di moto su scala microscopica si introduce il coefficiente di viscosità. Quanto poi alla possibilità di valutarlo si deve ricorrere o all'esperienza o a teorie del tipo statistico.

Analoghi problemi si incontrano nello studio del flusso di cariche elettriche.

La formulazione macroscopica postula una relazione del tipo $J = \sigma E$, dove E è l'intensità del campo elettrico e σ è il coefficiente di conduttività elettrica: vogliamo ora brevemente discutere sulla natura e sui metodi di calcolo di questo coefficiente.

In condizioni normali, quando cioè il mezzo è isotropo dal punto di vista elettrico, il coefficiente di conduttività è una grandezza scalare; in particolari condizioni invece, come accade nella ionosfera questo coefficiente ha carattere tensoriale.

La ionosfera è un mezzo debolmente ionizzato in cui sono presenti tre specie di particelle: ioni, elettroni e molecole neutre. Il modo più

corretto di studiarne le proprietà è quello di ricorrere all'equazione integro-differenziale di Boltzmann (1).

Allo scopo di effettuare delle valutazioni numeriche, è il caso di ricordare brevemente la teoria magnetoionica dei gas leggermente ionizzati, fondata sull'equazione di Boltzmann, come esposta da Jancel e Kahan (2).

Questi considerano una miscela di due gas, molecole neutre ed elettroni, sotto l'azione di un campo elettrico oscillante con legge sinusoidale del tipo $E \cos \omega t$ e di un campo magnetico H_0 . Si trascura il contributo dovuto agli ioni in quanto nel caso di gas debolmente ionizzato questo è trascurabile. Altra ipotesi fondamentale è quella di considerare elastici gli urti tra molecole ed elettroni.

Per descrivere le proprietà di questa miscela è allora necessario introdurre due funzioni di distribuzione f_1 ed f_2 rispettivamente per molecole ed elettroni. Indicando inoltre con V_1 e V_2 la velocità delle due specie e con F_2 l'azione elettromagnetica sugli elettroni del campo $E H_0$, le due equazioni di Boltzmann si scrivono:

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} + v_1 \cdot \text{grad}_{r_1} f_1 = \frac{\partial e f_1}{\partial t} \tag{2.1}$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial t} + v_2 \cdot \text{grad}_{r_2} f_2 + F_2 \cdot \text{grad}_{v_2} f_2 = \frac{\partial e f_2}{\partial t} \tag{2.2}$$

I secondi membri rappresentano i contributi degli urti tra molecole ed elettroni.

Il gas è considerato Lorenziano; valgono cioè le seguenti due ipotesi:

a) la massa delle molecole del primo costituente è grande rispetto a quella del secondo costituente. Questa ipotesi è senz'altro verificata in quanto il rapporto tra molecole neutre ed elettroni è molto grande.

b) l'influenza degli urti tra le particelle del secondo costituente è trascurabile rispetto a quella degli urti tra le molecole del primo costituente. Questa ipotesi è accettabile perchè si considera un gas debolmente ionizzato.

Questa ipotesi è molto importante perchè consente di concludere che come distribuzione di velocità relativa alle molecole neutre può essere assunta quella Maxwelliana.

Si ha cioè:

$$f_1 = n_1 \left(\frac{m_1}{2\pi kT} \right)^{3/2} \exp \left(-\frac{m_1 v^2}{2kT} \right) \tag{2.3}$$

dove n_1 è il numero di molecole per unità di volume e T è la temperatura assoluta.

Il problema è quindi ridotto a quello della risoluzione dell'equazione [2.2]. Essendo la forza F_2 che agisce sull'elettrone data da:

$$F_2 = \frac{e_2}{m_2} E \cos \omega t + \frac{e_2}{m_2} (v_2 \wedge H_0) \quad [2.4]$$

(dove e_2 è la carica dell'elettrone) l'equazione [2.1] si scrive:

$$\frac{\partial f_2}{\partial t} + \left[\frac{e_2 \vec{E}}{m_2} \cos \omega t + \left(\frac{e_2}{m_2} \right) v_2 \wedge H_0 \right] \cdot \text{grad}_{v_2} f_2 = \iiint \iiint \left(f'_1 f'_2 - f_1 f_2 \right) g b d\varepsilon d v_1 d b \quad [2.5]$$

dove f'_1 ed f'_2 sono i valori delle funzioni f_1 ed f_2 per i valori v'_1 e v'_2 , cioè per i valori che le velocità v_1 e v_2 assumono dopo l'urto, g è la velocità relativa delle due particelle [$g = |V_1 - V_2| = |V'_1 - V'_2|$] e b ed ε sono i parametri d'urto (1)].

