REGISTRAZIONE DELLE ONDE LONGITUDINALI DI BREVE PERIODO

Renato Cialdea

Un'onda longitudinale provoca una condensazione del mezzo attraverso il quale essa si propaga. Tale condensazione può essere rivelata con un apparato suggerito da Benioff [1] nel caso particolare delle onde sismiche longitudinali. Esso consiste in una cavità sferica ricavata in un terreno, preferibilmente roccioso (fig. 1). Detta cavità comunica con l'atmosfera per mezzo di un tubo T anche esso ripieno in parte di liquido. Un piccolo capillare mantiene costante il livello del liquido e fa sì che non si risentano le variazioni lente di volume, causate da variazioni di temperatura o di pressione atmosferica. Un'onda longitudinale incidente fa variare il volume della sfera e quindi produce uno spostamento del livello del liquido nel tubo. Sia

$$s = a \operatorname{sen} \omega\left(t - \frac{x}{c}\right) \qquad [1]$$

l'equazione dell'onda longitudinale riferita al centro della sfera (c è la velocità di propagazione delle onde longitudinali nel terreno): il livello del liquido nel tubo T si sposterà allora di

$$h = \frac{V_0}{Ac}\, \omega\, a \cos \omega t \qquad [2]$$

dove V_0 è il volume della sfera ed A la sezione del tubo. Questa formula è stata stabilita da Benioff partendo dalla variazione di volume

$$\Delta V = - \int_{V_0} \sigma \, d V \qquad [3]$$

dove σ è la condensazione dovuta all'onda incidente definita da $\sigma = - \frac{\partial s}{\partial x}$, e facendo la seguente ipotesi:

a) la vibrazione longitudinale incidente ha una lunghezza di onda molto più grande del raggio della sfera: questa ipotesi è quasi

---

[1] Benioff H., Bull. of the Seismological Soc. of. Am. - 1935, 25, pag. 307.

sempre verificata nel caso delle onde sismiche ordinarie, che hanno in generale una lunghezza d'onda molto grande.

Ma evidentemente Benioff, nel suo calcolo, suppose inoltre:

b) l'impedenza meccanica dell'apparato è trascurabile;

c) l'oscillazione delle diverse porzioni della superficie di separazione tra il terreno ed il liquido è identica punto per punto alla oscillazione incidente per ampiezza e fase.

Vediamo anzitutto come influisca l'impedenza meccanica sullo spostamento del livello del liquido nel tubo T, sempre supponendo valide le ipotesi *a*) e *c*): appunto in base a tali ipotesi, il calcolo è molto semplificato, giacché la variazione di pressione, dovuta alla vibrazione incidente, si può ritenere costante, istante per istante, in tutti i punti della sfera. Si ha infatti per questa variazione di pressione

$$\Delta P = \varepsilon\,\sigma \qquad [4]$$

dove ε è il modulo di compressibilità del liquido; ora, se si suppone la lunghezza d'onda della vibrazione incidente molto più grande del raggio della sfera, si può ritenere σ e quindi anche ΔP, costante per ogni punto della sfera, istante per istante.

Si consideri ora (fig. 1) la sfera di raggio R, il tubo T di sezione A, riempito di liquido fino all'altezza l e sia h lo spostamento del livello riferito alla sua posizione di equilibrio. Dalla ben nota relazione di elasticità

$$\Delta P = -\,\varepsilon\,\frac{\Delta V}{V} \qquad [5]$$

si può trovare il valore della pressione esercitata nel liquido per effetto della variazione di volume: questa pressione agisce sul liquido che si trova nel tubo T, producendovi una variazione di livello h: perciò nel ΔV della [5] si deve considerare non solo la variazione di volume dovuta alla condensazione, ma anche la variazione hA dovuta al fatto che il liquido viene ad occupare un volume maggiore, in seguito all'innalzamento h del livello nel tubo T; nel denominatore della [5] poi, al posto di V, si potrà porre il volume V_0 di tutto il liquido contenuto sia nella sfera, sia nel tubo; ciò si può ammettere, se si suppone che V_0 sia molto più grande del volume spostato durante un'oscillazione. La pressione all'interno sarà quindi

