

Špecifické aspekty spracovania geodetických sietí použitím programu SoNet

Marián Kováč, Ján Hefty

Department theoretical geodesy

Faculty of Civil Engineering, Slovak University of Technology

E-mail: marian.kovac@stuba.sk, jan.hefty@stuba.sk

Kľúčové slová: geodetické siete, vyrovnanie

Abstrakt

Článok je zameraný na popis programu na spracovanie geodetických sietí s analyticky definovaným matematickým modelom (observačné rovnice definované v programe v symbolickom tvare), čo je najvýraznejšia črta, ktorou sa program odlišuje od súčasných programov na spracovanie geodetických sietí.

Univerzálnosť programu demonštrujeme na príklade spracovania viacepochovej geodetickej siete. Spracovanie bolo uskutočnené vo forme prípadových štúdií od elementárnej kombinácie meraní GPS s uvážením kovariančných matíc, až po spoločné spracovanie terestrických observácií a GPS s uvážením časových zmien a transformačných parametrov v spoločnom matematickom modeli.

Úvod

Jednou zo základných úloh geodézie je budovanie geodetických sietí. Geodetické siete tvoria množinu geodetických bodov, ktoré sú účelne rozložené na zemskom povrchu. Tvoria základ pre štúdium tvaru, rozmerov a tiažového poľa Zeme a sú aj podkladom pre všetky druhy technických a meračských prác.

Význam a úloha geodetických sietí sa s rozvojom geodézie mení a upravuje. Klasický prístup k budovaniu, resp. spracovaniu geodetických sietí sa zameriava na oddelené spracovanie polohových, výškových a tiažových meraní a označuje sa ako dvojrozmerná geodézia. S rozvojom družicových metód, ich dostupnosťou a presnosťou nastáva v geodézii problém, ako tieto merania čo najlepšie využiť a nestratiť informáciu o trojrozmernej polohe bodov. Takisto nastáva problém, ako tieto merania čo najlepšie spojiť s terestrickými a gravimetrickými meraniami. Vzniká potreba zjednotiť dostupné merania v spoločnom matematickom modeli.

Pojem štvorrozmernej geodézie sa používa pre tie geodetické teórie, metódy spracovania a interpretácie, ktoré sa venujú určovaniu priestorovej polohy bodov súčasne s opisom ich zmien v čase.

Softvérová aplikácia

Motivácia. K vytvoreniu softvéru s analyticky definovaným matematickým jadrom nás viedli nasledovné zistenia:

- V geodézi sa v súčasnosti spracovávajú rôzne typy geodetických sietí (terestrické, gravimetrické, GPS, ...) spravidla tak, že na každý typ geodetickej siete, resp. na ich určitú skupinu je potrebný iný program.
- Matematický model na vyrovnanie geodetických sietí (ak predpokladáme vyrovnanie sprostredkujúcich meraní) je v princípe založený na poznaní vzťahu medzi meranými veličinami a neznámymi, ktoré sú viazané funkčným vzťahom nazývaným *observačná rovnica*.

Prezentovaný program je navrhnutý ako modulárny systém, kde základnú aplikáciu je možné rozšíriť o (a) zásuvné moduly a (b) skripty (v jazyku Python). Vstupný údajový formát programu je v jazyku XML [4]. Tento vstupný súbor zahŕňa (a) časť, v ktorej je popísaný matematický model siete, (b) časť obsahujúcu samotné observácie.

Geodetické observácie

V programe je možné spracovávať nasledovné geodetické observácie (v zátvorke je uvedený príslušný XML element): geocentrické karteziánske súradnice (*coordinate*), resp. ich parametrický vektor, zmeny priestorovej polohy (*velocity*), horizontálny uhol (*angle*), zenitový uhol (*z-angle*), priestorová vzdialenosť (*distance*), prevýšenie (*diffh*). Vo vstupnom súbore sa napr. vodorovný uhol zapíše v tvare (zo stanoviska A):

```
<from name="A">  
  <angle to="B" next="C" value="13.4564"/>  
</from>
```

