EKONOMSKA ANALIZA
1, XX (1986), 77—88

INTERVALNA OPTIMALNOST

*Miodrag IVOVIĆ**

Problematika optimizacije ekonomskih veličina, iz bilo koje oblasti ekonomske teorije, zasniva se na primeni i analizi odgovarajućih matematičkih modela. Optimalne vrednosti neke funkcije, uz neki unapred dati uslov veze, za njene nezavisno promenljive, realizuje se na njenoj liniji ekspanzije i ta metoda je u matematičkoj analizi detaljno razrađena pod nazivom »Uslovni ekstremi funkcije«.

Kako se u praksi uslovni ekstrem funkcije, koja predstavlja ekonomsku veličinu, iz raznih razloga retko u potpunosti (stopostotno) realizuje, to je od interesa određivanje takvih oblasti za nezavisno promenljive, u kojima će vrednosti funkcije uz unapred date uslove veze biti u unapred datim granicama, odnosno nalaziti se u unapred datom intervalu.

Znači, pod intervalnom optimalnošću, neke date funkcije $z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ uz date uslove veze $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$, podrazumeva se određivanje oblasti u kojoj se mogu menjati vrednosti promenljivih argumenata, tako da vrednosti funkcije uz dati uslov veze budu u unapred datim granicama, na primer p% do 100% punog uslovnog ekstrema.

U tom cilju dokazujemo sledeće tvrđenje.

Ako je data funkcija $z = Ax_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n}$[1] $(n \in N)$ *i uslov veze* $s_1 x_1 + s_2 x_2 + \ldots + s_n x_n - T = 0$, *tada su vrednosti date funkcije z u intervalu* $[\frac{p}{100} z_{max}, z_{max}]$ $(0 \leqslant p \leqslant 100)$ *za one vrednosti argumenata* $x_1, x_2, \ldots, x_n$, *koje pripadaju oblasti koja se dobija u preseku date funkcije* $z = Ax_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n}$ *i funkcije*

* Ekonomski fakultet, Beograd.

[1] Ovakvog oblika funkcije najčešće se koriste u ilustraciji teorijskih postavki ekonomske analize, i u teoriji ponašanja proizvođača i u teoriju ponašanja potrošača.

$$z = A \left(\frac{s_1 x_1 + s_2 x_2 + \ldots + s_n x_n}{\sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k} \right)^{\sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k} \cdot \left(\frac{\alpha_1}{s_1} \right)^{\alpha_1} \cdot \left(\frac{\alpha_2}{s_2} \right)^{\alpha_2} \ldots$$

$$\cdot \left(\frac{\alpha_n}{s_n} \right)^{\alpha_n} \cdot \frac{p}{100}.$$

Specijalno za $n = 2$ i $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ ta oblast se svodi na unutrašnjost između pravih:

$$x_2 = \frac{s_1}{s_2} x_1 \cdot \frac{200 - p + 20\sqrt{100 - p}}{p} \quad i$$

$$x_2 = \frac{s_1}{s_2} x_1 \cdot \frac{200 - p - 20\sqrt{100 - p}}{p}$$

i to onaj deo koji sadrži i liniju ekspanzije.

Zbog mogućnosti geometrijske interpretacije ovo tvrđenje, prvo, dokazaćemo za funkcije dve promenljive (n = 2) a zatim rezultat uopštiti i za slučaj funkcije od n-promenljivih.

Neka je data funkcija

$$z = f(x_1, x_2) \tag{1}$$

i uslov koji vezuje promenljive x_1 i x_2

$$\varphi(x_1, x_2) = s_1 x_1 + s_2 x_2 - T = 0 \tag{2}$$

Za ovaj slučaj Lagrange-ova funkcija je

$$F(x_1, x_2, \lambda) = f(x_1, x_2) + \lambda (s_1 x_1 + s_2 x_2 - T).$$

Potrebni uslovi za njen uslovni eksrem su:

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} = \frac{\partial f}{\partial x_1} + \lambda s_1 = 0, \tag{3}$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_2} = \frac{\partial f}{\partial x_2} + \lambda s_2 = 0, \tag{4}$$

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda} = s_1 x_1 + s_2 x_2 - T = 0. \tag{5}$$

Jednačine (3) i (4), zajedno, daju projekciju linije ekspanzije, a ona, zajedno sa (1), daje samu liniju ekspanzije.