$$\Delta P = -\,\varepsilon\,\frac{\Delta V + hA}{V_0}$$

Se si suppone inoltre che l'altezza l del tubo sia più piccola della lunghezza d'onda della vibrazione nel liquido, si può ammettere che la massa del liquido contenuto nel tubo T si sposti tutta insieme: si può allora applicare a questa massa m l'equazione di moto, e si ha così, trascurando gli attriti,

$$m\frac{d^2h}{dt^2} = -\varepsilon\frac{A}{V_0}\Delta V - \varepsilon\frac{A^2}{V_0}h$$

e cioè in base alla [1] riferita al centro della sfera ed alla [4]

$$m\frac{d^2h}{dt^2} + \varepsilon\frac{A^2}{V_0}h = \varepsilon\frac{Aa\omega}{c}\cos\omega t.$$

Tale equazione ammette come è noto l'integrale particolare

$$h = \frac{\varepsilon Aa\omega}{mc(\Omega^2-\omega^2)}\cos\omega t \qquad [6]$$

dove la pulsazione di risonanza Ω dell'apparato è data da

$$\Omega = \sqrt{\frac{\varepsilon A^2}{mV_0}} = c_1\sqrt{\frac{A}{lV_0}}$$

questa formula è identica a quella dei risonatori di Helmholtz: ciò è evidente, essendo stato fatto un ragionamento analogo (qui c_1 è la velocità di propagazione delle vibrazioni nel liquido).

Nel caso poi che si consideri una frequenza incidente tanto piccola da poter trascurare ω^2 rispetto ad Ω^2, la [6] diventa

$$h = -\frac{V_0 a\omega}{Ac}\cos\omega t$$

che si identifica con la [2] trovata da Benioff.

Se l'ipotesi a) non è più valida, la condensazione non può più ritenersi costante in ogni punto della sfera: quindi la pressione varia da punto a punto e si propaga nell'interno. Inoltre, se si avessero delle vibrazioni la cui lunghezza d'onda fosse tanto piccola da generare delle onde stazionarie nell'interno della sfera, l'attacco del tubo T potrebbe capitare in una posizione qualunque rispetto alle zone ventrali ed a quelle nodali: si potrebbero avere quindi in questo punto delle pressioni che dipenderebbero non solo dall'ampiezza e dalla frequenza dell'onda incidente, ma anche e sopratutto dalla direzione di provenienza dell'onda.

Per evitare questo inconveniente che potrebbe presentarsi qualora si volessero registrare delle vibrazioni di piccola lunghezza d'onda, occorre fare una variante all'apparato sopra descritto. Tale variante consiste nel porre il tubo T internamente alla sfera (fig. 2), in modo che la sua estremità aperta inferiore si trovi proprio al centro. Ogni porzione della sfera si può allora considerare come una sorgente che emetta, durante la sua vibrazione, delle onde propagantesi nell'interno della sfera: ora tutte le azioni di queste onde arriveranno al centro

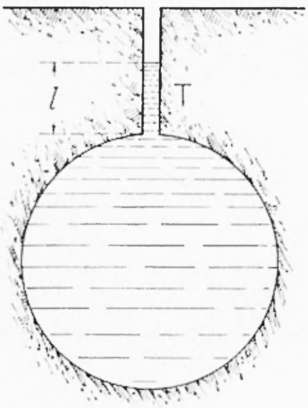

Fig. 1

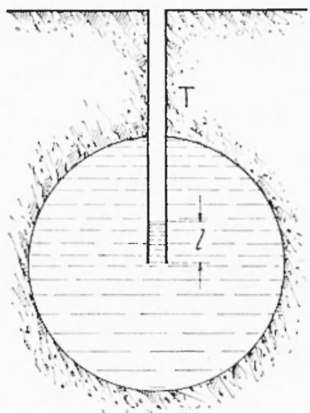

Fig. 2

con uno stesso ritardo relativamente alle vibrazioni delle rispettive sorgenti, cioè delle diverse porzioni della superficie della sfera. Si può così fare l'ipotesi che la pressione nel centro all'istante t sia proporzionale alla variazione di volume della sfera all'istante $t - \frac{R}{c_1}$ (c_1 è la velocità di propagazione di una vibrazione elastica nel liquido) ed alla variazione di volume del liquido contenuto nel tubo T relativa all'istante t: anche ora si suppone che l'altezza l del livello del liquido sia piccola rispetto alla lunghezza d'onda della vibrazione nel liquido: si ha quindi dalla solita relazione di elasticità

$$(\Delta P)_t = -\varepsilon \left(\frac{\Delta V}{V_0}\right)_{t-\frac{R}{c_1}} - \varepsilon \frac{A}{V_0}\left(h\right)_t .$$

