CUBO 8 , 07-09 (1992)
Recibido: Junio 1992.

Una condición suficiente para que un punto encontrado por multiplicadores de Lagrange sea un extremo.

Gustavo Avello J.

A) Se probará el siguiente teorema:

Teorema .1 *Sea A un abierto de $\mathbb{R}^n, f, g_1, ..., g_{m_{(-1)}}$ funciones de A en $\mathbb{R}$ de clase C^2, $g = (g_1, ..., g_m), M = g(0)$. Si para todo $x \in M$, los vectores gradientes $\nabla g_1(x), ..., \nabla g_m(x)$ son linealmente independientes ($m < n$) y si*

$$\nabla f(a) \in [T_a(M)]^{\perp} = [\nabla g_1(a), ..., \nabla g_m(a)]$$

y así $\exists!(\lambda_1, ..., \lambda_m) \in \mathbb{R}^m$ tal que $\nabla f(a) = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \nabla g_j(a)$.

Sea q la forma cuadrática asociada a la función auxiliar $F = f - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i$, es decir $g(h) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1} \frac{\partial^2 F(a)}{\partial x_i x_j} h_i h_j ; q(h) = \frac{1}{2} F''(a)(h,h)$

Se tiene:

1) Si q es definida positiva sobre el espacio tangente $T_a(M) = \bigcap_{j=i}^{m} Kerg_j'(a)$ entonces a es un mínimo relativo de f sobre M.

2) Si q es definida negativa sobre $T_a(M)$, a es un máximo relativo de $f \mid M$.

3) Si q es no definida, a no es ni máximo ni mínimo de $f \mid M$.

B) Aplicaremos el siguiente teorema

Teorema .2 *Sea Ω un abierto $\mathbb{R}^d, \Psi : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ de clase C^2, si $b \in \Omega$ es un punto crítico de Ψ tal que para todo $z \in \mathbb{R}, z \neq 0 : \Psi''(b)(z,z) > 0$. Entonces b es un mínimo de Ψ.*

Demostración: H. Cartan Pág. 100, Teorema 8.33. ∎

C) La Hessiana:

Sea M una subvariedad de $\mathbb{R}^n, M \subset A, f : A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ y $a \in M$. Diremos que a es un punto crítico de f sobre M si la diferencial $f'(a)$ se anula sobre el espacio tangente $T_a(M)$.

Supongamos ahora que f y M sean de clase C^2, y sea $\varphi : \Omega \longrightarrow M$ una parametrización de clase C^2 de M en una vecindad de a, tal que $\varphi(0) = a$, es decir $\varphi : \Omega \longrightarrow \varphi(\Omega) = U \cap M$, con U vecindad abierta de a, φ inmersión, inyectiva y homeomorfismos; luego $\varphi'(0)(\mathbb{R}^d) = T_a M$.

Para $x, y \in T_a M$, se pone:

$Hes_a f(x,y) = (f \circ \varphi)''(0)[(\varphi'(0))^{-1}x, (\varphi'(0)^{-1}y]$.

Puede probarse que $Hes_a f$ no depende de la parametrización φ de M en la vecindad de a; y se llama la Hessiana de f en el punto crítico a. Esto se encuentra por ejemplo en Berger pág. 142. Aunque en el caso que consideramos, la demostración es directa.

Teorema .3 *Si $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ y M son de clase C^2 y a es un punto crítico de f sobre M si $\forall x \in T_a(M) - \{0\}$, $Hes_a f(x,x) > 0$, entonces a es un punto de mínimo de f sobre M.*

Demostración: Se aplica el Teorema 2 a $\psi = f \circ \varphi$ en el punto $b = 0$. ■

D) Probemos el Teorema enunciado en (A) en el caso de un mínimo, los otros casos, con ligeras modificaciones son similares. Basta probar que: $\forall (x,y) \in T_a(M) \times T_a(M)$ se tiene:

$$Hes_a f(x,y) = [f''(a) - \lambda \circ g''(a)](x,y)$$

donde $\lambda : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$ es la apliación lineal tal que $\lambda(e_j) = \lambda_j$, e_j base canónica de $\mathbb{R}^m$. Sea $\varphi : \Omega \longrightarrow M$ una C^2 parametrización de M en una vecindad de a tal que $\varphi(0) = a$. Para $(x,y) \in T_a(M) \times T_a(M), \exists!(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ tal que $x = \varphi'(0)(\alpha), y = \varphi'(0)(\beta)$.

Por definición se tiene:

$$Hes_a f(x,y) = (f \circ \varphi)''(0)(\alpha,\beta) = f''(a)(\varphi)'(0)\alpha;$$
$$\varphi'(0)\beta) + f'(a)\varphi''(0)(\alpha,\beta) = f''(a)(x,y) + \lambda \circ g'(a)\varphi''(0)(\alpha,\beta)$$

Pues $f'(a) = \lambda \circ g'(a)$, donde $\lambda : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$ es la aplicación lineal tal que $\lambda(e_j) = \lambda_j$, y de la relación $(g \circ \varphi)(z) = 0 \forall \in \Omega$ que se verifica porque $M = g^{-1}(0)$ y porque $\varphi(z) \in M$.

Derivando 2 veces resulta:

$$(g \circ \varphi)''(0)(\alpha,\beta) = 0$$
$$g''(a)(\varphi'(0)\alpha, \varphi'(0)\beta) + g'(a)\varphi''(0)(\alpha,\beta) = 0$$

Luego

$$g'(a)\varphi''(0), (\alpha,\beta) = -g''(a)(x,y)$$

Finalmente se obtiene $\forall(x,y) \in T_a(M) \times T_a(M)$:

$$Hes_a f(x,y) = (f''(a) - \lambda \circ g''(a))(x,y).$$

Esto completa la demostración del teorema. ■

Problema: ¿ Cómo extender esto, a variedades modeladas por espacios de Banach? El Teorema 1 es válido en dimensión infinita imponiendo ψ'' (b) positiva y no degenerada.

El Teorema 3 también vale en un espacio de Banach E (en lugar de $\mathbb{R}^n$) de dimensión infinita, aparentemente la Hessiana también puede definirse de la misma manera.

Referencias

[1] Berger M., Gostiaux B., *Geométrie Differentielle,* Armand Collin **(1972)**.

[2] Cartan H., *Calcul Differentiel,* 2da. Ed. Hermm **(1977)**.

Dirección del autor:
Departamento de Matemática
Facultad de Ciencias-Universidad de Concepción.
Casilla 3-C. Concepción.

Finalmente se obtiene $\forall (x,y) \in T_a(M) \times T_a(M)$:

$$He_a f(x,y) = (f''(a) - \lambda \circ g''(a))(x,y).$$

Esto completa la demostración del teorema. ∎

Problema: ¿Cómo extender esto, a variedades modeladas por espacios de Banach? El Teorema 1 es válido en dimensión infinita imponiendo $\varphi''(b)$ positiva y no degenerada.

El Teorema 3 también vale en un espacio de Banach E (en lugar de $\mathbb{R}^n$) de dimensión infinita, aparentemente la Hessiana también puede definirse de la misma manera.

Referencias

[1] Berger M., Gostiaux B., *Géométrie Différentielle*, Armand Colin (1972).

[2] Cartan H., *Calcul Différentiel*, 2da. Ed. Hermann (1977).

Dirección del autor:
Departamento de Matemática
Facultad de Ciencias-Universidad de Concepción
Casilla 3-C. Concepción.