Sa β označimo površ koja sadrži liniju ekspanzije i dodiruje funkciju (1) u tačkama koje pripadaju liniji ekspanzije i ima svojstvo da su joj sve njene nivo-linije[2] prave paralelne pravoj $s_1 x_1 + s_2 x_2 - T = 0$. Površ β se može definisati i na sledeći način: kao površ koju obrazuju izvodnice paralelne pravoj $s_1 x_1 + s_2 x_2 - T = 0$, a koje pri tranzlatornom kretanju dodiruje funkciju $z = f(x_1, x_2)$ u tačkama linije ekspanzije.

Površ β ima jednačinu oblika

$$s_1 x_1 + s_2 x_2 = f(z), \tag{6}$$

kod koje se analitički oblik desne strane ove jednačine, tj. $f(z)$, naknadno određuje pomoću funkcije $z = f(x_1, x_2)$ i projekcije linije ekspanzije, do koje se, kako je rečeno, dolazi eliminacijom λ iz jednačina (3) i (4). Ovom eliminacijom dobijaju se vrednosti za x_1 i x_2 u funkciji od z koje, zatim, zamenom u (6) i (1) daju oblik funkcije $f(z)$.

Ako je, na primer, funkcija data jednačinom

$$z = A x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2}, \tag{7}$$

njena projekcija linije ekspanzije, uz uslov veze (2), dobija se eliminacijom λ iz jednačina

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} = A\alpha_1 x_1^{\alpha_1 - 1} x_2^{\alpha_2} + \lambda s_1 = 0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_2} = A x_1^{\alpha_1} \alpha_2 x_2^{\alpha_2 - 1} + \lambda s_2 = 0,$$

i ima oblik

$$x_2 = \frac{s_1 \alpha_2}{s_2 \alpha_1} x_1.$$

Zamenom ove vrednosti u (6) dobija se vrednost

[2] Ovaj matematički pojam se u ekonomskoj literaturi, zavisno od problematike koju tretira, češće javlja pod nazivima: izokvante, izotroškovne linije, krive indiferencije itd.

$$f(z) = s_1 x_1 + s_2 x_2 = s_1 x_1 + s_2 \cdot \frac{s_1 \alpha_2}{s_2 \alpha_1} \cdot x_1 = \frac{(\alpha_1 + \alpha_2) s_1}{\alpha_1} x_1, \tag{8}$$

a zamenom iste u (7), dobija se

$$z = A x_1^{\alpha_1} \left(\frac{s_1 \alpha_2}{s_2 \alpha_1} x_1 \right)^{\alpha_2} = A x_1^{\alpha_1 + \alpha_2} \left(\frac{s_1 \alpha_2}{s_2 \alpha_1} \right)^{\alpha_2},$$

koja eksplicitno rešena po x_1, daje

$$x_1 = \left[\frac{z}{A} \left(\frac{s_2 \alpha_1}{s_1 \alpha_2} \right)^{\alpha_2} \right]^{\frac{1}{\alpha_1 + \alpha_2}}$$

Zamenom dobijene vrednosti za x_1 u (8), dobija se tražena funkcija f (z), tj. dobija se

$$f(z) = \frac{(\alpha_1 + \alpha_2) s_1}{\alpha_1} \left[\frac{z}{A} \left(\frac{s_2 \alpha_1}{s_1 \alpha_2} \right)^{\alpha_2} \right]^{\frac{1}{\alpha_1 + \alpha_2}} =$$

$$= (\alpha_1 + \alpha_2) \left[\left(\frac{s_1}{\alpha_1} \right)^{\alpha_1} \left(\frac{s_2}{\alpha_2} \right)^{\alpha_2} \frac{z}{A} \right]^{\frac{1}{\alpha_1 + \alpha_2}} .$$