La funzione di distribuzione f_2 non è Maxwelliana per la presenza della forza Lorentziana F_2 e quindi lo scostamento da questa è tanto quanto più forti sono i campi elettrici e magnetici. Jancel e Kahan (2) prendono in esame campi elettromagnetici di intensità qualsiasi.

Il metodo seguito consiste nello sviluppo della funzione di distribuzione in termini delle sue armoniche sferiche, ed è spinto fino alla valutazione dell'approssimazione del primo ordine.

Si pone cioè la funzione f_2 sotto la forma:

$$f_2 = f^{(0)}_2 + \left(\frac{e_2 E}{m_2} \cdot v_2 \right) \left(\alpha^{(1)}_2 \cos \omega t + \beta^{(1)}_2 \sin \omega t \right) + \left(H_0 \wedge \frac{E e_2}{m_2} \right) \cdot v_2 \left(\xi^{(1)}_2 \cos \omega t + \eta^{(1)}_2 \sin \omega t \right) + \left[H_0 \wedge \left(H_0 \wedge \frac{E e_2}{m_0} \right) \right] v_2 \cos \omega t + \delta^{(1)}_2 \sin \omega t. \quad [2.6]$$

In questa espressione compaiono 7 funzioni incognite:

$$f^{(0)}_2, \alpha^{(1)}_2, \beta^{(1)}_2, \xi^{(1)}_2, \eta^{(1)}_2, \gamma^{(1)}_2, \delta^{(1)}_2.$$

Queste vengono determinate sostituendo la [2.6] nell'equazione di Boltzmann [2.5] ed eguagliando i due membri.

Da questa formulazione appare chiaro come i termini di anisotropia sono: $\frac{E e_2}{m_2}$, $H_0 \wedge \frac{E e_2}{m_2}$, $H_0 \wedge \left(H_0 \wedge \frac{E e_2}{m_0} \right)$.

È interessante notare che nel caso generale, per valori qualsiasi di $\frac{e_2 E}{m_2}$, anche la zero approssimazione $f^{(0)}$ non risulta maxwelliana. Si

riduce a questa se è: $\frac{e_2 E}{m_0} \ll 1$.

Questa dipende essenzialmente dal libero percorso medio che a sua volta dipende dalla legge di interazione tra molecole ed elettroni. Si ha cioè:

$$\lambda = v_2 / 2\pi n_1 \Phi_{12}(v_2)$$

e:

$$\Phi_{12}(v_2) = \int_0^{\infty} (1 - \cos \chi) g b db$$

dove χ rappresenta la variazione angolare della velocità relativa durante una collisione.

Dunque per conoscere l'approssimazione di ordine zero è necessario conoscere la legge di interazione tra molecole ed elettroni.

Due tipi di schematizzazioni sono importanti:

a) molecole sferiche e rigide con urti elastici; λ è allora indipendente da V_2

b) la forza tra molecole ed elettroni varia come $1/r^5$; la frequenza di collisione $\nu = V_2/\lambda$ è allora indipendente da V_2 ed $f^{(0)}_2$ è maxwelliana con una temperatura elettronica data da:

$$T' = T \left[1 + m_1 \left(\frac{E e_2}{m_2} \right)^2 h(\nu) \right] 6kT (\omega^2 + \nu^2) .$$

Una volta nota la funzione di distribuzione f_2 è possibile conoscere la velocità di diffusione W_2 degli elettroni e quindi il flusso di cariche elettriche cioè la corrente I data da:

$$I = n_2 e_2 w_2 . \quad [2.7]$$

Tale grandezza ha carattere vettoriale si può scrivere infatti:

$$I = \left(\frac{4\pi n_2 e_2}{3m_2} \right) \left[J_1 E + J_2 (H_0 \wedge E) + J_3 H_0 \wedge (H_0 \wedge E) \right] \quad [2.8]$$

dove J_1 , J_2 e J_3 sono grandezze scalari definite in termini delle grandezze introdotte nella [2.6].

Come si vede vi è un contributo parallelo al campo elettrico proporzionale ad J_1 , uno perpendicolare sia ad E che H_0 ed uno perpendicolare ad H_0 ed alla normale ad H_0 ed E .

Due casi limiti sono interessanti: H_0 parallelo ad E in cui la corrente I è parallela E e non risente del campo magnetico ed H_0 perpendicolare ad E . In questo caso si manifestano nella massima intensità i fenomeni di anisotropia del coefficiente di conduttività elettrica.

