

UN ELTRANSLOG SCHLUMBERGER

A. BELLUICI

1. — Consideriamo il c.e.m. (campo elettromagnetico) di una sorgente puntiforme di corrente: 0, elettrodo di dimensioni trascurabili rispetto alla distanza dei punti di misura di tale campo, in un mezzo terrestre omogeneo.

Si suppone con ciò che il ritorno della corrente avvenga a grande distanza dalla sorgente 0, dimodoché dipartendosi radialmente le linee di flusso da essa, le relative superfici di livello si potranno considerare sferiche concentriche, di centro 0.

Posto l'elettrodo 0 (mobile) in un foro di sonda, un secondo fisso alla superficie del suolo, le prese di tensione mobili collineari ad 0 lungo l'asse verticale del foro cilindrico, si realizza il classico dispositivo elettrodico di carotaggio elettrico Schlumberger.

Alimentando siffatto circuito a c.c. (corrente continua) d'intensità I , se ϱ è la resistività del terreno, si ha, (v. Fig. 1), tra i punti A e B la caduta di tensione:

$$\Delta V = I \varrho M \quad [1]$$

M è il coefficiente di forma (o geometrico): $4\pi z_1 z_2 / (z_2 - z_1)$ del dispositivo.

La [1] è valida, prescindendo dalla resistività ϱ_m dei fanghi (o considerando $\varrho_m = \varrho$), e dal diametro del foro (o ritenendolo trascurabile rispetto a z_1, z_2).

Mentre per i regimi stazionari il campo elettrico vale:

$$E_s = - \text{grad } V \quad [2]$$

per quelli quasi-stazionari (v. [1]), detta « h » = $(2/\sigma\omega)^{1/2}$ la profondità di penetrazione della corrente nel suolo:

$$E_{q,s} = - e^{-(1+j)z/h} \cdot \text{grad } V \quad [3]$$

che per $\omega \rightarrow 0$, importa ovviamente: $E_{q,s} = E_s$.

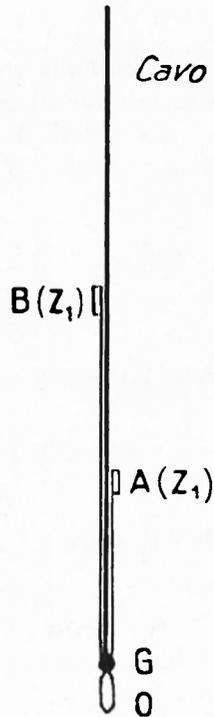


Fig. 1

2.— Inseriamo ora una step-function di corrente nel precedente circuito tellurico, il campo elettrico s'esprimerà con:

$$F_z(t) = f(t) \cdot I/4\pi\sigma z^2; \quad \sigma = \varrho^{-1} \quad [4]$$

dove $f(t)$ è una cosiddetta « funzione transitoria » (v. [2]), $E_z(t)$ la componente verticale del campo elettrico.

Introducendo il tempo: $T = 4\pi\sigma z^2 \cdot 10^{-9}$, (che dipende dalla struttura fisica del terreno e dalla distanza dei punti di osservazione, e assume lo stesso valore su ciascuna delle superfici sferiche potenziali concentriche intorno ad 0), la [4] diviene, esplicitando $f(t)$:

$$E_z(t) = I \cdot (1 - \operatorname{erf} \sqrt{T/4t}) / 4\pi\sigma z^2 \quad [5]$$

È evidente che: $E_z(0) = 0$, $E_z(\infty) = I/4\pi\sigma z^2$, qualunque siano z e la costante di tempo: $T(\sigma, z)$.

