

# SULLA CURVATURA E TORSIONE DEL CAMPO DI GRAVITA'

ANTONIO MARUSSI

1. — Considerando due punti  $P_1$  e  $P_2$  del campo esteriore di gravità terrestre, abbastanza prossimi fra di loro, ed i due versori (verticali)  $n_1$  ed  $n_2$  diretti verso l'alto che sono tangenti alle linee di forza in  $P_1$  e  $P_2$ , gli assi di tali due versori non saranno, in generale, complanari fra di loro. Quando i due punti giacciono sulla medesima superficie equipotenziale  $\Sigma$ , tale difetto di complanarità si traduce, com'è ben noto, nella presenza della torsione geodetica di  $\Sigma$  nella direzione  $P_1P_2$ ; posto precisamente  $P_2 - P_1 = st$ , con  $t$  vettore unitario, ed  $s$  lunghezza del segmento  $P_1P_2$  che supporremo piccola del primo ordine, si ha dalle formole di Frenet generalizzate

$$\frac{n_2 - n_1}{s} = z_\alpha t + \tau_\alpha b \quad , \quad [1]$$

dove  $b$  è un versore tale che  $(t, b, n)$  formi una terna positiva destrorsa,  $z_\alpha$  è la prima curvatura o flessione della superficie nella direzione  $t$  considerata, e  $\tau_\alpha$  la torsione geodetica di  $\Sigma$  nella stessa direzione. L'indice  $\alpha$  caratterizza poi la direzione  $t$ , per la ragione che apparirà in seguito.

Ma, allo stesso modo, considerando i due punti  $P_1$  e  $P_2$  non più sulla medesima superficie equipotenziale, ma comunque nello spazio, sarà possibile definire quelle che per analogia potremo chiamare ancora *curvatura e torsione del campo di gravità*, nella direzione caratterizzata dal versore  $a$  tale che  $P_2 - P_1 = sa$ .

Sono queste caratteristiche che ci proponiamo di esaminare, mostrando in particolare come la seconda (la torsione) sia pienamente determinata mediante la bilancia di Eötvös di secondo tipo, congiunta con la misura della gravità, e ricercando poi le direzioni di curvatura e di torsione nulla del campo.

2. — Per questo, poniamo

$$a = \sin z \cdot t + \cos z \cdot n \quad , \quad [2]$$

dove  $z$  rappresenta dunque la distanza zenitale di  $a$ , e  $t$  la direzione della sua proiezione su  $\Sigma$ , superficie equipotenziale passante per  $P_1$ .

Per lo spostamento superficiale da  $P_1$  a  $P_2'$ , piede della linea di forza per  $P_2$ , spostamento la cui grandezza è  $s \sin z$ , si ha dalla formula precedente

$$\frac{n'_2 - n_1}{s \sin z} = \kappa_\alpha t + \tau_\alpha b \quad ; \quad [3]$$

nel mentre per lo spostamento lungo la linea di forza, la cui grandezza è  $s \cos z$ , si ha per cose ben note

$$\frac{\bar{n}_2 - \bar{n}'_2}{s \cos z} = \text{grad}_\Sigma \log g = f B \quad , \quad [4]$$

ove  $f$  è la curvatura (essenzialmente positiva) della linea di forza, e  $B$  la sua normale principale;  $f$  rappresenta ovviamente anche il modulo della componente orizzontale del gradiente logaritmico della gravità.

Scomponendo  $B$  secondo  $t$  e  $b$  si ha poi

$$B = \cos \psi \cdot t + \sin \psi \cdot b \quad [5]$$

ed in definitiva, sommando le [3] e [4]

$$\frac{n_2 - n_1}{s} = (\kappa_\alpha \sin z + f \cos z \cos \psi) t + (\tau_\alpha \sin z + f \cos z \sin \psi) b \quad [6]$$

Definiamo dunque per analogia come *curvatura*  $C_a$  e *torsione*  $T_a$  del campo della direzione  $a$  le:

$$\begin{aligned} C_a &= \kappa_\alpha \sin z + f \cos z \cos \psi \\ T_a &= \tau_\alpha \sin z + f \cos z \sin \psi \end{aligned} \quad [7]$$

