

SULLE OSCILLAZIONI LIBERE DEL LAGO DI ALBANO

P. CALOI - M. GIORGI

M. Giorgi ⁽¹⁾ ha fatto la determinazione degli elementi fondamentali delle sesse del lago di Albano, applicando al medesimo i metodi di Hidaka e di Defant.

La curva normale del lago (fig. 1) consente però l'applicazione di uno dei metodi di Chrystal, esposto ed esteso da Caloi ad alcuni laghi italiani ⁽²⁻³⁻⁴⁾.

La curva normale del lago di Albano può infatti essere schematizzata come da fig. 2.

1. *Vediamo come il problema può essere risolto analiticamente.* — Riferiamo la curva normale ad un sistema di assi cartesiani con origine in O_1 , essendo verso A_1 il senso positivo delle ascisse e verso M quello delle ordinate.

Se facciamo

$$O_1 A_1 = a_1, \quad O_1 A_2 = a_2, \quad O_1 M = h, \quad O_1 P = p, \quad O_1 Q = q,$$

le equazioni delle rette 1 e 2 divengono

$$h_1(\bar{x}) = h \left(1 - \frac{x}{a_1} \right), \quad h_2(x) = h \left(1 + \frac{x}{a_2} \right).$$

Poniamo

$$\left. \begin{aligned} \omega_1 &= \frac{2n a_1}{\sqrt{gh}} \sqrt{1 - \frac{x}{a_1}}, \quad \alpha_1 = \frac{2a_1}{\sqrt{gh}}, \quad \beta_1 = \frac{2a_1}{\sqrt{gh}} \sqrt{1 - \frac{p}{a_1}} \\ \omega_2 &= \frac{2n a_2}{\sqrt{gh}} \sqrt{1 + \frac{x}{a_2}}, \quad \alpha_2 = \frac{2a_2}{\sqrt{gh}}, \quad \beta_2 = \frac{2a_2}{\sqrt{gh}} \sqrt{1 - \frac{q}{a_2}} \end{aligned} \right\} [1]$$

Si ha [2]

$$\left. \begin{aligned} \zeta_1 \omega_1 &= \left\{ A_1 J_1(\omega_1) + B_1 Y_1(\omega_1) \right\} \sin n(t - \tau) \\ \zeta_1 &= \frac{h}{2a_1} \left\{ A_1 J_0(\omega_1) + B_1 Y_0(\omega_1) \right\} \sin n(t - \tau) \\ \zeta_2 \omega_2 &= \left\{ A_2 J_1(\omega_2) + B_2 Y_1(\omega_2) \right\} \sin n(t - \tau) \\ \zeta_2 &= -\frac{h}{2a_2} \left\{ A_2 J_0(\omega_2) + B_2 Y_0(\omega_2) \right\} \sin n(t - \tau), \end{aligned} \right\} [2]$$

dove J e Y sono simboli di funzioni di Bessel e di Neumann rispettivamente.

Nelle [2] sono da determinare le costanti A_1, B_1, A_2, B_2, n valendosi delle condizioni ai limiti. Delle prime quattro, consideriamo i rapporti A/B .

Le condizioni ai limiti cui debbono soddisfare le [2] conseguono

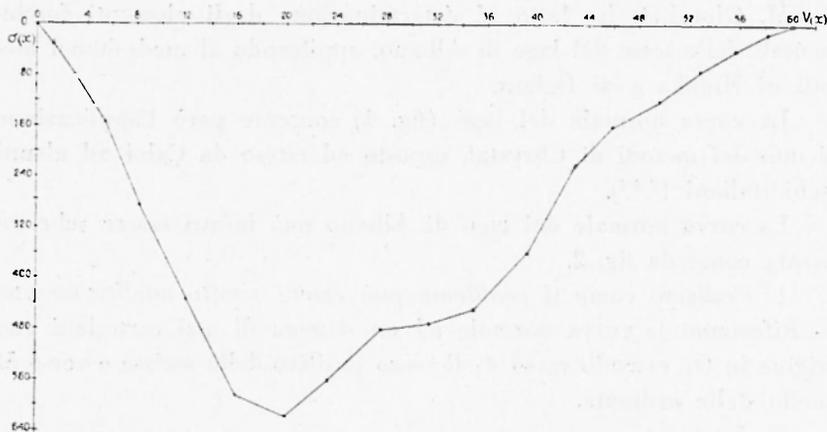


Fig. 1

dall'annullarsi di ξ agli estremi P e Q del lago e dalla legge di continuità. Si ha:

$$\left. \begin{aligned} x=p, \quad \xi_1=0; \quad x=-q, \quad \xi_2=0 \\ x=0, \quad \xi_1=\xi_2, \quad \zeta_1=\zeta_2, \quad \omega_1=n\alpha_1, \quad \omega_2=n\alpha_2. \end{aligned} \right\} \quad [3]$$

Per le prime delle [3], consegue dalle [2] — e per le [1] —

$$A_1 J_1(n\beta_1) + B_1 Y_1(n\beta_1) = 0 \quad \frac{B_1}{A_1} = -\frac{J_1(n\beta_1)}{Y_1(n\beta_1)} \quad [4]$$

$$A_2 J_1(n\beta_2) + B_2 Y_1(n\beta_2) = 0 \quad \frac{B_2}{A_2} = -\frac{J_1(n\beta_2)}{Y_1(n\beta_2)} \quad [5]$$

Per $x=0$,

$$\omega_1 = n\alpha_1, \quad \omega_2 = n\alpha_2.$$

Per una proprietà delle funzioni di Bessel

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{J_1(\omega)}{Y_1(\omega)} = 0. \quad [6]$$

Ora, per $p \rightarrow a_1$, $q \rightarrow a_2$, $n\beta_1 \rightarrow 0$, $n\beta_2 \rightarrow 0$; quindi, dalle [4], [5] e per le [6]:

$$B_1 = B_2 = 0.$$

Avremo pertanto

$$\left. \begin{aligned} \xi_1 \omega_1 &= A_1 J_1(\omega_1) \sin n(t-\tau) \\ \zeta_1 &= \frac{h}{2a_1} A_1 J_0(\omega_1) \sin n(t-\tau) \\ \xi_2 \omega_2 &= A_2 J_1(\omega_2) \sin n(t-\tau) \\ \zeta_2 &= -\frac{h}{2a_2} A_2 J_0(\omega_2) \sin n(t-\tau) \end{aligned} \right\} [7]$$

Per il secondo gruppo delle [3], consegue dalle [7]

$$\left. \begin{aligned} \frac{A_1}{a_1} J_1(n\alpha_1) - \frac{A_2}{a_2} J_1(n\alpha_2) &= 0 \\ \frac{A_1}{a_1} J_0(n\alpha_1) + \frac{A_2}{a_2} J_0(n\alpha_2) &= 0 \end{aligned} \right\} [7']$$

L'eliminazione di A_1 , A_2 comporta l'annullarsi del determinante dei coefficienti

$$\begin{vmatrix} J_1(n\alpha_1) & -J_1(n\alpha_2) \\ J_0(n\alpha_1) & J_0(n\alpha_2) \end{vmatrix} = 0.$$

L'equazione dei periodi è quindi

$$J_1(n\alpha_1) J_0(n\alpha_2) + J_0(n\alpha_1) J_1(n\alpha_2) = 0 \quad [8]$$

Dalla [7'] si deduce

$$A_2 = A_1 \cdot \frac{a_2}{a_1} \cdot \frac{J_1(n\alpha_1)}{J_1(n\alpha_2)}$$

(§) La [8] poteva dedursi direttamente da un caso più complesso trattato da Caloi, studiando le sesse del lago di Levico (5). Riferiamoci alla [13] di quel lavoro e osserviamo che per $n\alpha_3 \rightarrow 0$ è $J_0(n\alpha_3) = 1$, $J_1(n\alpha_3) = 0$. Quella equazione diviene allora

$$\frac{a_1 h_2}{a_3 h_1} \left\{ J_1(n\alpha_1) J_0(n\alpha_2) + J_0(n\alpha_1) J_1(n\alpha_2) - J_1(n\alpha_1) \frac{J_1(n\beta_1)}{Y_1(n\beta_1)} Y_0(n\alpha_2) - \right. \\ \left. - J_0(n\alpha_1) \frac{J_1(n\beta_2)}{Y_1(n\beta_2)} Y_1(n\alpha_2) \right\} = 0. *$$

Ma per $n\beta_2 \rightarrow 0$ è $\lim J_1(n\beta_2)/Y_1(n\beta_2) = 0$; la (*) quindi viene a coincidere con la [8].