Tražena površ β prema (6) ima jednačinu

$$s_1 x_1 + s_2 x_2 = (\alpha_1 + \alpha_2) \left[\left(\frac{s_1}{\alpha_1} \right)^{\alpha_1} \left(\frac{s_2}{\alpha_2} \right)^{\alpha_2} \frac{z}{A} \right]^{\frac{1}{\alpha_1 + \alpha_2}} , \tag{9}$$

koja, eksplicitno izražena po z, je

$$z = A \left(\frac{s_1 x_1 + s_2 x_2}{\alpha_1 + \alpha_2} \right)^{\alpha_1 + \alpha_2} \cdot \left(\frac{\alpha_1}{s_1} \right)^{\alpha_1} \left(\frac{\alpha_2}{s_2} \right)^{\alpha_2} . \tag{10}$$

Specijalno, ako je $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$, formula (9) dobija oblik

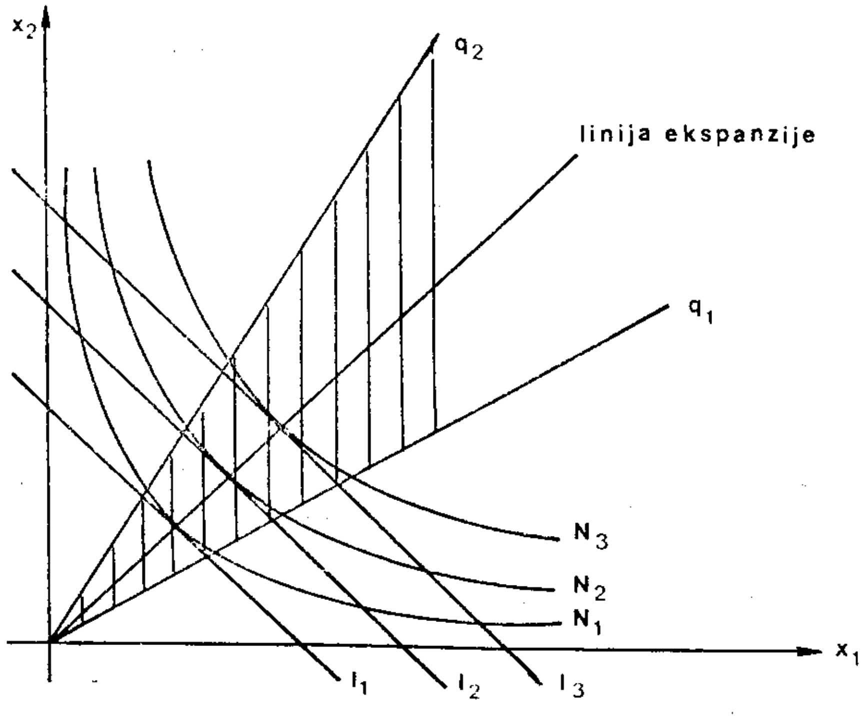
$$s_1 x_1 + s_2 x_2 = 2 \left(s_1 s_2 \frac{z}{A}\right)^{\frac{1}{2}} , \tag{9'}$$

koja, eksplicitno izražena po z, je

$$z = A \frac{(s_1 x_1 + s_2 x_2)^2}{4 s_1 s_2}. \tag{10'}$$

Kao što je rečeno površ β data jednačinama (10), odnosno (10′), dodiruje funkciju $z = Ax_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2}$, odnosno $z = x_1 x_2$ u tačkama linije ekspanzije, tj. u tačkama u kojima funkcija postiže uslovni ekstrem. Nivo-linije funkcija datih jednačinama (10), odnosno (10′), su prave koje su istovremeno i tangente na odgovarajućim nivo-linijama funkcije $z = Ax_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2}$, odnosno $z = x_1 x_2$, a dodirne tačke tih tangenata pripadaju samoj liniji ekspanzije. Grafički prikaz projekcija ovih pravih u ravni x_1Ox_2 su takođe prave $l_1, l_2, \ldots$, koje su tangente na projekcije odgovarajućih nivo-linija $N_1, N_2, \ldots$ datih funkcija $z = Ax_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2}$, odnosno $z = x_1 x_2$ (vidi sl. 1).

