SOLUSI DERET PANGKAT TETAP DENGAN FUNGSI PEMBANGKIT

Alexander A S Gunawan

Jurusan Matematika dan Statistika Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Bina Nusantara
Jln. K. H. Syahdan No. 9, Kemanggisan/Palmerah, Jakarta Barat 11480
aagung@binus.edu

ABSTRACT

This article discusses about the sum of powers $\sum_{i=1}^{n} i^a$ *, which closed solutions empirically have been discovered by Jacob Bernoulli in 1731 in The Art of Conjecture. In this paper, we will find a closed solution of the sum of powers by using the Generating Function. By learning how to derive the closed solution of the sum of powers, the Generating Function can be used to solve the more general series forms.*

Keywords: *the sum of powers, generating function*

ABSTRAK

Makalah ini membahas mengenai Deret Pangkat Tetap $\sum_{i=1}^{n} i^a$*, yang secara empiris solusi tertutupnya telah ditemukan oleh Jacob Bernoulli pada tahun 1731 dalam The Art of Conjecture. Dalam paper ini, akan dicari solusi tertutup dari Deret Pangkat Tetap ini dengan menggunakan Fungsi Pembangkit. Dengan mempelajari cara penurunan solusi tertutup dari Deret Pangkat Tetap, Fungsi Pembangkit ini dapat digunakan untuk memecahkan bentuk-bentuk Deret lain yang lebih umum.*

Kata kunci: *deret pangkat tetap, fungsi pembangkit*

PENDAHULUAN

Permasalahan mencari solusi tertutup dari Deret Pangkat Tetap $S_\alpha(n) = \sum_{i=1}^{n} i^a$ sudah mulai dicari sejak 1631 oleh Johan Faulhaber (1580-1635) [Pascal, 2002]. Beliau telah memberikan solusi tertutup sampai dengan nilai α=17, antara lain sebagai berikut:

$$S_1(n) = \sum_{i=1}^{n} i^1 = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$S_2(n) = \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$S_3(n) = \sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} \qquad \ldots$$

Selanjutnya Johan Bernoulli yang mempelajari hasil ini [Chen, 2001], mampu menghasilkan bentuk umum dari solusi tertutup secara empiris sebagai berikut:

$$S_\alpha(n) = \frac{1}{\alpha+1} \sum_{k=0}^{\alpha} \binom{\alpha+1}{k} B_k \; n^{\alpha+1-k}$$

Dengan $\boldsymbol{B_k}$ adalah Bilangan Bernoulli sebagai berikut:

k	**0**	**1**	**2**	**4**	**6**	**8**	**10**	**12**
$\mathbf{B_k}$	1	-1/2	1/6	-1/30	1/42	-1/30	5/66	-691/2730

yang dapat dihitung dari persamaan eksplisit berikut ini:

$$B_k = \frac{(-1)^k k}{2^k - 1} \sum_{i=1}^{k} 2^{-i} \sum_{j=0}^{i-1} (-1)^j \binom{i-1}{j} (j+1)^{k-1}$$

Formula eksplisit dari J Worpitsky di atas dipublikasikan 170 tahun setelah *The Art of Conjectur* dari Johan Bernoulli diterbitkan pada tahun 1731 [Silva, 2006]. Secara umum untuk menemukan solusi tertutup dari Deret Pangkat Tetap masih didapatkan secara empiris saja, sehingga tidak dapat diketahui secara pasti bagaimana caranya menurunkan solusi tertutup tersebut. Akibatnya pengetahuan yang didapatkan tidak dapat diterapkan untuk memecahkan bentuk masalah deret yang lain. Dalam makalah ini akan dibahas, penurunan solusi tertutup Deret Pangkat Tetap tersebut dengan Fungsi Pembangkit, sehingga pengetahuan yang didapat dapat digunakan untuk memecahkan bentuk masalah deret yang lain.