Per calcolare la variazione di volume della sfera, dovuta ad un'onda longitudinale incidente di equazione [1], si potrebbe partire dalla

[5], ponendo però σ funzione della posizione e del tempo. Ma si può più semplicemente considerare il volume del solido infinitesimo generato da una corona circolare coassiale all'asse x, durante la sua oscillazione e poi integrarlo a tutta la sfera. Consideriamo allora una corona circolare elementare compresa tra due coni di apertura φ e $\varphi + d\varphi$ (fig. 3): tutta la corona si sposterà di un tratto s dato dalla [1], supponendo che l'altezza del segmento sia tanto piccola da ritenere s costante su tutta la corona: in tal modo si viene a formare un solido infinitesimo compreso tra la sfera iniziale e la superficie della corona spostata: il suo volume è dato evidentemente dalla superficie della corona per l'altezza, che è rappresentata dalla proiezione di s sulla normale alla sfera e quindi da

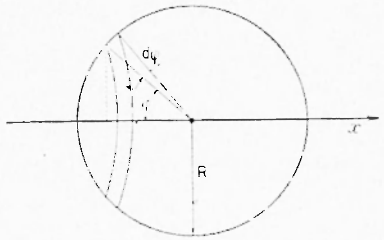

Fig. 3

$$dV = 2\pi R^2 \operatorname{sen}\varphi \, d\varphi \, a \cos\varphi \operatorname{sen}\omega\left(t - \frac{x}{c}\right)$$

ed essendo $x = -R\cos\varphi$,

si ha

$$dV = 2\pi R^2 a \operatorname{sen}\varphi \cos\varphi \operatorname{sen} 2\pi\left(\frac{t}{T} + \frac{R\cos\varphi}{\lambda}\right) d\varphi. \qquad [7]$$

La [7] va integrata per φ variabile da 0 a π. L'integrazione è immediata se si opera la sostituzione

$$y = \frac{2\pi R}{\lambda}\cos\varphi = \beta\cos\varphi$$

con la quale si ottengono i due integrali

$$\Delta V = -\int_{+\beta}^{-\beta} \frac{a\lambda^2}{2\pi} \operatorname{sen}\omega t \, y \cos y \, dy - \int_{+\beta}^{-\beta} \frac{a\lambda^2}{2\pi} \cos\omega t \, y \operatorname{sen} y \, dy$$

di cui il primo è nullo e l'altro vale

$$\Delta V = +\frac{a\lambda^2}{\pi}\cos\omega t\,(\operatorname{sen}\beta - \beta\cos\beta) = +4\pi R^2 a\left(\frac{\operatorname{sen}\beta - \beta\cos\beta}{\beta^2}\right)\cos\omega t. \qquad [8]$$

Per valori di β minore di 1, cioè per lunghezze d'onda molto più grandi di R, la [8] si può sviluppare in serie, ottenendo

$$\Delta V = -4\pi R^2 a \Sigma (-1)^n \frac{2n}{(2n+1)!} \beta^{2n-1} \cos \omega t$$

e se si trascurano i termini di grado superiore, si ottiene

$$\Delta V = \frac{V_0 a \omega}{c} \cos \omega t$$

da cui si può facilmente ottenere la formula [2] di Benioff.