La caduta di tensione trans tra i punti sulla verticale, asse del pozzo: $A(z_1)$ e $B(z_2)$ sarà pertanto:

$$\Delta V = \frac{I\varrho}{4\pi} \cdot \int_{z_1}^{z_2} z^{-2} \cdot \operatorname{coerf} \left(z \sqrt{\frac{\pi\sigma}{t}} \right) dz \quad [6]$$

dove l'integrale indefinito in [6] vale, (per l'addendo in « erf »):

$$c - z^{-1} \operatorname{erf} \left(z \sqrt{\frac{\pi\sigma}{t}} \right) + \sqrt{\sigma/t} \operatorname{lg}_i \cdot \left(e^{-\pi\sigma z^2/t} \right); \quad c = \text{cost. arbitraria,}$$

da cui, posto $\beta = \sqrt{\pi\sigma/t}$:

$$\Delta V = \frac{I\varrho}{4\pi} \left\{ 2(z_1^{-3} - z_2^{-3}) + z_2^{-1} \operatorname{erf} \beta z_2 - z_1^{-1} \operatorname{erf} \beta z_1 - \right. \\ \left. - \frac{\beta}{\sqrt{\pi}} \left[\operatorname{lg}_i e^{-\beta^2 z_2^2} - \operatorname{lg}_i e^{-\beta^2 z_1^2} \right] \right\} \quad [7]$$

I valori estremi di $\Delta V(t)$ risultano:

$$\Delta V(\infty) = (z_1^{-3} - z_2^{-3}) I\varrho/2\pi \quad [8]$$

$$\Delta V(0) = (z_1^{-3} - z_2^{-3} + z_2^{-1} - z_1^{-1}) I\varrho/4\pi$$

La derivata prima rispetto al tempo di $\Delta V(t)$ potendosi scrivere:

$$\dot{\Delta V}(t) = -I \dot{\beta} \left[\lg_i \left(e^{-\frac{\xi_1}{z_1}} \right) - \lg_i \left(e^{-\frac{\xi_1}{z_1^2}} \right) \right] / 4 \pi \sigma \sqrt{\pi} \quad [9]$$

$$\xi_1 = \beta z_1, \quad \xi_2 = \beta z_2,$$

tenendo conto che: $-\dot{\beta} > 0$, il segno di $\dot{\Delta V}(t)$ dipenderà dalla differenza dei logaritmi integrali.

Posto ora $\varphi(\xi) = \lg_i \left(e^{-\frac{\xi}{z}} \right)$, $\varphi(0) = \lg_i(1) < 0$ (nell'intervallo: 0, 1, $\lg_i t < 0$), $\varphi(\infty) = \lg_i(0) = 0$, $\varphi'(z) = 2\xi^{-1} e^{-\frac{\xi}{z}} > 0$, $\varphi(\xi)$ così è crescente.

Distinguiamo ora 2 casi (il che ha un ovvio significato fisico): $z_1 < z_2$, $z_1 > z_2$.

Se: $z_1 < z_2$, $\xi_1 < \xi_2$, $\lg_i \left(e^{-\frac{\xi_1}{z_1^2}} \right) - \lg_i \left(e^{-\frac{\xi_1}{z_1}} \right) > 0$. $\dot{\Delta V}(t) > 0$
 $\Delta V(t)$ è crescente.

Inoltre: $z_1^{-3} - z_2^{-3} > 0$, $z_2^{-1} - z_1^{-1} < 0$, quindi:

$$f(0) = \frac{I}{4 \pi \sigma} (z_1^{-3} - z_2^{-3} + z_2^{-1} - z_1^{-1}) < \frac{I}{4 \pi \sigma} (z_1^{-3} - z_2^{-3}) = f(\infty). \quad [10]$$

Se: $z_1 > z_2$, $z_1^{-3} - z_2^{-3} < 0$, $z_2^{-1} - z_1^{-1} > 0$, e quindi:

$$f(0) > f(\infty) \quad [11]$$

Inoltre essendo:

$$\xi_1 > \xi_2, \quad \lg_i \left(e^{-\frac{\xi_1}{z_1}} \right) - \lg_i \left(e^{-\frac{\xi_1}{z_1^2}} \right) < 0; \quad \dot{\Delta v}(t) < 0; \quad \Delta V(t)$$

è decrescente.

Nella fig. 2 è riassunto quanto sopra considerando sia $f(0) > 0$, che $f(0) < 0$.

