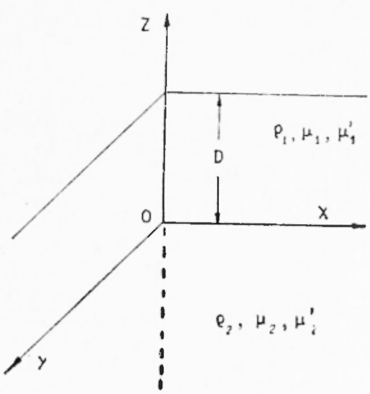
SULLE ONDE DI LOVE

Paolo Emilio Valle

E' noto che nella fase massima di un terremoto appaiono onde trasversali tangenziali.

Love ne spiegò l'esistenza formulando una teoria che si basa sull'ipotesi di una stratificazione del mezzo in cui avviene la propagazione.



Love però non tiene conto delle azioni dissipative, pertanto ho ritenuto opportuno rifare la teoria nell'ipotesi che il mezzo stratificato presenti attrito interno. Si consideri il solito riferimento cartesiano posto come in fig. 1. Un'onda elementare piana trasversale-tangenziale si propaghi nel verso negativo dell'asse x. Dette ρ_1, μ_1, μ'_1 la densità e le costanti elastiche del primo mezzo, ρ_2, μ_2, μ'_2 le analoghe grandezze relative al secondo mezzo, lo spostamento v nel primo mezzo dovrà soddisfare all'equazione:

$$\mu_1 \Delta_2 v + \mu'_1 \frac{\partial}{\partial t} \Delta_2 v = \rho_1 \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \qquad [1]$$

e nel secondo mezzo a quest'altra equazione:

$$\mu_2 \Delta_2 v + \mu'_2 \frac{\partial}{\partial t} \Delta_2 v = \rho_2 \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \qquad [2]$$

Le condizioni ai cui debbono soddisfare lo spostamento e la tensione T_1 per $z=0$ saranno:

$$\begin{aligned} &v \text{ (nel primo mezzo)} = v \text{ (nel secondo mezzo)} \\ &T_1 \text{ (nel primo mezzo)} = T_1 \text{ (nel secondo mezzo)} \end{aligned} \qquad [3]$$

e per $z=D$, dove con D si è indicato lo spessore dello strato:

$$T_1 = 0 \qquad [4]$$

L'espressioni della tensione T_1 sono:

$$T_1 = \mu_1 \frac{\partial v}{\partial z} + \mu'_1 \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial v}{\partial z} \quad \text{nel primo mezzo}$$
$$T_1 = \mu_2 \frac{\partial v}{\partial z} + \mu'_2 \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial v}{\partial z} \quad \text{nel secondo mezzo} \qquad [5]$$

Si è premesso di prendere in considerazione oscillazioni libere elementari, porremo quindi:

$$v = V(z)\, e^{j(pt+fx)} \qquad [6]$$

Sostituendo la [6] nella [1], si ha:

$$\frac{d^2 V}{dz^2} - V\left(f^2 - \frac{\varrho_1 p^2}{\mu_1 + j\mu'_1 p}\right) = 0$$

e quindi nel primo mezzo lo spostamento assume la forma:

$$v = \left[Ae^{(f^2-k_1)^{\frac{1}{2}} z} + Be^{-(f^2-k_1)^{\frac{1}{2}} z} \right] e^{j(pt+fx)} \qquad [7]$$

Sostituendo la [6] nella [2], si ottiene:

$$\frac{d^2 V}{dz^2} - V\left(f^2 - \frac{\varrho_2 p^2}{\mu_2 + j\mu'_2 p}\right) = 0$$

e quindi nel secondo mezzo:

$$v = \left[Ce^{(f^2-k_2)^{\frac{1}{2}} z} + Ee^{-(f^2-k_2)^{\frac{1}{2}} z} \right] e^{j(pt+fx)} \qquad [8]$$

Supponendo soddisfatta la condizione che la parte reale di $(f^2-k_2)^{\frac{1}{2}}$ sia positiva, si deve porre nella [8] $E=0$, se si vuole che l'ampiezza dello spostamento decresca con la profondità.