Posto $C = \frac{A_1}{a_1} J_1(n\alpha_1)$, avremo

$$\left. \begin{aligned} \xi_1(\omega_1) &= C a_1 \frac{J_1(\omega_1)}{J_1(n\alpha_1)} \sin n(t-\tau) \\ \zeta_1 &= \frac{Ch}{2} \frac{J_0(\omega_1)}{J_1(n\alpha_1)} \sin n(t-\tau) \\ \xi_2(\omega_2) &= C a_2 \frac{J_1(\omega_2)}{J_1(n\alpha_2)} \sin n(t-\tau) \\ \zeta_2 &= -C \frac{h}{2} \frac{J_0(\omega_2)}{J_1(n\alpha_2)} \sin n(t-\tau) \end{aligned} \right\} [9]$$

Per ogni periodo $T = \frac{2\pi}{n}$ tratto dalla [8], la [9] dà l'andamento degli spostamenti orizzontali e verticali.

I punti di zero della funzione $J_0(\omega)$ danno la posizione dei nodi per ogni periodo d'oscillazione. Si ottengono i nodi nel tratto $0_1 A_1$,

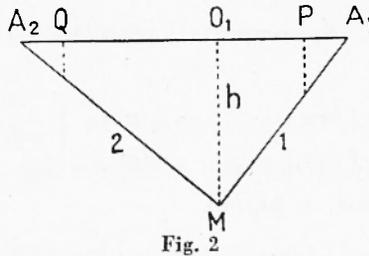


Fig. 2

rispettivamente $0_1 A_2$, mediante le radici dell'equazione $J_0(\omega) = 0$, che siano minori di $n\alpha_1$, rispettivamente di $n\alpha_2$.

2. *Applichiamo la teoria esposta al lago di Albano.* — Con i dati che hanno consentito di costruire la curva normale, si sono ottenute le equazioni delle rette 1 e 2. L'intersezione di 1 e 2 (punto M) è risultato di coordinate

$$X = 179,418 \cdot 10^4 \text{ m}^2$$

$$Y = 64090,5 \cdot 10^4 \text{ m}^3.$$

Avremo pertanto

$$a_1 = 179,4 \cdot 10^4 \text{ m}^2 ; a_1 = 428,1 \cdot 10^4 \text{ m}^2 ; h = 64090,5 \cdot 10^4 \text{ m}^3$$

$$\alpha_1 = 45,25 \text{ sec} ; \alpha_2 = 107,98 \text{ sec} .$$

Periodi. Le prime tre soluzioni della [8] corrispondono, con grande approssimazione, a $n = 0,02936$; $n = 0,0515016$; $n = 0,0714$. Avremo quindi per i periodi dell'uni-, bi- e trinodale i valori

$$T_1 = 214^s, \quad T_2 = 122^s, \quad T_3 = 88^s.$$

Nodi. Dalla 1^a delle [1] risulta

$$x = a_1 \left[1 - \left(\frac{\omega_1 T}{2\pi a_1} \right)^2 \right]$$

I valori di a_1 e a_1 , figurano le [10]; per cui, per i nodi nel tratto $O_1 A_1$, avremo

$$x = 179,4 \left[1 - \left(\frac{\omega_1 T}{284,3} \right)^2 \right] \quad [11]$$

dove ω_1 è il valore che annulla $J_0(\omega_1)$, tale che risulti — come si ha dalla [1] — $\omega_1 < n a_1$.