PEMBAHASAN

Persamaan Beda

Akan digunakan Fungsi Pembangkit (Generating Function) untuk mencari solusi tertutup dari Deret Pangkat Tetap [Wilf, 1994]. Untuk maksud ini, Deret Bertingkat tersebut perlu diubah ke dalam bentuk persamaan beda (difference equation) seperti berikut ini:

Misalkan:

$\sum_{i=1}^{n} i^{a} = S_{\alpha}(n)$ dan $\sum_{i=1}^{n-1} i^{a} = S_{\alpha}(n-1)$

maka Deret Pangkat Tetap dalam bentuk persamaan beda (difference equation) dapat ditulis sebagai:

$$S_{\alpha}(n) = \sum_{i=1}^{n} i^{a} = \sum_{i=1}^{n-1} i^{a} + n^{\alpha} = S_{\alpha}(n-1) + n^{a}$$

Fungsi Pembangkit

Untuk memecahkannya Persamaan Beda ini, didefinisikan Fungsi Pembangkit G(x) terlebih dahulu sebagai berikut:

$$G(x) = \sum_{i=0}^{\infty} S_{\alpha}(i)\, x^{i} \tag{1}$$

dan kemudian mencari solusi persamaan beda $S_{\alpha}(n) = S_{\alpha}(n-1) + n^{a}$ dengan fungsi pembangkit [South, 1993] sebagai berikut:

$$\sum_{i=0}^{\infty} S_{\alpha}(i)\, x^{i} = \sum_{i=0}^{\infty} S_{\alpha}(i-1)\, x^{i} + \sum_{i=0}^{\infty} i^{a} x^{i}$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} S_{\alpha}(i)\, x^{i} = S_{\alpha}(0) + x\sum_{i=1}^{\infty} S_{\alpha}(i-1)\, x^{i-1} + \sum_{i=0}^{\infty} i^{a} x^{i} \quad \text{dengan } S_{\alpha}(0) = 0$$

Dengan menggunakan definisi Fungsi Pembangkit (1) di atas maka diperoleh:

$$G(x) = xG(x) + \sum_{i=0}^{\infty} i^{a} x^{i}$$

Selanjutnya dihasilkan Fungsi Pembangkit dari Deret Pangkat Tetap sebagai berikut:

$$G(x) = \frac{\sum_{i=0}^{\infty} i^{a} x^{i}}{(1-x)} \tag{2}$$

Bentuk Tanpa Deret Tak Hingga Dari Fungsi Pembangkit

Perhatikan dalam hasil (2) di atas, pada bagian numerator terdapat deret $\sum_{i=0}^{\infty} i^{a} x^{i}$ dan untuk mendapatkan bentuk tanpa deret hingga dari Fungsi Pembangkit ini perlu dicari solusi tertutupnya dengan memperhatikan dulu hasil ekspansi Taylor dari deret $\sum_{i=0}^{\infty} i^{0} x^{i}$, yaitu:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^{2} + x^{3} + \ldots = \sum_{i=0}^{\infty} i^{0} x^{i}$$

Selanjutnya untuk mendapatkan bentuk fungsi dari deret $\sum_{i=0}^{\infty} i^{a} x^{i}$ dengan α=1, dapat mengenakan operator turunan $\frac{d}{dx}$ dan kemudian mengalikan hasilnya dengan variable x kembali, sehingga:

- Untuk α=1 maka didapat $\sum_{i=0}^{\infty} i^1 x^i = \sum_{i=0}^{\infty} i\ x^i = \dfrac{x}{(1-x)^2}$

  Untuk α=2 maka didapat $\sum_{i=0}^{\infty} i^2 x^i = \sum_{i=0}^{\infty} i^2\ x^i = \dfrac{x^2+x}{(1-x)^3}$
-

Dan bentuk umum dari fungsi pembangkit dari deret ini adalah:

$$\sum_{i=0}^{\infty} i^a x^i = \frac{b_\alpha x^\alpha + b_{\alpha-1} x^{\alpha-1} + \ldots + b_1 x^1}{(1-x)^{\alpha+1}} \tag{3}$$

dengan konstanta b_α $b_{\alpha-1}$ … b_1 dalam persamaan (3) yang pada prinsipnya dapat dicari dengan program komputer dari pengenaan operator $\left(x\dfrac{d}{dx}\right)$ pada fungsi $\dfrac{1}{1-x}$ secara berulang-ulang.