Program umožňuje spracovávať viacepochové geodetické siete; jednotlivé epochy sa v programe označujú pojmom *unit*. Každý *unit* zapúzdruje observácie združené v časti označenej pojmom *block*. Každý *block* obsahuje okrem observácií aj im prislúchajúcu kovariančnú maticu. Príklad *unitu* s jedným *blockom*, jednou dĺžkou a prislúchajúcou kovariančnou maticou:

```
<unit id="1">  
  <block id="1.1">  
    <from name="A">  
      <distance to="B" value="124.35"/>  
    </from>  
    <link href="c.cova"/>  
  </block>  
</unit>
```

Matematický model

Matematický model je v programe definovaný analyticky. Pri jeho zostavovaní je potrebné uviesť (a) observácie (*observations*), ktoré chceme spracovať, (b) neznáme odhadované parametre (*unknowns*) v symbolickom tvare (vo forme textového reťazca) a (c) observačné rovnice (*equations*) v symbolickom tvare, ktoré viažu observácie s definovanými neznámymi parametrami.

Výber neznámych parametrov

Pomocou neznámych parametrov je možné v programe definovať neznáme, ktoré chceme z vyrovnania získať. Neznáme parametre sa definujú v elemente `unknown`. Každý element `unknown` obsahuje element `group`, ktorý združuje elementy `point`, pomocou ktorých je definované, ku ktorým bodom je definovaná neznáma vzťahnutá. Ak príslušná skupina (element `group`) má definovaný atribút `name`, označuje sa ako pomenovaná skupina, ak ho definovaný nemá, označuje sa príslušná skupina ako anonymná. Význam anonymnej skupiny je v tom, že pre každý bod definovaný v tejto skupine sa vytvorí samostatná neznáma; príkladom anonymnej skupiny môže byť napr. definovanie odhadovaných súradníc, ai. Naopak, pri pomenovanej skupine sa vytvorí jedna neznáma viazaná ku všetkým bodom obsiahnutým v pomenovanej skupine; príkladom pomenovanej skupiny môže byť napr. definovanie transformačných parametrov, ktoré sa viažu k viacerým bodom. Príklad pomenovanej skupiny:

```
<unknowns>
  <unknown type="omega['\\omega',g,63.66197,cc,100,5]:
    psi['\\psi',g,63.66197,cc,100,5]:
      epsilon['\\epsilon',g,63.66197,cc,100,5]">
    <group name="second">
      <point name=".*"/>
    </group>
  </unknown>
</unknowns>
```

Observačné rovnice

Definovanie observačných rovníc s neznámymi a observáciami tvorí základnú filozofiu aplikácie. Vo všeobecnej teórii odhadu observačné rovnice zabezpečujú väzbu medzi observáciami, ktoré sú predmetom merania a určenými neznámymi parametrami, ktoré sú predmetom (cieľom) odhadu. Vo všeobecnosti je matematický, resp. deterministický model tvorený práve observačnými rovnicami, ktoré je možné v aplikácii ľubovoľne definovať a modifikovať.

Observačné rovnice sa v programe SoNet zapisujú v *symbolickom* tvare. V observačných rovnicach je možné použiť ľubovoľné matematické operátory a štandardné matematické funkcie. Príklad jednoduchej observačnej rovnice nivelácie je v nasledujúcej ukážke:

$$h_{i,j} = H_{j} - H_{i};$$

kde v zátvorkách sú indexy príslušnej observácie, resp. neznámych odhadovaných parametrov. Okrem observácií a odhadovaných neznámych je možné v observačných rovnicach použiť aj ďalšie premenné, ktorými sú metainformácie a parametre elipsoidov načítané z externých súborov.

Derivácie observačných rovníc. Program SoNet vykonáva automaticky rozvoj zostavených observačných rovníc do Taylorovho radu, resp. automatické derivovanie týchto observačných rovníc, tzn. linearizácia observačných rovníc je riešená analyticky.