3. — Occorre, a questo punto, riconoscere i valori di $f(0)$, $f(\infty) \neq 0$, in funzione della distribuzione tripolare verticale. E ciò ai fini della scelta più conveniente delle geometrie polari che si ripercuotono sul maggiore o minore evidenziamento delle caratteristiche temporali dei geoltrans così attivati.

a) Indichiamo: $f(0) \cdot 4\pi\sigma/I = \varphi(z_1, z_2)$, ed esaminiamo il segno di φ a cui sono legati gli eventi di fig. 2:

$$\varphi(z_1, z_2) = z_2^{-3}(h-1)(h^2+h+1-z_2^2); \quad h = z_2/z_1 \quad [12]$$

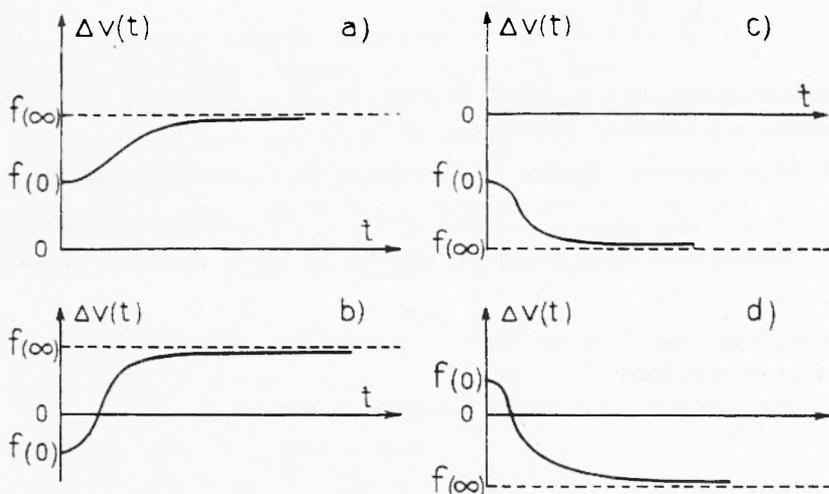


Fig. 2

Dato $z_2 > 0$, $h > 0$, il segno di $\varphi(z_1, z_2)$, dipenderà da quello del prodotto a 2° membro della [12], e questo dai segni di $(h-1)$ e del trinomio $\psi(h) = (h^2 + h + 1 - z_2^2)$ al variare di $h > 0$.

Il discriminante di $\psi(h) = 0$, è: $\Delta = 4z_2^2 - 3$.

Ora se $\Delta < 0$, ($0 < z_2 < \sqrt{3}/2$), il trinomio $\psi(h)$ non si annulla per valori reali di h , ed è sempre positivo (per $h = 0$ vale: $1 - z_2^2 > 0$); $\psi(h) \geq 0$ se $\Delta = 0$, ($z_2 = \sqrt{3}/2$), in quanto si riduce a: $(h + 1/2)^2$ ed è positivo per valori positivi di h .

Se invece $\Delta > 0$, ($\sqrt{3}/2 < z_2$) occorre distinguere 2 casi: $\sqrt{3}/2 < z_2 < 1$; $1 < z_2$. Nel 1°, $1 - z_1^2 > 0$, le radici hanno lo stesso segno, ed essendo la loro somma negativa: $= (-1)$, sono entrambe negative, e per valori positivi di h il trinomio è ancora positivo. Se invece $z_2 > 1$, esiste una radice positiva: $\bar{h} = 0,5(-1 + \sqrt{4z_2^2 - 3})$, e per: $0 < h < \bar{h}$, $\psi(h)$ è negativo, per $h = \bar{h}$ vale zero, per $\bar{h} < h$ è positivo.

Prospettiamo tali eventualità come segue nel quadretto sottostante:

$\sqrt{3}/2 <$	$z_2 < \sqrt{3}/2$	$\Delta < 0$	$\psi(h) > 0$
	$z_2 = \sqrt{3}/2$	$\Delta = 0$	$\psi(h) > 0$
	$z_2 < 1$	$\Delta > 0$	$\psi(h) > 0$
			$\psi(h) < 0, h < \bar{h}$
$1 <$	z_2	$\Delta < 0$	$\psi(h) > 0, \bar{h} < h$

Nei primi 3 casi il segno di $\varphi(z_1, z_2)$ dipende evidentemente da quello di $(h-1)$, ed è negativo per $h < 1$, (cioè se $z_2 < z_1$), e positivo per $h > 0$ (cioè se $z_2 > z_1$).