In particolare in questo caso si ha una corrente elettrica perpendicolare al campo elettrico e magnetico. Questo fenomeno costituisce la legge di Hall.

Il coefficiente di Hall, definito come rapporto tra campo elettrico applicato e la corrente I è quindi:

$$R = \frac{E_y}{I} = - \frac{3m_2 H_o J_2}{4\pi n_2 e^2} \left[(J_1 - H_o^2 J_2)^2 + H_o^2 J_2^2 \right] \quad [2.9]$$

per $\omega = 0$, per $f^{(0)}_2$ maxwelliana e $v/\omega_H \ll 1$, è

$$R = (3\pi/8) H_o / n_2 e_2. \quad [2.10]$$

L'interesse per la precedente trattazione risiede nel fatto che consente una immediata valutazione della conduttività di Hall, secondo la [2.10], sulla scorta di determinazioni sperimentali russe.

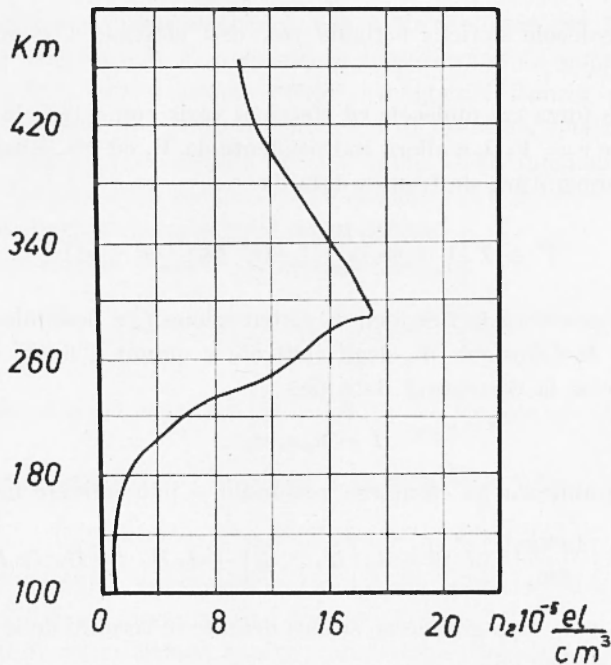


Fig. 1

In (*) è, in particolare, riportata la legge di distribuzione degli elettroni in quota. In Fig. 1 si riporta tale legge di distribuzione. Dalla [2.10] si trae che la conduttività $\sigma = \frac{1}{R} = \frac{8}{3\pi} \frac{e_2 n_2}{H_o}$ è, a parte il fattore di scala $\frac{8}{3\pi} \frac{e_2}{H_o}$, rappresentata dal diagramma di Fig. 1.

3. - ALCUNI RISULTATI CIRCA L'INFLUENZA SULLE CARATTERISTICHE DEL MOTO.

Allo scopo di effettuare delle valutazioni quantitative, è il caso di prendere in considerazione qualche caso elementare analiticamente trattabile ed atto, quindi, a fornire alcune prime indicazioni.

Consideriamo, pertanto, il moto bidimensionale di una massa d'aria elettricamente conduttrice in presenza di un campo magnetico (*) imposto, normale alla giacitura caratteristica del moto.

Non esistono campi elettrici imposti: quelli esistenti saranno dunque esclusivamente dovuti a fenomeni di induzione.

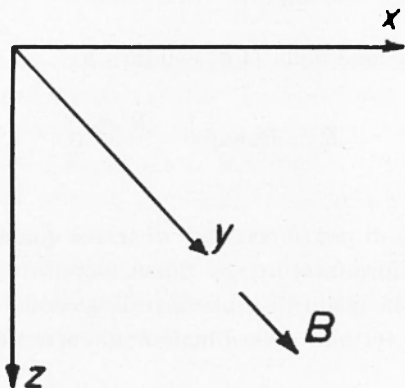


Fig. 2

Sia (Fig. 2) xz il piano del moto. Detti, al solito i, j, k , i tre versori della terna prescelta, la forza ponderomotrice per unità di volume assume l'espressione (cfr. formula [2.8])

$$J \wedge B = F_1 + F_2 = \sigma_1 B^2_0 (u \underline{i} + w \underline{k}) + \sigma_2 B^2_0 (-u \underline{k} + w \underline{i}) \quad [3.1]$$

La bidimensionalità del moto unita all'ipotesi di stazionarietà, comporta che le proiezioni dell'equazione di equilibrio si riducano alle seguenti:

$$\rho u u_x + \rho w u_z = -p_x - B^2_0 \sigma_1 u - B^2_0 \sigma_2 w \quad [3.2]$$

$$\rho u w_x + \rho w w_z = -p_z + \sigma_2 B^2_0 u - \sigma_1 B^2_0 w \quad [3.3]$$

(*) Tale campo sarà considerato costante. Ciò equivale a trascurare gli effetti dei campi magnetici indotti. Ciò è lecito in prima approssimazione.