Metainformácie

Metainformácie umožňujú zaradenia určitých číselných hodnôt do spracovania tak, aby sa tieto dali použiť v symbolickom tvare v observačných rovniciach. Číselnými hodnotami reprezentujúcimi metainformácie môžu byť napr. časové značky, hodnoty teploty, tlaku, výšky teodolitov a terčov, ai.

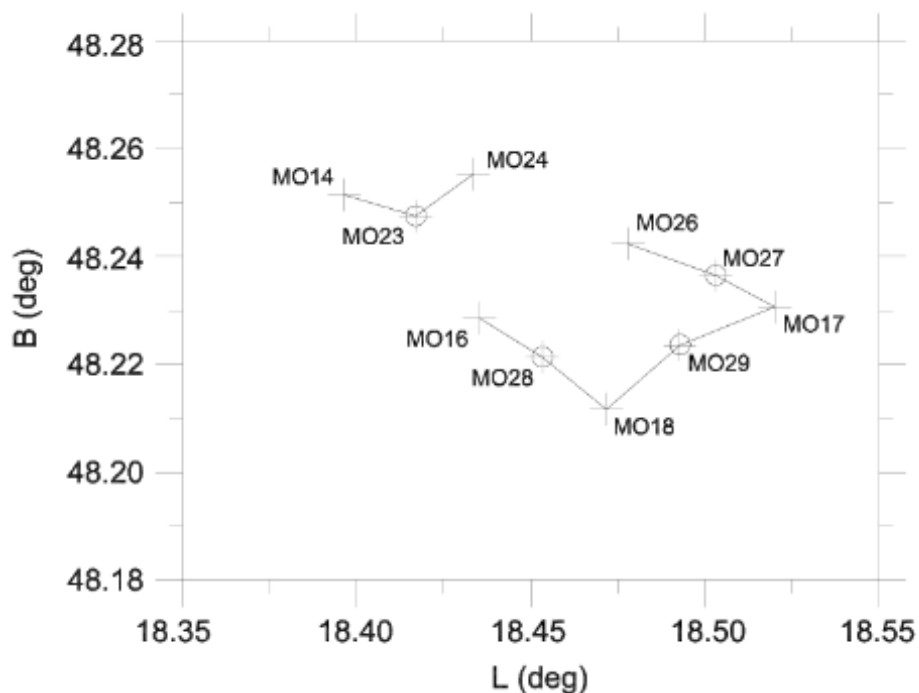
Jednotlivé metainformácie sú obsiahnuté v elemente `meta`. V nasledujúcej ukážke je znázornené použitie týchto atribútov v elemente `meta`:

```
<meta value="2000.0" alias="t0" label="refepoch"/>
<meta value="2001.7" alias="t" label="epocha"/>
```