Per trovare la variazione h del livello del liquido, si applichi l'equazione di moto alla massa del liquido contenuto nel tubo T.

$$m\left(\frac{d^2 h}{dt^2}\right)_t = -\varepsilon A \left(\frac{\Delta V}{V_0}\right)_{t-\frac{R}{c_1}} - \varepsilon \frac{A^2}{V_0}\left(h\right)_t$$

e dalla [6]

$$m\frac{d^2 h}{dt^2} + \varepsilon \frac{A^2}{V_0} h = -\frac{4\pi\varepsilon A}{V_0} R^2 a \frac{\operatorname{sen}\beta - \beta\cos\beta}{\beta^2} \cos \omega\left(t - \frac{R}{c_1}\right)$$

tale equazione ammette come integrale particolare

$$h = -\frac{4\pi\varepsilon R^2 A a}{m V_0} \cdot \frac{1}{\Omega^2 - \omega^2} \cdot \frac{\operatorname{sen}\beta - \beta\cos\beta}{\beta^2} \cdot \cos \omega\left(t - \frac{R}{c_1}\right)$$

dove come al solito

$$\Omega^2 - \frac{\varepsilon A^2}{m V_0} \cdot$$

In questa formula compaiono vari fattori, dei quali è bene fare una rapida analisi. Oltre all'ampiezza a della vibrazione incidente, il primo fattore contiene alcune grandezze caratteristiche della sfera e del liquido adoperato. Il secondo fattore tiene conto che tutto il sistema ha una propria frequenza di risonanza. Il terzo fattore è una funzione di β di cui si riporta nella fig. 4 il diagramma per valori di β compresi tra 0 e 8 ca. L'ultimo fattore infine è la variazione nel tempo e la differenza di fase tra il moto di h e la vibrazione incidente riferita al centro della sfera; è naturale che questa fase per β prossimi a 0, cioè per lunghezze d'onda molto grandi, tenda ad annullarsi, ricadendo così nella formula di Benioff.

In quanto alla registrazione delle vibrazioni incidenti, essa può essere fatta con un qualsiasi metodo o meccanico o ottico o elettrico che possa registrare gli spostamenti di un galleggiante posto sulla superficie del liquido nel tubo T.

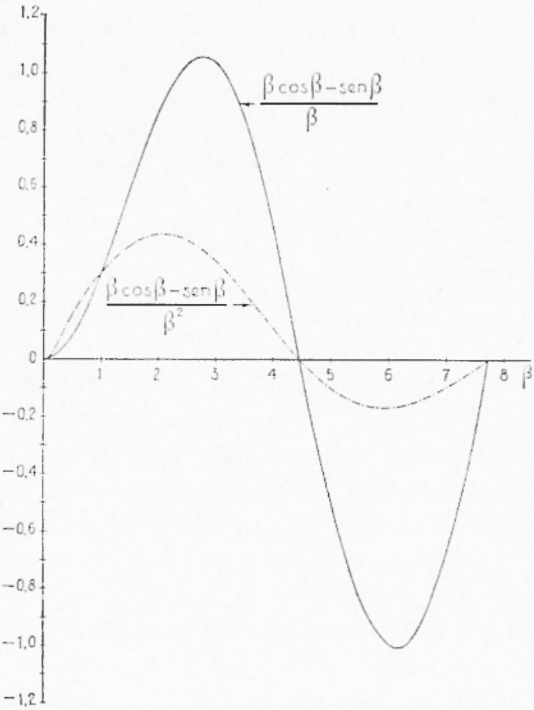

Fig. 4

Nel caso però che la registrazione avvenga con un metodo che riveli non gli spostamenti, ma le variazioni degli spostamenti nel tempo (per es. un metodo elettromagnetico), la risposta dell'apparato si modifica: così le elongazioni d di uno strumento registratore, sono proporzionali a $\frac{dh}{dt}$, quindi

$$d = \frac{4\pi\varepsilon R A ac}{m V_0} \cdot \frac{1}{\Omega^2 - \omega^2} \cdot \frac{\mathrm{sen}\,\beta - \beta\cos\beta}{\beta}\,\mathrm{sen}\,\omega\left(t - \frac{R}{c_1}\right).$$

Della funzione $\frac{\mathrm{sen}\,\beta - \beta\cos\beta}{\beta}$ viene riportato analogo grafico nella fig. 4.

Roma — Istituto Nazionale di Geofisica — febbraio 1948.

RIASSUNTO

Nella presente nota viene studiato il comportamento di un registratore di onde longitudinali, basato sulla condensazione; l'A. introduce quindi una modifica all'apparato, suggerito dal Benioff nel caso particolare delle onde sismiche, per migliorarne la risposta.