Inoltre è:

$$u_x + w_z = 0 . \quad [3.4]$$

Derivando le [3.1] e [3.2] rispettivamente rispetto a z e ad x e sottraendo si ha:

$$\varrho u(u_z - w_x)_x + \varrho w(u_z - w_x)_z = B^2 \sigma_1 (w_x - u_z) \quad [3.5]$$

avendo tenuto conto della [3.4].

Indicando con R l'unica componente del rotore del campo di velocità della [3.5] nelle ipotesi di moto stazionario si ha:

$$\varrho \frac{dR}{dt} = - B^2 \sigma_1 R . \quad [3.6]$$

L'ovvia integrazione della [4.6] conduce a

$$R = R_0 \exp \left[- \frac{B^2 \sigma_1 t}{\varrho} \right] \quad [3.7]$$

ove R_0 è il rotore a $t = 0$.

La [3.7], che già di per sé consente di trarre qualche conclusione inerente all'effetto uniformizzatore del flusso esercitato dalla presenza del campo magnetico, dà modo di esplicitare il secondo membro dell'equazione cinematica in termini della funzione di corrente

$$\Delta_x \psi = R . \quad [3.8]$$

Questa equazione, ove se ne rintracci un integrale particolare, può agevolmente ricondursi all'equazione di Laplace di più agevole studio.

Se inoltre in qualche punto il rotore è nullo, sarà sempre tale.

Prendiamo ora in esame le condizioni al contorno.

Una impostazione coerente con lo studio della ionosfera è la seguente. Ad $x = -\infty$, $u = f(z)$; sulle superficie esterne della corrente $p = \text{cost}$ (= pressione ambiente).

Per avere delle indicazioni immediate noi sostituiamo a questa geometria una fittizia: supponiamo cioè che il moto avvenga tra pareti rigide. Ricaviamo così la pressione che agisce su queste pareti ed abbiamo in tal modo una indicazione sulla forma che assumono le superfici delimitanti la massa fluida.

Prendendo in esame condizioni iniziali uniformi si ha:

$$R = 0 ; \quad p_x = - B^2 \sigma_1 u ; \quad p_z = \sigma_2 B^2 u ; \quad u = \text{cost} .$$

In questa schematizzazione la conduttività di Hall ha influenza solo sul gradiente di pressione trasversale.

Ne segue che se, come in effetti è, non esistono superfici atte a contrastare tale pressione si ha un moto trasversale alla velocità fondamentale funzione del parametro.

$$\sigma_e B^2 u L$$

indicando con L lo spessore della vena fluida.

CONCLUSIONI.

In questo lavoro è stata studiata l'influenza della corrente di Hall sui moti ionosferici.

Nella prima parte è stato mostrato in che modo è possibile valutare il coefficiente di conduttività elettrica avvalendosi dei risultati della teoria statistica. In particolare è stato mostrato quali metodi sono stati suggeriti per risolvere l'equazione di Boltzmann e come, con l'aiuto dei risultati sperimentali ottenuti dai satelliti sovietici, è possibile ottenere il diagramma del coefficiente di conduttività in funzione della quota.

Nella seconda parte è stato mostrato come schematizzando opportunamente la geometria del moto sia possibile mettere in evidenza l'andamento qualitativo del fenomeno.

BIBLIOGRAFIA

- (1) CHAPMAN-COWLING, *The mathematical theory of non uniform gases*. Cambridge University Press.
- (2) JANCEL-KAHAN, *Mecanique statistique des plasmas electroniques lorentzians a ses applications à l'ionosphere*. Report of the physical society conference on the Physics of the Ionosphere. Published by the Physical Society 1 Lowther Gardens, Prince Consort Road, London S.W.F.
- (3) KRASOUSKY V., *Lo studio degli strati superiori della atmosfera mediante il terzo satellite sovietico*. Memoria presentata al IX Congresso Internazionale di Astronautica. Amsterdam 1958. Missili, 1959, n. 3.