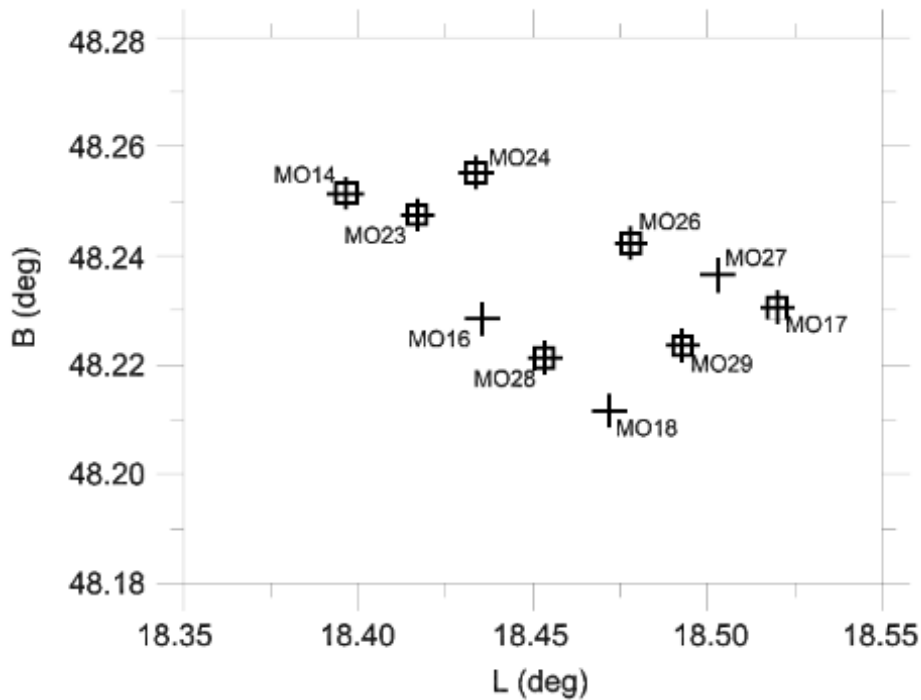
Príklad

Sieť jadrovej elektrárne Mochovce

V rokoch 1988 a 1989 sa uskutočnili opakované merania lokálnej geodetickej siete Mochovce pomocou terestrických geodetických metód (merania dĺžok a vodorovných uhlov). Schématické znázornenie meraných veličín je na obr. 1. V rokoch 2001, 2002, 2003 sa uskutočnili geodetické merania vybranej časti siete Mochovce metódou GPS (obr. 2) [6,7].



Obrázok 1: Terestrické observácie; symbolom \circ sú označené body, na ktorých bolo vykonané uhlové meranie, symbolom $—$ sú označené merania dĺžok medzi bodmi geodetickej siete.



Obrázok 2: Body merané pomocou GPS, symbolom \square sú označené body merané aspoň v dvoch kampaniach v období 2001 – 2003.

Matematický model

Predmetná geodetická sieť bola spracovaná vo viacerých variantoch. Tu je prezentované spoločné spracovanie terestrických meraní a GPS s odhadom súradníc, rýchlostí a transformačných parametroch je realizované modelom [5] (upravené):

$$\begin{pmatrix} \mathbf{x}^{(t_1)} \\ \mathbf{x}^{(t_2)} \\ \vdots \\ \mathbf{x}^{(t_n)} \\ \mathbf{l}^{(t_1)} \\ \mathbf{l}^{(t_2)} \\ \vdots \\ \mathbf{l}^{(t_n)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{I}^{(t_1)} & \mathbf{D}^{(t_1)} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{I}^{(t_2)} & \mathbf{D}^{(t_2)} & \mathbf{T}^{(t_2)} & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{I}^{(t_n)} & \mathbf{D}^{(t_n)} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{T}^{(t_n)} \\ \mathbf{A}_l^{(t_1)} & \mathbf{D}_l^{(t_1)} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{A}_l^{(t_2)} & \mathbf{D}_l^{(t_2)} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \mathbf{A}_l^{(t_p)} & \mathbf{D}_l^{(t_p)} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{y} \\ \mathbf{v}_y \\ \Theta^{(t_2)} \\ \vdots \\ \Theta^{(t_n)} \end{pmatrix},$$

s kovariančnou maticou

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \Sigma^{(t_1)} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \Sigma^{(t_m)} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \Sigma_l^{(t_1)} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \Sigma_l^{(t_p)} \end{pmatrix},$$

kde $\mathbf{I}^{(t_i)}$ je matica väzieb medzi observáciami v i -tej epoche a odhadovanými súradnicami, $\mathbf{A}_l^{(t_i)}$ je matica väzieb medzi terestrickými observáciami v i -tej epoche a odhadovanými geocentrickými karteziánskymi súradnicami, $\mathbf{D}^{(t_i)}$, $\mathbf{D}_l^{(t_i)}$ je diagonálna matica definujúca väzbu medzi rýchlosťami a pozorovaniami v i -tej epoche pre GPS a terestrické observácie, $\mathbf{T}^{(t_i)}$ je matica väzieb medzi observáciami a odhadovanými súradnicami, $\mathbf{x}^{(t_i)}$ je vektor realizácií v i -tej epoche, $\mathbf{l}^{(t_i)}$ sú terestrické observácie v i -tej epoche, $\Sigma^{(t_i)}$ je kovariančná matica súradníc určených z GPS v i -tej epoche, $\Sigma_l^{(t_i)}$ je kovariančná matica terestrických observácií v i -tej epoche, \mathbf{y} sú výsledné súradnice vzťahnuté k referenčnému rámcu 1. epochy, \mathbf{v}_y sú odhadnuté rýchlosti bodov, a $\Theta^{(t_i)}$ sú odhadnuté transformačné parametre.