Nel 4° caso, distinguiamo 3 sottocasi:

1°) $\bar{h} < 1$. Allora se $h < \bar{h}$, $h-1 < 0$, $\psi(h) < 0$, $\varphi(z_1, z_2) > 0$;

se $\bar{h} < h < 1$, $h-1 < 0$, $\psi(h) > 0$, $\varphi(z_1, z_2) < 0$;

se $1 < \bar{h}$, $h-1 > 0$, $\psi(h) > 0$, $\varphi(z_1, z_2) > 0$.

2°) $\bar{h} = 1$. Se $h < \bar{h} < 1$, $h-1 < 0$, $\psi(h) < 0$, $\varphi(z_1, z_2) > 0$;

se $\bar{h} < h$, $h-1 > 0$, $\psi(h) > 0$, $\varphi(z_1, z_2) > 0$.

3°) $\bar{h} > 1$. Se $h < 1 < \bar{h}$, $h-1 < 0$, $\psi(h) < 0$, $\varphi(z_1, z_2) > 0$;

se $\bar{h} < h$, $h-1 > 0$, $\psi(h) > 0$, $\varphi(z_1, z_2) > 0$.

Riassumiamo quanto sopra nel seguente quadro, che permette di poter stabilire le condizioni, (v. fig. 2), per cui: $f(0) \leq 0$.

$\bar{h} < 1$	$h < \bar{h}$, $\varphi(z_1, z_2) > 0$
	$\bar{h} < h < 1$, $\varphi(z_1, z_2) < 0$
	$1 < h$, $\varphi(z_1, z_2) > 0$
$\bar{h} = 1$	$\varphi(z_1, z_2) > 0$
$\bar{h} > 1$	$h < 1$, $\varphi(z_1, z_2) > 0$
	$1 < h < \bar{h}$, $\varphi(z_1, z_2) < 0$
	$\bar{h} < h$, $\varphi(z_1, z_2) > 0$

b) La: $f(0) 2 \pi \sigma / I = \varphi(m)$, con $m = z_1/z_2 = h^{-1}$ si scrive:

$$\varphi(m) = [1 - m^3 + z_1^2(m-1)]/2z_1^3, \quad \varphi(\pm\infty) = \mp\infty, \quad \varphi(0) = \frac{1-z_1^2}{2z_1^3}$$

Dopo discusso esaurientemente in a) il segno della funzione iniziale $f(0)$, vediamo come può variare il modulo di $f(0)$, con la distribuzione elettrodica.

Poiché: $\varphi'(m) = (-3m^2 + z_1^2)/2z_1^3$ tale derivata si annulla intanto per: $m = +z_1/\sqrt[3]{3}$, risultando positiva se $|m| < z_1/\sqrt[3]{3}$, negativa se $|m| > z_1/\sqrt[3]{3}$.

Se ne deduce che: $\varphi(m)$ è decrescente nell'intervallo $(-\infty, -z_1/\sqrt[3]{3})$, crescente nell'intervallo $(-z_1/\sqrt[3]{3}, z_1/\sqrt[3]{3})$, decrescente nell'intervallo $(z_1/\sqrt[3]{3}, +\infty)$, ed è dotata di minimo relativo nel punto $-z_1/\sqrt[3]{3}$, di massimo relativo nel punto $z_1/\sqrt[3]{3}$. Inoltre la $\varphi(m)$ si annulla per: $m = 1; -1/2 - \sqrt[3]{z_1^2 - 3/4}; -1/2 + \sqrt[3]{z_1^2 - 3/4}$, (con $z_1 > \sqrt[3]{3}/2$ per la realtà delle radici).

Ciò posto distinguiamo le seguenti situazioni:

$$0 < z_1 < \sqrt[3]{3}/2, \quad \sqrt[3]{3}/2 < z_1 < 1, \quad 1 < z_1 < \sqrt[3]{3}, \quad z_1 \geq \sqrt[3]{3}$$

1°) $0 < z_1 < \sqrt[3]{3}/2$. Osserviamo che $z_1 < 1$, $z_1 < \sqrt[3]{3}$, si ha $\varphi(0) > 0$, $z_1/\sqrt[3]{3} < 1$, $z_1^2 - 3/4 < 0$, quindi $\varphi(m) = 0$ ha la radice reale $m = 1$ e la funzione $\varphi(m)$ consegue il massimo relativo per un valore di $m < 1$. Il valore minimo relativo (conseguito per $m = -z_1/\sqrt[3]{3}$ è necessariamente positivo, non potendo la funzione annullarsi fuorché per $m = 1$.