Ako se optimalna vrednost funkcije ne realizuje u potpunosti već samo delimično, na primer, p% ($p \leqslant 100$) uslovnog maksimuma, znači njena vrednost V_o se nalazi u intervalu $\frac{p}{100} z_{max} \leqslant V_o \leqslant z_{max}$, onda funkcija koja daje te vrednosti dobija se iz (10) i ima oblik



Slika 1.

$$z = A \left(\frac{s_1 x_1 + s_2 x_2}{\alpha_1 + \alpha_2} \right)^{\alpha_1 + \alpha_2} \cdot \left(\frac{\alpha_1}{s_1} \right)^{\alpha_1} \cdot \left(\frac{\alpha_2}{s_2} \right)^{\alpha_2} \cdot \frac{p}{100}. \tag{11}$$

Funkcija data jednačinom (11) seče funkciju $z = Ax_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2}$ po dvema linijama q_1 i q_2 koje prolaze kroz koordinatni početak (vidi sl. 1). Projekcije ovih linija dele ravan x_1Ox_2 na dva dela, a onaj deo površi koji sadrži i liniju ekspanzije je tražena oblast i predstavlja tačke u kojima data funkcija ima vrednost od p% do 100% punog uslovnog maksimuma. Jednačine projekcija linija q_1 i q_2 dobijaju se u preseku funkcije (11) i (7), odnosno dobijaju se eliminacijom z iz (11) i funkcije $z = Ax_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2}$

Specijalno, ako je $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$, rezultat (11) svodi se na

$$z = A \frac{(s_1 x_1 + s_2 x_2)^2}{4s_1 s_2} \frac{p}{100}. \tag{11'}$$

Funkcija (11') seče funkciju $z = x_1 x_2$ po dvema linijama q'_1 i q'_2 koje prolaze kroz koordinatni početak. Oblast između projekcija ovih linija (projekcije su prave linije), vidi sl. 1, koja sadrži i liniju ekspanzije, takođe je tražena oblast u čijim je tačkama vrednost funkcije u intervalu $[\frac{p}{100} z_{max}, z_{max}]$ $(p \leqslant 100)$.

Jednačine projekcija pravih q'_1 i q'_2 dobijaju se zamenom z iz (11') u $z = x_1 x_2$ i pri tome se dobija

$$A \frac{(s_1 x_1 + s_2 x_2)^2}{4s_1 s_2} \cdot \frac{p}{100} = Ax_1 x_2,$$

odnosno

$$(s_1 x_1 + s_2 x_2)^2 p = 400 s_1 s_2 x_1 x_2.$$

Kako je ovo homogena jednačina, po nepoznatim x_1 i x_2, to se ona pomoću smene $s_2 x_2 = s_1 x_1 t$ svodi na jednačnu

$$pt^2 + (2p - 400) t + p = 0,$$

čija su rešenja

$$t_{1,2} = \frac{-p + 200 \pm 20 \sqrt{100 - p}}{p}. \tag{12}$$

Oba ova rešenja su realna, s obzirom da je $p \leqslant 100$.

Jednačine projekcija linija q'_1 i q'_2 su

$$x_2 = \frac{s_1}{s_2} t_1 x_1 \qquad i \qquad x_2 = \frac{s_1}{s_2} t_2 x_1. \tag{12'}$$

GENERALIZACIJA INTERVALNE OPTIMALNOSTI

Izvedene formule za intervalnu optimalnost mogu se preneti i na funkcije od n promenljivih.

Ako je data funkcija

$$z = Ax_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n}$$

i uslov veze

$$s_1 x_1 + s_2 x_2 + \dots + s_n x_n - T = 0,$$

Za ovu funkciju, po istom principu kao ranije, dobija se projekcija linije ekspanzije

$$x_k = \frac{s_1 \alpha_k}{s_k \alpha_1} x_1, \qquad k = 2, 3, \dots, n.$$

Zamenom ovih vrednosti pri $k = 2, 3, \dots, n$ u

$$f(z) = s_1 x_1 + s_2 x_2 + \dots + s_n x_n$$

dobija se

$$f(z) = x_1 \frac{s_1}{\alpha_1} \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \tag{13}$$