Sempre dalle [1], si ha, per il tratto $O_1 A_2$,

$$x = -a_2 \left[1 - \left(\frac{\omega_2 T}{2\pi a_2} \right)^2 \right].$$

Per i valori di a_2 e a_2 dati dalle [10], la formula relativa ai nodi nel tratto $O_1 A_2$ diviene

$$x = -428,1 \left[1 - \left(\frac{\omega_2 T}{678,5} \right)^2 \right], \quad [12]$$

dove ω_2 sono radici dell'equazione $J_0(\omega_2) = 0$, che soddisfano alla condizione $\omega_2 < n a_2$.

Per l'uninodale è

$$n a_1 = 1,329.$$

Le prime radici dell'equazione $J_0(\omega) = 0$ sono

$$2,4048; \quad 5,5201; \quad 8,6537; \quad 11,7915; \quad \text{ecc.}$$

Poiché nessuna di tali radici è minore di $n a_1$, ne segue che l'uninodo non è tratto $O_1 A_2$.

Sempre per l'uninodo si ha

$$n a_2 = 3,170;$$

l'uninodo risulta quindi nel tratto $O_1 A_2$, poiché $2,4048 < n a_2$.

Poniamo nella [12] $\omega_2 = 2,4048$; poiché $T_1 = 214$ sec, otterremo $x = -181,81 \cdot 10^4 \text{ m}^2$.

L'ascissa dell'uninodo vale pertanto

$$V(x_1) = 361,23 \cdot 10^4 \text{ m}^2$$

L'uninodo cade quindi tra le sezioni 11^a e 12^a e dista dall'origine (lato Monte Cavo) m 2009.

Per i binodi si ha: $na_1 = 2,330$; $na_2 = 5,561$. Nessun binodo si ha quindi nel tratto $O_1 A_1$.

Posto nella [12] $T_2 = 122^s$ e $\omega_2 = 5,5201$ e $\omega_2 = 2,4048$ rispettivamente, si trova che i due binodi hanno ascisse

$$V(x_2^I) = 185,73 \cdot 10^4 ; V(x_2^{II}) = 527,48 \cdot 10^4$$

e distano m 1191 e 2850 rispettivamente dall'estremo origine.

Per i trinodi è $na_1 = 3,231$, $na_2 = 7,71$: uno dei nodi è quindi nel tratto $O_1 A_1$, gli altri due cadono nel tratto $O_1 A_2$.

Fatto nella [11] $\omega_1 = 2,4048$, essendo $T_3 = 88^s$, si trova che il primo trinodo cade tra la 3^a e la 4^a sezione, avendo un'ascissa

$$V(x_3^I) = 80,00 \cdot 10^4 \text{ m}^2 ,$$

e dista dall'estremo origine

$$x_3^I = \text{m } 703 .$$

La posizione degli altri due trinodi si ottiene con la [12], facendo in essa $T_3 = 88^s$ e $\omega_2 = 5,5201$; $\omega_2 = 2,4048$ rispettivamente. Si trova così che il trinodo medio e il terzo trinodo hanno le ascisse $388,08 \cdot 10^4 \text{ m}^2$ e distano dall'estremo origine m 2125 e m 3097 rispettivamente.

Andamento degli spostamenti verticali. — L'andamento delle ampiezze in senso verticale si determina applicando la 2^a e la 4^a delle [9]. La continuità degli spostamenti nel passaggio dal tratto $A_1 O_1$, al tratto $O_1 A_2$ si assicura moltiplicando i coefficienti delle relazioni nominate per $J_1(na_1)$. Ecco i risultati.

Per la sessa *uninodale*:

Sezioni	0	1	2	3	4	5	6	6 bis	7	8
Spostamenti relativi	1,00	0,968	0,925	0,870	0,808	0,724	0,645	0,605	0,492	
Sezioni	8	9	10	11	uninodo	12	13	14	15	16
Spostamenti relativi	0,415	0,305	0,182	0,041	00	-0,144	-0,344	-0,527	-0,760	-1,041
Sezioni	17	18	19	20						
Spostamenti relativi	-1,234	-1,453	-1,604	-1,692						

Per la sessa *binodale*:

Sezioni	0	1	2	3	4	5	6	6bis bin	7	8	
Spostamenti relativi	1	0,903	0,779	0,626	0,470	0,275	0,113	0,039	0	-0,049	-0,181

Sezioni	9	10	11	12	13	14	15	2 binodo	16	17	18	
Spost. rel.	-0.336	-0.468	-0.571	-0.634	-0.615	-0.524	-0.310	0	-0.024	0.453	0.945	
Sezioni		19	20									
Spostamenti relativi		1,336	1,583.									