Ma a queste formule si può dare altra forma più espressiva, facendo apparire solo elementi assoluti. Indicata precisamente con  $\alpha$  l'anomalia di  $t$  rispetto a  $c_1$ ,  $c_1$  essendo la direzione principale di curvatura  $\kappa_1$ , si ha per la formula di Eulero

$$\kappa_\alpha = \kappa_1 \cos^2 \alpha + \kappa_2 \sin^2 \alpha \quad ; \quad [8]$$

e poi

$$\begin{aligned} \tau_\alpha &= \frac{\sin 2 \alpha}{2} (\kappa_2 - \kappa_1) \\ \psi &= \vartheta - \alpha \end{aligned} \quad [9]$$

$\vartheta$  essendo l'angolo orizzontale fra  $B$  e  $c_1$ . E dunque

$$\begin{aligned} C_a &= (x_1 \cos^2 \alpha + x_2 \sin^2 \alpha) \sin z + f \cos z \cos (\vartheta - \alpha) \\ T_a &= \frac{\sin 2\alpha \sin z}{2} (x_2 - x_1) + f \cos z \sin (\vartheta - \alpha). \end{aligned} \quad [10]$$

Sono queste le espressioni cercate.

3. — Ci si può ora chiedere: esistono direzioni nello spazio secondo le quali la curvatura del campo è nulla? oppure secondo le quali la torsione è nulla? od infine direzioni secondo le quali la torsione e la curvatura sono entrambi nulle?

Rispondendo alla prima domanda, e ponendo  $C_a = 0$ , si ha l'equazione

$$\operatorname{tg} z = \frac{-f \cos (\vartheta - \alpha)}{x_1 \cos^2 \alpha + x_2 \sin^2 \alpha}, \quad [11]$$

che rappresenta un sistema  $\infty^1$  di direzioni. Queste tagliano, sulla sfera rappresentatrice, una curva, del cui aspetto ci possiamo rendere subito conto osservando intanto che il minimo valore del denominatore è uguale al minore  $x$  fra  $x_1$  e  $x_2$ ; ed il massimo valore del numeratore è uguale ad  $f$ . Dunque la tangente di  $z$  si mantiene sempre inferiore al rapporto  $\frac{f}{x}$  e cioè, se si vuole, al rapporto fra il raggio massimo di curvatura della superficie equipotenziale, ed il raggio di prima curvatura della linea di forza. Tale rapporto è normalmente assai piccolo; per il campo normale a  $45^\circ$ , esso vale circa 0,0053; e dunque, in questo caso, la distanza zenitale della linea di curvatura nulla si mantiene inferiore a  $18'$ .

Annullandosi  $z$ ,  $\alpha$  tende a  $\vartheta \pm 90^\circ$ ; e cioè la curva ammette in  $z = 0$  una tangente di anomalia  $\vartheta \pm 90^\circ$ , perpendicolare dunque alla componente orizzontale del gradiente della gravità. Anche la curva si trova tutta da una parte di questa tangente, e precisamente dalla parte opposta a quella verso la quale tale componente è rivolta. Nel caso particolare in cui  $x_1 = x_2$ , l'equazione rappresenta, sul piano tangente alla sfera delle direzioni nello zenit, un piccolo cerchio (vedi le figure che illustrano tre casi distinti, dove le dimensioni della curva sono state fortemente esagerate).

4. — Le direzioni di torsione nulla si ottengono poi dall'equazione

$$T_a = - (x_1 - x_2) \sin \alpha \cos \alpha \sin z + f \cos z \sin (\vartheta - \alpha) = 0; \quad [12]$$

Le tre figure rappresentano, in proiezione stereografica zenitale, i luoghi di curvatura nulla (linea tratteggiata) e quelli di torsione nulla (linea continua) del campo di gravità, tracciati sulla sfera unitaria delle direzioni. Il cerchio esterno rappresenta l'orizzonte;  $Z$  lo zenit,  $c_1$  e  $c_2$  rappresentano le direzioni principali di curvatura della superficie equipotenziale. Le dimensioni dei luoghi di curvatura nulla sono fortemente esagerate.

*Fig. 1* - Latitudine  $45^\circ$ ; caso normale.  $\vartheta = 0$ ;  $\alpha_1 = 157,1$ ;  $f = 0,83$ ;  
 $\alpha_1 - \alpha_2 = 0,53$ ;  $\frac{f}{\alpha_1 - \alpha_2} = 1,566$