zatim, zamenom istih vrednosti u

$$z = Ax_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n},$$

dobija se

$$z = A \left(\frac{s_1}{\alpha_1} x_1 \right)^{\sum_{k=1}^{n} \alpha_k} \cdot \left(\frac{\alpha_1}{s_1} \right)^{\alpha_1} \cdot \left(\frac{\alpha_2}{s_2} \right)^{\alpha_2} \dots \left(\frac{\alpha_n}{s_n} \right)^{\alpha_n},$$

odakle je

$$x_1 = \frac{\alpha_1}{s_1}\left[\left(\frac{s_1}{\alpha_1}\right)^{\alpha_1}\left(\frac{s_2}{\alpha_2}\right)^{\alpha_2}\cdots\left(\frac{s_n}{\alpha_n}\right)^{\alpha_n}\frac{z}{A}\right]^{\frac{1}{\sum\limits_{k=1}^{n}\alpha_k}}.$$

Zamenom ove vrednosti u (13), dobija se funkcija

$$f(z) = \sum_{k=1}^{n}\alpha_k\left[\left(\frac{s_1}{\alpha_1}\right)^{\alpha_1}\left(\frac{s_2}{\alpha_2}\right)^{\alpha_2}\cdots\left(\frac{s_n}{\alpha_n}\right)^{\alpha_n}\frac{z}{A}\right]^{\frac{1}{\sum\limits_{k=1}^{n}\alpha_k}},$$

a tražena površ β je

$$s_1x_1 + s_2x_2 + \ldots + s_nx_n =$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\alpha_k\left[\left(\frac{s_1}{\alpha_1}\right)^{\alpha_1}\left(\frac{s_2}{\alpha_2}\right)^{\alpha_2}\cdots\left(\frac{s_n}{\alpha_n}\right)^{\alpha_n}\frac{z}{A}\right]^{\frac{1}{\sum\limits_{k=1}^{n}\alpha_k}},$$

koja eksplicitno izražena po z ima oblik

$$z = A\left(\frac{s_1x_1 + s_2x_2 + \ldots + s_nx_n}{\sum\limits_{k=1}^{n}\alpha_k}\right)^{\sum\limits_{k=1}^{n}\alpha_k}.$$

$$\cdot\left(\frac{\alpha_1}{s_1}\right)^{\alpha_1}\left(\frac{\alpha_2}{s_2}\right)^{\alpha_2}\cdots\left(\frac{\alpha_n}{s_n}\right)^{\alpha_n}, \tag{14}$$

Površ, data sa (14), dodiruje funkciju $z = Ax_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\ldots x_n^{\alpha_n}$ u tačkama linije ekspanzije.

Za intervalnu optimalnost, za oblast u n-dimenzionom prostoru gde se vrednosti funkcije nalaze u intervalu [p%, 100%] uslovnog ekstrema, služi nam funkcija

$$z = A \left(\frac{s_1 x_1 + s_2 x_2 + \ldots + s_n x_n}{\sum_{k=1}^{n} \alpha_k} \right)^{\sum_{k=1}^{n} \alpha_k} .$$

$$\cdot \left(\frac{\alpha_1}{s_1} \right)^{\alpha_1} \cdot \left(\frac{\alpha_2}{s_2} \right)^{\alpha_2} \ldots \left(\frac{\alpha_n}{s_n} \right)^{\alpha_n} \cdot \frac{p}{100} . \tag{15}$$

Ona sa datom funkcijom ima presečnu oblast u n-dimenzionom prostoru, u kojoj vrednosti funkcije zadovoljavaju tražene zahteve. Jednačina te oblasti se dobija na isti način kao u dvodimenzionom prostoru eliminacijom z iz (15) i date funkcije $z = A \cdot x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_1} , . . x_n^{\alpha_n}$.

Specijalno ako je $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 1$ jednačine (14) i (15) dobijaju oblike

$$z = \frac{A}{n} \frac{(s_1 x_1 + s_2 x_2 + \ldots + s_n x_n)^n}{s_1 s_2 \ldots s_n} , \tag{14'}$$

odnosno

$$z = \frac{A}{n} \frac{(s_1 x_1 + s_2 x_2 + \ldots + s_n x_n)^n}{s_1 s_2 \ldots s_n} \frac{p}{100} . \tag{15'}$$

GRAFIČKA METODA ODREĐIVANJA INTERVALNE OPTIMALNOSTI

Intervalna optimalnost se može određivati i grafičkom metodom, naravno, samo za funkcije od dve promenljive.