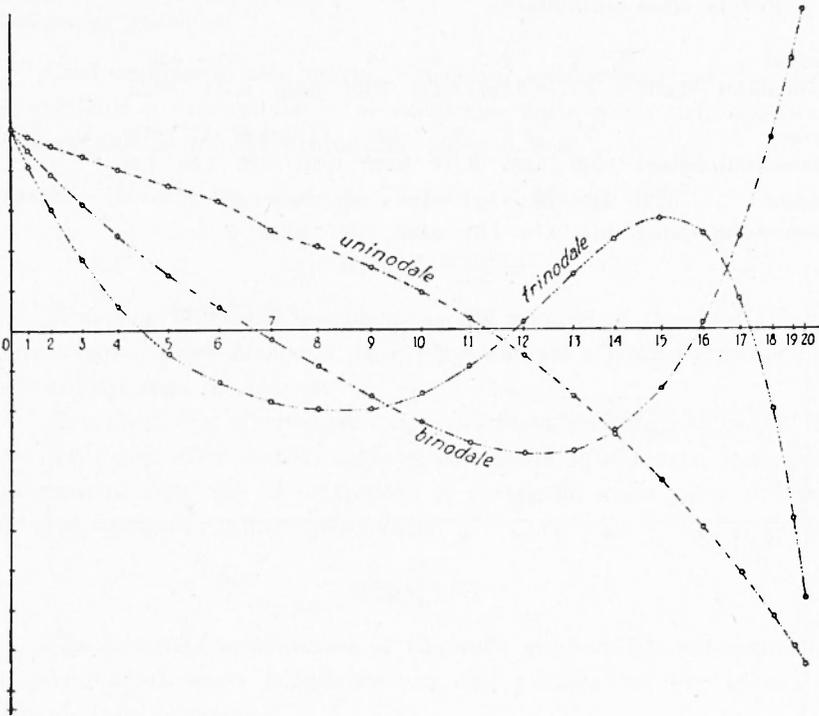


Fig. 3

Per la sessa *trinodale*:

Sezioni	0	1	2	3	4	1° trinodo	5	6	6 bis	7	8	9	
Spost. rel. 1	9.818	0.597	0.348	0.120	0	-0.1205	-0.274	-0.328	-0.356	-0.401	-0.396		
Sezioni		10	11	2° trin.	12	13	14	15	16	17	3° trin.	18	19
Spost. rel.		-0.325	-0.190	0	0.028	0.263	0.436	0.544	0.465	0.147	0	-0.412	-0.965
Sezioni			20										
Spost. rel.			-1.357.										

Le figg. 3, 4 danno la rappresentazione grafica dei valori ottenuti.

Andamento degli spostamenti orizzontali. — L'andamento delle ampiezze in senso orizzontale si determina applicando la 1ª e la 3ª

delle [9], con un procedimento analogo a quello seguito per l'andamento degli spostamenti in senso verticale.

Si ottengono i seguenti valori:

Per la sessa *uninodale*:

Sezioni	0	1	2	3	4	5	6	6 bis
Spostamenti relativi	0	0.177	0.266	0.343	0.405	0.168	0.511	0.528
Sezioni	7	8	9	10	11	uninoda	12	13
Spostamenti relativi	0.585	0.685	0.799	0.898	0.983	1.00	1.06	1.11
Sezioni	14	15	16	17	18	19	20	
Spostamenti relativi	1.12	1.10	1.03	0.898	0.687	0.432	0	