2°) $\sqrt[3]{3}/2 < z_1 < 1$. Si ha: $\varphi(0) > 0$, $z_1/\sqrt[3]{3} < 1$, $z_1^2 - 3/4 > 0$, onde le 3 radici di $\varphi(m) = 0$ sono reali; anzi esclusa la radice $m = 1$, le altre 2 sono negative.

3°) $1 < z_1 < \sqrt[3]{3}$. Si ha: $\varphi(0) < 0$, $z_1/\sqrt[3]{3} < 1$, $z_1^2 - 3/4 > 0$, tutte e tre le radici di $\varphi(m) = 0$ reali. Il caso differisce dal precedente perché qui 2 radici reali sono positive e l'altra negativa.

4°) $z_1 \geq \sqrt[3]{3}$. Si ha: $\varphi(0) < 0$, $z_1/\sqrt[3]{3} > 1$, $z_1^2 - 3/4 > 0$: tre radici reali, di cui una maggiore dell'unità.

Si osservi che, in tutti i casi, massimo e minimo relativi valgono:

$$\varphi(z_1/\sqrt[3]{3}) = \mu(z_1)_{\max} = (1 + 2z_1^3/3\sqrt[3]{3} - z_1^2)/2z_1^3 \quad [12a]$$

$$\varphi(-z_1/\sqrt[3]{3}) = \mu(z_1)_{\min} = (1 - 2z_1^3/3\sqrt[3]{3} - z_1^2)/2z_1^3 \quad [12b]$$

Il luogo di massimi (Fig. 3) permetterà la scelta più favorevole delle z_1 , per $z_1 \ll \sqrt{3}$, mentre nell'intorno di $z_1 = \sqrt{3}$ si trovano le situazioni più sfavorevoli,

Per valori di $z_1 \gg \sqrt{3}$ la $\mu(z_1)$ rimane invariata per quanto si aumenti z_1 :

infatti: $\mu(\infty) = 1/3\sqrt{3}$, $\mu(0) = \infty$, $\mu'(z) = (z_1^2 - 3)/6z_1^4$, che si annulla per $z_1 = \sqrt{3}$, è positiva se $z_1 > \sqrt{3}$, negativa se $z_1 < \sqrt{3}$, onde $\mu(z_1)$ decresce tra 0 e $\sqrt{3}$, cresce da $\sqrt{3}$ a $+\infty$, ha un minimo per $z_1 = \sqrt{3}$, per cui: $\mu(\sqrt{3}) = 0$.

c) Posto: $z_1/z_2 = m$,

$$f(0)/f(\infty) = \mu(m, z_1) = 0,5 [1 - z_1^2 / (m^2 + m + 1)]$$

che varia al variare di m , (z_1 , parametro).

Gli estremi valgono: $\psi(0, z_1) = 0,5 (1 - z_1^2)$; $\psi(\infty, z_1) = 0,5$, mentre $\psi'(m) = z_1^2 / (2m + 1)^2 (m^2 + m + 1)^2$, s'annulla se $m = -1/2$, è positiva se $m > -1/2$, negativa se $m < -1/2$, onde per $m = -1/2$, la funzione presenta un minimo relativo che è anche assoluto:

$$\psi_{\min} = (3 - 4z_1^2)/6$$

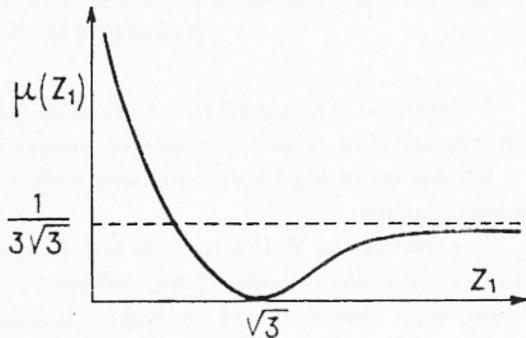


Fig. 3

Ma: $\psi(m) = (m^2 + 1 + z_1^2) / (2(m^2 + m + 1))$, si annulla altresì per $m = 0,5(-1 + \sqrt{4z_1^2 - 3})$, radici reali se $|z_1| \geq \sqrt{3}/2$, ($z_1^2 - 3/4 > 0$), complesse se $|z_1| < \sqrt{3}/2$, ($z_1^2 - 3/4 < 0$). Nel 1° caso si vede subito che si ha: $\psi(-1/2, z_1) \leq 0$, nel 2°, $\psi(-1/2, z_1) > 0$: l'andamento della funzione è del tipo:

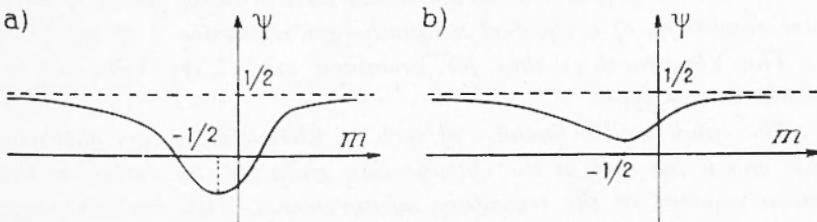


Fig. 4

Si conclude che quest'« Eltranslog Schlumberger » rientra in una categoria già da noi illustrata di geoeltrans ⁽¹⁾ di « medio rendimento » agli effetti indicativi del parametro resistività elettrica.

A parte la nota comune a tutti gli Elmatranslog, di un decorso temporale di misura « tensione trans », in questo procedimento appare particolarmente caratteristico, l'inizio del decorso temporale, funzione ($\neq 0$) del valore di regime, della resistività del mezzo e della geometria del dispositivo tripolare.

Ciò trova stretta analogia con ciò che abbiamo chiamato « prima relazione fondamentale » dei geoeltrans ⁽²⁾, e con un tipo particolare di Matranslog ⁽³⁾, particolarmente da noi illustrato.

Cagliari — Facoltà d'Ingegneria — Novembre 1953.

RIASSUNTO

L'Autore si è proposto il calcolo d'un Eltranslog nelle condizioni quadripolari d'un classico carotaggio resistivo Schlumberger.

Gli Elmatranslog finora esaminati sono a carattere induttivo o galvanico-induttivo.

Il « rendimento indicativo » di tale Eltranslog è ben caratteristico, e s'inserisce nella classifica fatta dell'autore dei « rendimenti medi », dei carotaggi transitori, col vantaggio di una maggior semplicità realizzatrice della corrispondente apparecchiatura.

SUMMARY

The author proposes a calculation of an Eltranslog under quadripolar conditions of a classical Schlumberger resistance well log.

The Elmatranslogs thus far examined are of the inductive or galva-inductive types.

The « indicated behavior » of such an Eltranslog is very characteristic and is inserted in the classification given by the author of the « mean results » of the transitory measurements, with the advantage of greater simplicity of the corresponding apparatus.

BIBLIOGRAFIA

(1) J. KOENIGSBERGER, *Das magnetische Feld einer stromquelle in Raum* (Physik. Zeit. 1927).

A. PETROWSKI, *Bulletin of Practical Geophysics*, Leningrad 1928, n. 4.

S. S. STEFANESCU, *Etudes théoriques sur la prospection du sous-sol*, 1^o partie. Bucuresti 1929.

A. BELLUIGI, *Berechnung des magnetischen Feldes einer störung in elektrisch durch stromtem Boden* 1933. Ergänzt. f. ang. Geoph.

—, *Curve universali per il calcolo delle influenze e.m.* Boll. Uff. Geol. d'Italia 1946.

—, *Campi e.m. dei suoli galvanicamente elettrizzati*. Pubbl. Facoltà d'Ingegneria Mineraria di Cagliari 1946, n. 11.

—, *L'Elettrologia galvanica nei conduttori tridimensionali (suoli)*. Boll. Assoc. Mineraria Sarda, 1948.

(2) A. BELLUIGI, *Fondamenti teorici dei Geoltrans*. Boll. del serv. Geol. d'Italia, 1952, v. LXXIV.

(3) A. BELLUIGI, *Lineamenti teorici di nuovi m. di carotaggio fisico: Matranslog. Phaselog*. Geofisica Pura e Appl., V, 25, 1953.