Di bawah ini adalah Tabel Konstanta b_i dengan nilai i=1 sampai dengan i=10.

	x^1	x^2	x^3	x^4	x^5	x^6	x^7	x^8	x^9	x^{10}
orde 1	1									
orde 2	1	1								
orde 3	1	4	1							
orde 4	1	11	11	1						
orde 5	1	26	66	26	1					
orde 6	1	57	302	302	57	1				
orde 7	1	120	1191	2416	1191	120	1			
orde 8	1	247	4293	15619	15619	4293	247	1		
orde 9	1	502	14608	88234	156190	88234	14608	502	1	
orde 10	1	1013	47840	455192	1310354	1310354	455192	47840	1013	1

Mendapatkan Solusi Tertutup

Selanjutnya untuk mencari solusi tertutup dari Deret Pangkat Tetap, perlu dicari konstanta dari suku ke x^n pada Fungsi Pembangkit dari Deret Pangkat Tetap. Dengan menggunakan formula Binomial Umum maka konstanta dari suku ke x^n dari $(1-x)^{-k}$ adalah;

$$\binom{k+n-1}{k-1}$$

Contoh Kasus

Untuk α=1 maka didapat $\sum_{i=0}^{\infty} i^1 x^i = \sum_{i=0}^{\infty} i\ x^i = \dfrac{x}{(1-x)^2}$

Maka Fungsi Pembangkit yang didapat adalah:

$$G(x) = \frac{x}{(1-x)^3}$$

Dengan menggunakan formula Binomial Umum didapat konstanta dari suku x^n adalah:

$$\binom{n+1}{2} = \frac{(n+1)\,n}{2!}$$

Untuk α=2 maka didapat $\sum_{i=0}^{\infty} i^2 x^i = \sum_{i=0}^{\infty} i^2 \; x^i = \frac{x^2 + x}{(1-x)^3}$

Maka Fungsi Pembangkit yang didapat adalah:

$$G(x) = \frac{x^2 + x}{(1-x)^4} = \frac{x^2}{(1-x)^4} + \frac{x}{(1-x)^4}$$

Dengan menggunakan formula Binomial Umum didapat konstanta dari suku x^n adalah:

$$\binom{n+2}{3} + \binom{n+1}{3} = \frac{(n+2)(n+1)n}{3!} + \frac{(n+1)n(n-1)}{3!} = \frac{(n+1)n}{6}(n-1+n+2) = \frac{(2n+1)(n+1)n}{6}$$

Untuk α=3 maka didapat $\sum_{i=0}^{\infty} i^3 x^i = \sum_{i=0}^{\infty} i^3 \; x^i = \frac{x^3 + 4x^2 + x}{(1-x)^4}$

Maka Fungsi Pembangkit yang didapat adalah:

$$G(x) = \frac{x^3 + 4x^2 + x}{(1-x)^5} = \frac{x^3}{(1-x)^5} + \frac{4x^2}{(1-x)^5} + \frac{x}{(1-x)^5}$$

Dengan menggunakan formula Binomial Umum didapat konstanta dari suku x^n adalah:

$$\binom{n+3}{4} + 4\binom{n+2}{4} + \binom{n+1}{4} = \frac{(n+3)(n+2)(n+1)n}{4!} + 4\frac{(n+2)(n+1)n(n-1)}{4!} + \frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{4!}$$

$$= \frac{(n+1)n}{4!}\left((n+3)(n+2) + 4(n+2)(n-1) + (n-1)(n-2)\right)$$

$$= \frac{(n+1)n}{4!}\left(6n(n+1)\right) = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

PENUTUP

Dengan mempelajari bagaimana solusi tertutup Deret Pangkat Tetap dapat diselesaikan dengan Fungsi Pembangkit, maka pengetahuan yang didapat bisa digunakan untuk memecahkan permasalahan deret yang lain misalnya Deret Bertingkat yang didefinisikan sebagai

$$\sum_{i=1}^{n}{}^{m} i^a = \underbrace{\sum_{j_m}^{n} \cdots \sum_{j_1}^{j_2} \sum_{i=1}^{j_1}}_{m} i^a$$

DAFTAR PUSTAKA

Chen, K. W., & Eie, M. (2001). A Note on Generalized Bernoulli Numbers, *Pacific Journal of Mathematics*, Volume 199 No 1, 2001.

Gourdon, X., & Pascal, S. (2002). "*Introduction to Bernoulli's Number*", diakses dari http://numbers.computation.free.fr/Constants/constants.html

Silva, J., (2006). *Bernoulli Numbers and Their Applications*, diakses dari http://ocw.mit.edu/NR/rdonlyres/Mathematics

South, K. A. (1993). *Solving Recurrence with Generating Function*, Baltimore: University of Maryland.

Wilf, H. S. (1994), *Generatingfunctionology*. Philadelphia: Academic Press Inc.