Matematický model definovaný vo vstupnom súbore programu

Matematická formulácia observačných rovníc pre geocentrické karteziánske súradnice:

$$\begin{aligned} x_i &= x_{0i} + t_x + v_{x_i}(t - t_0) \\ y_i &= y_{0i} + t_y + v_{y_i}(t - t_0) \\ z_i &= z_{0i} + t_z + v_{z_i}(t - t_0) \end{aligned}$$

Zápis týchto rovníc v programe:

```
<equations>
  <eq form="x{i} = X{i} + tX{...} + vX{i}*(t-t0);"/>
  <eq form="y{i} = Y{i} + tY{...} + vY{i}*(t-t0);"/>
  <eq form="z{i} = Z{i} + tZ{...} + vZ{i}*(t-t0);"/>
</equations>
```

Matematická formulácia priestorovej dĺžky:

$$s_{ij} = \sqrt{((X_j + v_{X_j}(t - t_0) - X_i - v_{X_i}(t - t_0))^2 + (Y_j + v_{Y_j}(t - t_0) - Y_i - v_{Y_i}(t - t_0))^2 + (Z_j + v_{Z_j}(t - t_0) - Z_i - v_{Z_i}(t - t_0))^2)^{1/2}}$$

Zápis observačnej rovnice priestorovej dĺžky v programe:

```
<eq form="s{i,j} = sqrt((X{j}+vX{j}*(t-t0) - X{i}- vX{i}*(t-t0))^2 + (Y{j}+vY{j}*(t-t0) - Y{i}-vY{i}*(t-t0))^2 + (Z{j}+vZ{j}*(t-t0) -
```

```
Z{i} - vZ{i}*(t-t0))^2);"
/>
```

Matematická formulácia vodorovného uhla ako rozdiel dvoch smerov:

$$\omega_{ijk} = \arctan \frac{-\sin L_i(\Delta X_{ik} + \Delta v_{X_{ik}}) + \cos L_i(\Delta Y_{ik} + \Delta v_{Y_{ik}})}{-\sin B_i \cos L_i(\Delta X_{ik} + \Delta v_{X_{ik}}) - \sin B_i \sin L_i(\Delta Y_{ik} + \Delta v_{Y_{ik}}) + \cos B_i(\Delta Z_{ik} + \Delta v_{Z_{ik}})} - \arctan \frac{-\sin L_i(\Delta X_{ij} + \Delta v_{X_{ij}}) + \cos L_i(\Delta Y_{ij} + \Delta v_{Y_{ij}})}{-\sin B_i \cos L_i(\Delta X_{ij} + \Delta v_{X_{ij}}) - \sin B_i \sin L_i(\Delta Y_{ij} + \Delta v_{Y_{ij}}) + \cos B_i(\Delta Z_{ij} + \Delta v_{Z_{ij}})}$$