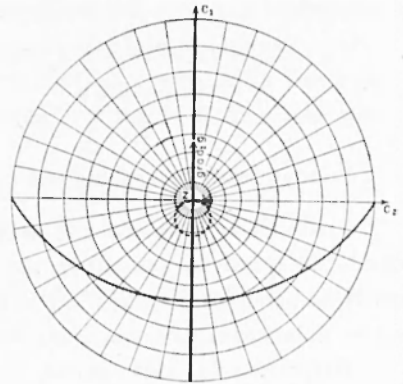


Fig. 1

*Fig. 2* - Latitudine  $45^\circ$ ;  $\vartheta = 10^\circ$ ;  
 $\alpha_1 = 157,1$ ;  $f = 1,06$ ;  $\alpha_1 - \alpha_2 = 0,53$ ;  
 $\frac{f}{\alpha_1 - \alpha_2} = 2,00$

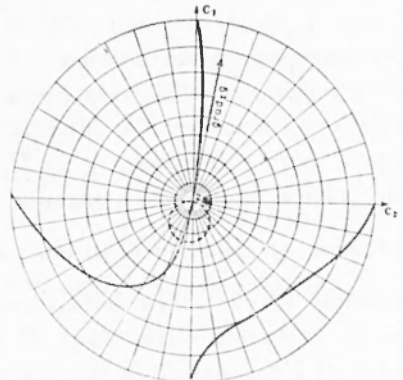


Fig. 2

*Fig. 3* - Latitudine  $45^\circ$ ;  $\vartheta = 45^\circ$ ;  
 $\alpha_1 = 157,1$ ;  $f = 1,06$ ;  $\alpha_1 - \alpha_2 = 0,53$ ;  
 $\frac{f}{\alpha_1 - \alpha_2} = 2,00$

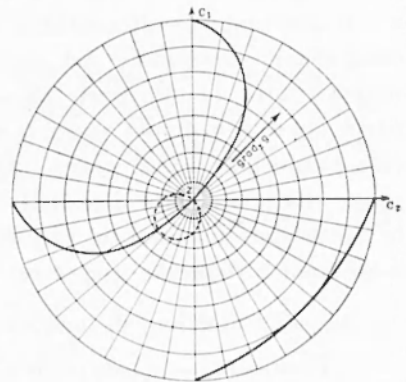


Fig. 3

tolti i casi  $\vartheta = 0$ ,  $\vartheta = 90^\circ$ , oppure  $z_1 = z_2$ , che saranno esaminati a parte, questa ci dà:

$$\operatorname{tg} z = \frac{f}{z_1 - z_2} \left( \frac{\sin \vartheta}{\sin \alpha} - \frac{\cos \vartheta}{\cos \alpha} \right). \quad [13]$$

Per  $\vartheta = 0$ ,  $\vartheta = 90^\circ$ ,  $z_1 = z_2$ , si hanno invece le soluzioni:

$$\text{per } \vartheta = 0: \quad \alpha = 0 \quad , \quad \operatorname{tg} z = \frac{f}{(z_1 - z_2) \cos \alpha}$$

$$\text{per } \vartheta = 90^\circ: \quad \alpha = 90^\circ \quad , \quad \operatorname{tg} z = \frac{f}{(z_1 - z_2) \sin \alpha}$$

$$\text{per } z_1 = z_2 \quad \alpha = \vartheta \quad , \quad z = 90^\circ$$

che rappresentano: la prima, il piano verticale contenente  $c_1$  ed il piano ad esso normale che forma con l'orizzonte un angolo la cui tangente è uguale a  $\frac{z_1 - z_2}{f}$  (vedi fig. 1 che raffigura il caso normale a  $45^\circ$  di latitudine: qui  $f = 0,830$ ,  $z_1 - z_2 = 0,530$ ;  $\frac{z_1 - z_2}{f} = 0,639$ , le curvature essendo misurate in  $10^{-6} \text{ km}^{-1}$ ); la seconda, il piano verticale contenente  $c_1$  ed il piano ad esso perpendicolare inclinato come si è visto sopra; la terza infine, l'orizzonte ed il piano verticale che contiene la componente orizzontale del gradiente gravimetrico.

Nel caso generale sintetizzato dalla [13], la curva sferica rappresentatrice ha l'aspetto raffigurato in proiezione stereografica (limitatamente alla metà superiore della sfera rappresentatrice) nelle figg. 2 e 3, dove sono altresì riportati i parametri adottati. Il ramo della curva che passa per lo zenit, ha qui come tangente il verticale di anomalia  $\vartheta$ , come subito si vede.