Ako je data funkcija

$$z = A x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} , \tag{16}$$

i uslov veze

$$\varphi (x_1, x_2) = s_1 x_1 + s_2 x_2 - T = 0. \tag{17}$$

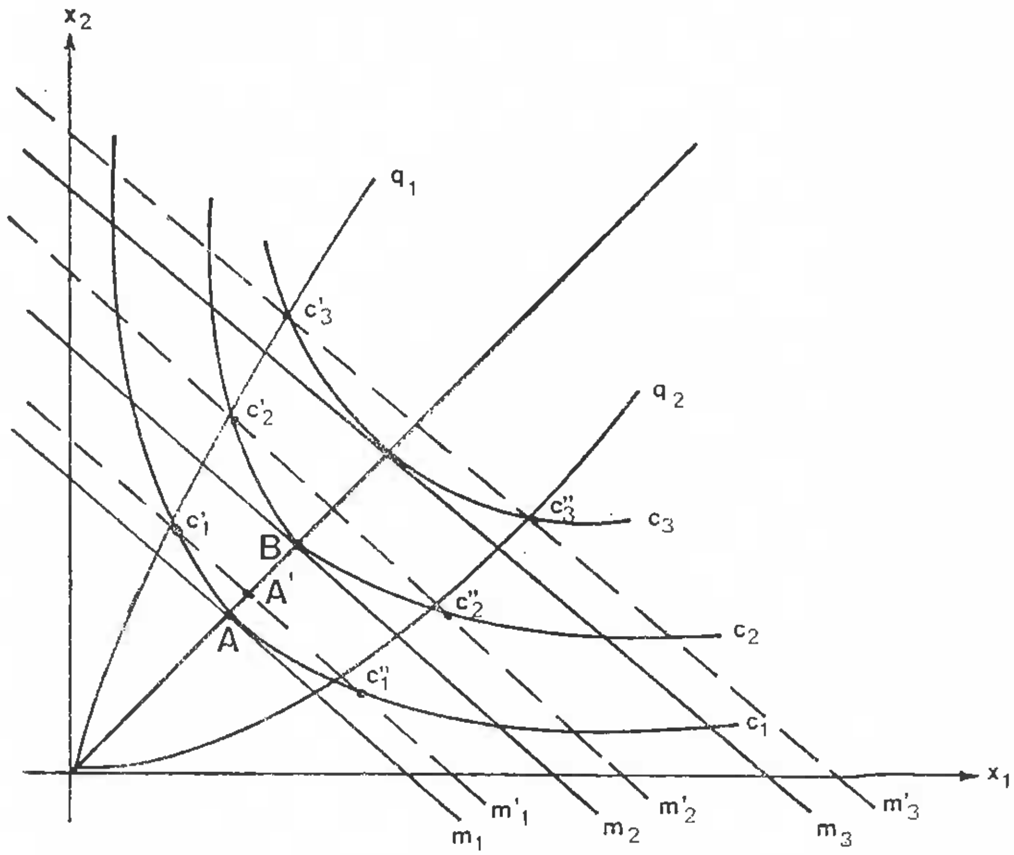
Projekcije linije ekspanzije za ovu funkciju i ovaj uslov veze je

$$x_2 = \frac{s_1 \alpha_2}{s_2 \alpha_1} x_1 .$$

Površ β koja dodiruje funkciju (16) po liniji ekspanzije je data jednačinom (10).

Ako se sada postave ravni paralelne $x_1 O x_2$ ravni na međusobno jednakim rastojanjima, svaka od ovih ravni seče funkciju (16) po hiperboli, a površ (10) po pravoj, koja je tangenta na hiperboli i paralelna pravoj (17).

Ako se u ravni $x_1 O x_2$ konstruišu projekcije svih ovih preseka, dobijaju se opet hiperbole čiji su grafici C_1, C_2, ... i njihove tangente $m_1, m_2, \ldots$ (vidi sl. 2).