Zápis v programe:

```
<eq form="a{i,j,k} = (atan2((-sin(gL(X{i},Y{i},Z{i})) *
(X{k}+vX{k}*(t-t0)-X{i}-vX{i}*(t-t0)) +
cos(gL(X{i},Y{i},Z{i})) * (Y{k}+vY{k}*(t-t0)-Y{i}-vY{i}*(t-t0))),
(-sin(gB(X{i},Y{i},Z{i})) * cos(gL(X{i},Y{i},Z{i})) *
(X{k}+vX{k}*(t-t0)-X{i}-vX{i}*(t-t0)) - sin(gB(X{i},Y{i},Z{i})) *
sin(gL(X{i},Y{i},Z{i})) * (Y{k}+vY{k} * (t-t0)-Y{i}-vY{i}*(t-t0))
+ cos(gB(X{i},Y{i},Z{i})) * (Z{k}+vZ{k} * (t-t0)-Z{i}-vZ{i}*(t-t0))))))
- (atan2((-sin(gL(X{i},Y{i},Z{i})) * (X{j}+vX{j}*
(t-t0)-X{i}-vX{i}*(t-t0)) + cos(gL(X{i},Y{i},Z{i})) *
(Y{j}+vY{j}*(t-t0)-Y{i}-vY{i}*(t-t0))), (-sin(gB(X{i},Y{i},Z{i}))
* cos(gL(X{i},Y{i},Z{i})) * (X{j}+vX{j}*(t-t0)-X{i}-vX{i}*(
t-t0)) - sin(gB(X{i},Y{i},Z{i}))*sin(gL(X{i},Y{i},Z{i})) *
(Y{j}+vY{j} * (t-t0)-Y{i}-vY{i}*(t-t0)) + cos(gB(X{i},Y{i},Z{i}))
* (Z{j}+vZ{j}*(t-t0)-Z{i}-vZ{i}*(t-t0))))));"
/>
```

Výsledky spoločného spracovania

Výsledky spoločného riešenia GPS kampaní 2001, 2002, 2003 a terestrických observácií v epochách 1988 a 1989 s odhadom rýchlostí monitorovaných bodov sú uvedené v tabuľkách 1, 2, 3 a 4.

Bod	X [m]	σ_X [mm]	Y [m]	σ_Y [mm]	Z [m]	σ_Z [mm]
MO17	4036290.7995	4.7	1352165.7295	4.7	4734164.5202	4.7
MO23	4037308.4431	6.1	1344460.8285	5.7	4735535.1812	6.2
MO29	4037479.6022	6.4	1350279.8828	6.4	4733699.0043	6.4
MO24	4036408.9675	4.7	1345437.2847	4.7	4736041.2008	4.7
MO26	4036341.1893	4.7	1348846.0532	4.7	4735080.0009	4.7
MO28	4038676.6499	7.6	1347383.9801	7.6	4733558.2352	7.6

Tabuľka 1 - Odhadnuté geocentrické karteziánske súradnice bodov geodetickej siete Mochovce.

Bod	v_X [m/rok]	σ_{v_X} [mm/rok]	v_Y [m/rok]	σ_{v_Y} [mm/rok]	v_Z [m/rok]	σ_{v_Z} [mm/rok]
MO14	0.0059	5.9	-0.0051	5.2	-0.0053	5.9
MO17	0.0057	5.6	-0.0193	5.6	-0.0075	5.7
MO23	0.0191	7.6	-0.0017	5.8	-0.0043	8.2
MO29	0.0098	9.1	-0.0141	9.1	-0.0079	9.1
MO24	0.0050	5.4	-0.0157	5.4	-0.0043	5.5
MO26	0.0148	5.6	-0.0162	5.6	0.0010	5.6
MO28	0.0106	10.0	-0.0207	9.9	0.0050	10.0

Tabuľka 2 - Odhadnuté rýchlosti na bodoch geodetickej siete Mochovce.

Bod	B [°]	σ_B ["]	L [°]	σ_L ["]	H [m]	σ_H [mm]
MO17	53.589713	0.0002	20.578845	0.0003	213.2505	6.4
MO23	53.609830	0.0002	20.464701	0.0003	252.8440	6.4
MO24	53.617262	0.0002	20.482827	0.0003	267.6758	4.7
MO26	53.603304	0.0003	20.531516	0.0004	226.3663	7.6
MO28	53.580117	0.0002	20.499716	0.0003	258.4968	5.4
MO29	53.582673	0.0002	20.546452	0.0003	218.3034	4.7

Tabuľka 3 - Elipsoidické súradnice bodov siete na elipsoide WGS-84, na ktorých sa uskutočnili 2, resp. 3 merania GPS.