5. — Rispondendo alla terza domanda, e tolto il caso singolare dello zenit, nel quale curvatura e torsione perdono significato, appare che una sola direzione è simultaneamente di torsione e di curvatura entrambi nulle; lungo questa direzione le verticali si mantengono dunque parallele fra di loro, ed essa rappresenta perciò la linea *isozenitale*. Questa può anche ottenersi uguagliando le [11] e [13]; ciò che fornisce

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \vartheta}{\operatorname{tg} \alpha} = (z_1 - z_2) \frac{1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \vartheta}{z_1 + z_2 \operatorname{tg}^2 \alpha} \quad [14]$$

equazione che si soddisfa ponendo

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\kappa_1}{\kappa_2} \operatorname{tg} \vartheta . \quad [15]$$

Questa fornisce dunque l'anomalia della linea isozenitale.

6. — Per quanto concerne l'effettiva determinazione della curvatura e della torsione del campo di gravità, che possono essere prospettate sia da un punto di vista regionale, sia da un punto di vista locale, i metodi astronomico-geodetici rispondono, almeno teoricamente, al primo punto di vista; e quelli basati sull'impiego della bilancia di torsione, al secondo. Occorre però osservare subito che, nel mentre la bilancia di Eötvös del secondo tipo, integrata con la determinazione della gravità, definisce pienamente la torsione del campo, non così accade per la curvatura, a meno di ricorrere a ben noti procedimenti di integrazione.

Nel metodo astronomico-geodetico, determinate  $n_1$  ed  $n_2$  in  $P_1$  e  $P_2$  mediante misure astronomiche di latitudine e di longitudine, l'azimut astronomico  $A$  e la distanza zenitale  $z$  di  $P_2$  sull'orizzonte di  $P_1$ , e la distanza reale  $s$  fra i due punti (cosa quest'ultima che si può ottenere con grande approssimazione dalle triangolazioni o, con tutto rigore, mediante il geodimetro), sarà noto il valore « regionale »  $C_a$  e  $T_a$  della curvatura e della torsione nella direzione  $A$  considerata; posto allora

$$A = a + v \quad ; \quad \chi = \vartheta + v \quad [16]$$

con che  $v$  e  $\chi$  sono rispettivamente gli azimut astronomici della direzione di curvatura  $\kappa_1$ , e del gradiente superficiale della gravità, si hanno le due equazioni

$$\begin{aligned} C_a &= [\kappa_1 \cos^2 (A - v) + \kappa_2 \sin^2 (A - v)] \sin z + f \cos z \cos (\chi - A) \\ T_a &= \frac{\sin 2 (A - v) \sin z}{2} (\kappa_2 - \kappa_1) + f \cos z \sin (\chi - A) \quad [17] \end{aligned}$$

nelle 5 incognite  $\kappa_1$ ,  $\kappa_2$ ,  $f$ ,  $v$ ,  $\chi$ ; onde tre osservazioni di questo tipo opportunamente scelte, fatte intorno al punto  $P_1$ , consentono teoricamente di determinare tutte le incognite cercate.

Per quanto si riferisce poi alla determinazione locale mediante la bilancia di Eötvös, basta riflettere che le indicazioni di questo strumento sono dovute alla non complanarità delle linee di azione della gravità agli estremi del bilanciario; e precisamente il momento tor-

cente rispetto alla verticale è dato, in una bilancia ideale formata da due masse  $m$  uguali puntiformi disposte secondo il versore  $a$  più volte considerato, collocate ad una distanza  $a$ , da

$$M_a = m a^2 g T_a \sin z . \quad [18]$$

Nota adunque  $g$ , e misurato il momento con i consueti procedimenti strumentali, rimane pienamente determinato  $T_a$ ; quattro osservazioni (alle quali se ne deve aggiungere, come ben noto, per ragioni strumentali una quinta) determinano perciò le quantità  $\alpha_2 - \alpha_1$ ,  $f$ ,  $v$  e  $\gamma$ , e con esse la torsione del campo in una direzione qualunque; e quindi anche il luogo delle direzioni di torsione nulla considerato in principio.

*Trieste — Istituto di Topografia e Geodesia dell'Univ. — Giugno 1952.*

### RIASSUNTO

*Partendo dalle analoghe entità sulle superfici, si generalizza per il campo di gravità terrestre la nozione di curvatura e di torsione; si studiano in particolare i luoghi di curvatura e di torsione nulla, e si mostra in qual modo si possano determinare mediante misure astronomico-geodetiche o mediante la bilancia di Eötvös del secondo tipo queste quantità.*

### SUMMARY

*The definitions of curvature and torsion are extended to the gravity field of the Earth; the loci of null curvature and torsion are sought; the theoretical possibility of determining the quantities so defined by means of astronomico-geodetic observations or by the Eötvös balance of the second kind is shown.*