Pertanto:
$$v = Ce^{(f^2-k_2)^{\frac{1}{2}} z}\, e^{j(pt+fx)} \qquad [8']$$

Nella [7] e nella [8'] si è posto:

$$k_1 = \frac{\varrho_1 p^2}{\mu_1 + j\mu'_1 p} \quad , \quad k_2 = \frac{\varrho_2 p^2}{\mu_2 + j\mu'_2 p} \qquad [9]$$

Ricordando che:

$$\frac{\mu_1}{\varrho_1} = v^2_{1s} \;,\; \frac{\mu_2}{\varrho_2} = v^2_{2s} \;,\; \frac{\mu'_1}{\varrho_1} = \tau_1 v^2_{1s} \;,\; \frac{\mu'_2}{\varrho_2} = \tau_2 v^2_{2s} \qquad [10]$$

si ha:

$$k_1 = \frac{p^2}{v_1{}^2{}_s(1+j\tau_1 p)} \quad , \quad k_2 = \frac{p^2}{v_2{}^2{}_s(1+j\tau_2 p)} \qquad [11]$$

Introducendo la [7] e la [8'] nelle [5] e imponendo le condizioni [3] e [4] si ottiene il sistema:

$$\begin{cases} A + B = C \\ (\mu_1 + j\mu'_1 p)(f^2 - k_1)^{\frac{1}{2}}(A - B) = (\mu_2 + j\mu'_2 p)(f^2 - k_2)^{\frac{1}{2}} C \\ (\mu_1 + j\mu'_1 p)(f^2 - k_1)^{\frac{1}{2}}\left(A\, e^{(f^2-k_1)^{\frac{1}{2}} D} - B\, e^{(f^2-k_1)^{\frac{1}{2}} D}\right) = 0 \end{cases} \qquad [12]$$

Supponendo per comodità $A = 1$, risulta:

$$B = e^{(f^2-k_1)^{\frac{1}{2}} D}$$

$$C = 1 + e^{(f^2-k_1)^{\frac{1}{2}} D}$$

$$\frac{k_2}{k_1} \frac{\varrho_1 (f^2-k_1)^{\frac{1}{2}}}{\varrho_2 (f^2-k_2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{e^{-(f^2-k_1)^{\frac{1}{2}} D} + e^{(f^2-k_1)^{\frac{1}{2}} D}}{e^{-(f^2-k_1)^{\frac{1}{2}} D} - e^{(f^2-k_1)^{\frac{1}{2}} D}} \qquad [13]$$

Le prime due equazioni [13] consentono di calcolare B e C. Dalla terza, se si suppone dato f, si ricava p, che in generale sarà complessa e si ha un'onda smorzata, mentre se si suppone data p e si ricava f, la sua parte reale sarà proporzionale al reciproco della lunghezza d'onda, mentre il coefficiente dell'immaginario rappresenterà il coefficiente di assorbimento. Si ha dispersione in entrambi i casi.

La [13] si può scrivere:

$$\frac{\mu_2}{\mu_1} \frac{\left(1+j\tau_2 p\right)\left(f^2 - \dfrac{p^2}{v_2{}^2{}_s(1+j\tau_2 p)}\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(1+j\tau_1 p\right)\left(\dfrac{p^2}{v_1{}^2{}_s(1+j\tau_1 p)} - f^2\right)^{\frac{1}{2}}} = \mathrm{tang}\, D\left(\frac{p^2}{v_1{}^2{}_s(1+j\tau_1 p)} - f^2\right)^{\frac{1}{2}} \qquad [14]$$

Se ora nella [14] si pone $\tau_1 = \tau_2 = 0$ si ottiene la classica equazione di Love:

$$\frac{\mu_2}{\mu_1} \frac{\left(f^2 - \frac{p^2}{v_{2}{}^2{}_s}\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(\frac{p^2}{v_{1s}{}^2} - f^2\right)^{\frac{1}{2}}} = \tang D\left(\frac{p^2}{v_{1s}{}^2} - f^2\right)^{\frac{1}{2}} \qquad [15]$$

Per $D=0$, dalla [14] e dalla [15] risulta rispettivamente:

$$f^2 - \frac{p^2}{v_{2s}{}^2(1+j\tau_2 p)} = 0 \quad , \quad f^2 - \frac{p^2}{v_2{}^2{}_s} = 0 \qquad [16]$$

e si ha un'onda tangenziale trasversale non smorzata lungo l'asse z.

Il calcolo numerico della [14] è stato proposto all'Istituto per le Applicazioni del Calcolo in base alle costanti elastiche e ai valori più probabili degli spessori delle stratificazioni della crosta terrestre.

Roma — Istituto Nazionale di Geofisica — febbraio 1948.

RIASSUNTO

L'A. estende la teoria delle onde superficiali trasversali-tangenziali di Love al caso in cui il mezzo stratificato presenti attrito interno.