Bod	v_n [m/rok]	σ_{v_n} [mm/rok]	v_e [m/rok]	σ_{v_e} [mm/rok]	v_v [m/right]	σ_{v_v} [mm/rok]
MO17	-0.0045	6.9	-0.0201	5.2	-0.0061	9.1
MO23	-0.0160	9.10	-0.0076	9.1	0.0085	9.1
MO24	-0.0027	5.6	-0.0164	5.6	-0.0034	5.6
MO26	-0.0060	9.9	-0.0201	9.9	0.0067	10.1
MO28	0.0007	4.9	-0.0229	5.8	0.0060	4.7
MO29	-0.0088	5.4	-0.0165	5.3	-0.0027	5.6

Tabuľka 4 - Odhadnuté rýchlosti bodov transformované do zložiek v horizontálnej rovine a vo výške.

Záver

V článku sme sa zamerali na obecný popis univerzálneho softvérového prostredia, orientovaného na modelovanie, analýzu a spracovanie najmä geodetických sietí. Teoretické základy softvéru sú položené do oblasti matematiky, resp. numerickej matematiky, informatiky, geodézie a štatistiky. V aplikácii je možné využiť nielen matematické modely na riešenie geodetických sietí naznačené v tomto článku, ale prakticky ľubovoľné matematické modely využiteľné na vyrovnávanie geodetických sietí.

Program umožňuje spracovávať observácie opakovaných meraní (etapových, epochových a permanentných), ako aj kombinácie terestrických meraní s družicovými meraniami. Uplatnenie nachádzajú napr. terestrické merania včlenené do riešenia družicovej siete, kde umožňujú zlepšiť jej geometriu, výškovú zložku a pod.

Variabilnosť programu v definovaní matematických modelov umožňuje ich rýchlu modifikáciu, čo dovoľuje zamerať sa predovšetkým na samotné modelovanie skúmanej geodetickej siete. Táto voľnosť v definícii matematických modelov umožňuje nielen separované spracovanie a analýzu jednorozmerných, dvojrozmerných, trojrozmerných a štvorrozmerných geodetických

sietí, ale aj ich modifikácie ako aj ich vzájomné kombinovanie s využitím globálnej kovariančnej matice. Matematický model, resp. observačné rovnice tvoriace matematický model, sú v programe implementované vo forme rovníc zapísaných v symbolickom tvare.

Praktickú funkčnosť programu sme demonštrovali na riešení viacepochovej heterogénnej geodetickej siete.

Referencie

1. Čepek, A.: The GNU Gama project – Adjustment of Geodetic Networks, Acta Polytechnica, Vol. 42, No. 3, 2002.
2. Dobeš, J. et. al.: Presné lokálne geodetické siete. Edícia Výskumného ústavu geodézie a kartografie v Bratislave, Bratislava, 1990.
3. Gerháťová, Ľ. Integrované spracovanie družicových a terestrických meraní – dizertačná práca, Bratislava, 2002.
4. Harold, E. R., Means, W. S.: XML in a Nutshell, 2nd Edition, O'Reilly, 2002.
5. Hefty, J.: Globálny polohový systém v štvorrozmernej geodézii, Bratislava, 2003.
6. Hefty, J.: Monitorovanie recentných pohybov litosféry v lokalite atómovej elektrárne Mochovce pomocou geodetických metód, Správa k úlohe v rámci Zmluvy o dielo 04-085-02, STU Bratislava, 2002.
7. Hefty, J.: Geologické hodnotenie oblasti EMO, Meranie recentných pohybov v lokalite EMO, STU Bratislava, 2004.
8. Charamza, F.: GSO – An Algorithm for Solving Linear Least Squares Problems with Possibly Rank Deficient Matrices, Referát VÚGTK, Praha, 1977.
9. Klobušiak, M.: WIGS – Integrované geodetické siete, transformácie, spájanie, porovnanie, výpočet rýchlostí bodov a transformácie S-JTSK do xTRSYY [Programový systém WIGS 4.2002], VÚGK & MaKlo, Bratislava, 1995-2002.
10. Kubáčková, L.: Metódy spracovania experimentálnych meraní, Veda, 1990.