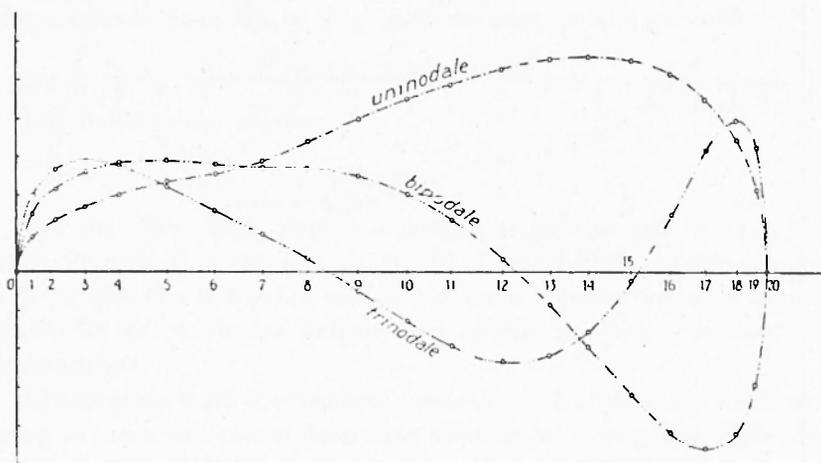


Fig. 4

Per la *binodale*:

Sezioni	0	1	2	3	4	5	6	
Spostamenti relativi	0	0.300	0.430	0.520	0.567	0.581	0.557	
Sezioni	6 bis	1 binodo	7	8	9	10	11	12
Spostamenti relativi	0.534	0.539	0.545	0.543	0.497	0.407	0.273	0.067
Sezioni	13	14	15	2 binodo	16	17	18	19
Spostamenti relativi	-0.171	-0.386	-0.637	-0.822	-0.832	-0.920	-0.841	-0.587
Sezioni	20							
Spostamenti relativi	0							

Per la *trinodale*:

Sezioni	0	1	2	3	4	1 trinodo	5	6
Spostamenti relativi	0	0.396	0.531	0.581	0.558	0.519	0.456	0.323

Sezioni	6 bis	7	8	9	10	11	II trinodo	12
Spostamenti relativi	0.249	0.196	0.071	-0.095	-0.254	-0.385	-0.462	-0.466
Sezioni	13	14	15	16	17	III trinodo	18	19
Spostamenti relativi	-0.436	-0.312	-0.047	0.301	0.629	0.705	0.789	0.645
Sezioni	20							
Spostamenti relativi	0.							

Conformemente alla teoria, i massimi spostamenti nei due sensi — verticale e orizzontale — si verificano nella parte del lago, dove si osservano le minori profondità (figg. 3 e 4).

Roma — Istituto Nazionale di Geofisica — Maggio 1952.

RIASSUNTO

Si espone la pratica applicazione del metodo di Chrystal alla determinazione degli elementi fisici (spostamenti e periodi) relativi alle sesse del lago di Albano.

I risultati che si ottengono sono in buon accordo con quelli determinati con altri metodi e, conformemente alla teoria, i massimi spostamenti verticali ed orizzontali si verificano nella parte del lago dove si osservano minori profondità.

SUMMARY

The practical application of Crystal's method for determination of physical elements (displacements and periods) of the seiches of Albano lake is exposed.

The results which have been obtained agree enough with those determined by other methods and according to the theory highest vertical and horizontal amplitudes occur where smaller depths are observed.

BIBLIOGRAFIA

(1) GIORGI M., *Studio delle sesse del lago di Albano*. Annali di Geofisica, vol. I, 3 (1948).

(2) CALOI P., *Le sesse del lago di Garda*. Parte II. Annali di Geofisica, I, 2 (1948).

(3) CALOI P., *Sui periodi di oscillazione libera del Verbano*. Annali di Geofisica, I, 3 (1948).

(4) CALOI P., DI FILIPPO D. e SPADEA M. C., *Ulteriore studio sulle oscillazioni libere del lago di Scanno*. Annali di Geofisica, V, 1 (1952).

(5) CALOI P., *Oscillazioni libere del lago di Levico*. Annali di Geofisica, IV, 2 (1951).