Slika 2.

Ako se optimum funkcije realizuje intervalno onda funkcija koja to opisuje je oblika (11). Funkcija (11) dobijena je iz funkcije (10) množenjem njenih vrednosti sa $\frac{p}{100}$.

Ranije pomenute ravni seku i površ (11) po pravim čije su projekcije $m'_1, m'_2, \ldots$ paralelne projekcijama $m_1, m_2, \ldots$ Do projekcija m'_1, $m'_2, \ldots$ može se doći i pomoću projekcija m_1, $m_2, \ldots$ tranzlatornim pomeranjem u pravcu od koordinatnog početka svake za veličinu p% njenog udaljenja do sledeće prave, na primer, $AA' = \frac{p}{100} AB$, odnosno prava m'_1 je dobijena pomeranjem prave m_1 za p% rastojanja između tačaka AB u pravcu od A ka B. Ovako dobijene prave $m'_1, m'_2, \ldots$ seku odgovarajuće hiperbole $C_1, C_2, \ldots$ u tačkama $C'_1, C_1'', C'_2, C_2'', \ldots$ Spajanjem tačaka $C'_1, C'_2, \ldots$ dobija se presečna linija q_1, a spajanjem tačaka $C_1'', C_2'', \ldots$ dobija se druga presečna linija q_2. Tražena oblast je oblast između linija q_1 i q_2 i to ona koja sadrži i liniju ekspanzije.

Primljeno: 6. 6. 1985.
Prihrcčeno: 27. 8. 1985.

INTERVALLIC OPTIMALITY

Miodrag IVOVIĆ

Summary

During the optimization of the functions which represent economic quantities, a mathematical apparatus is most often used. Bearing in mind that, during realization of these legalities, a series of objective difficulties (limiting conditions) arise, the most often used mathematical apparatus is the theory of the conditional extremes of a function.

Since in practice this optimality is rarely ever one hundred per cent realized, it is of interest — and it is also the subject of the research for this paper — to determine an area in which the values of a variable argument can be freely varied, during which the values of the function, with limiting conditions given previously, remain within previously planned boundaries. When translated into economic language, for example in the case of the production function, this can be explained as the determination of the area (boundary) of the changes in the value of production consumption with unchanged expenditure and unchanged prices of consumption, so that production stays within the previosly planned boundaries.

This problem, in this paper, is dealt with in n-dimensional space for a function in the form $z = Ax_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\ldots x_n^{\alpha_n}$ *with the condition of tle link* $s_1x_1 + s_2x_2 + \ldots + s_nx_n - T = 0$. *Also given is the procedure for determining the mathematical formula (equation) of these areas. With this aim, the following definition is proved:*

If the given function is $z = Ax_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\ldots x_n^{\alpha_n}$ $(n \in N)$ *and the condition of the link* $s_1x_1 + s_2x_2 + \ldots + s_nx_n - T = 0$, *then the values of the function z are in the interval* $[\frac{p}{100} z_{max}, z_{max}]$ $(0 \leqslant p \leqslant 100)$ *at those values of the argument* $x_1, x_2, \ldots, x_n$, *which belong to the area which is obtained by the intersection of the given function* $z = Ax_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha^n}$ *and the function*

$$z = A \left(\frac{s_1 x_1 + s_2 x_2 + \ldots + s_n x_n}{\sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k} \right)^{\sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k} .$$

$$\cdot \left(\frac{\alpha_1}{s_1} \right)^{\alpha_1} \left(\frac{\alpha_2}{s_2} \right)^{\alpha_2} \ldots \left(\frac{\alpha_n}{s_n} \right)^{\alpha_n} \cdot \frac{p}{100} .$$

Especially for $n = 2$ and $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ this area is reduced to the inte-riority between the real:

$$x_2 = \frac{s_1}{s_2} x_1 \frac{200 - p + 20 \sqrt{100 - p}}{p} \quad \text{and}$$

$$x_2 = \frac{s_1}{s_2} x_1 \frac{200 - p - 20 \sqrt{100 - p}}{p}$$

and especially that part which contains the line of expansion.

In a two-dimensional case, the graphic method of determining that area is also given.