Journal of Risk Analysis and Crisis Response, Vol. 2, No. 2 (August 2012), 146-154

A Risk-Benefit Analysis Model for Project Investment Based on the Normal Distribution

Liwen Chen
School of Economics and Management,Hebei University of Technology, Tianjin 300401, China
Email:lwchen@hebut.edu.cn

Received 17 December 2011
Accepted 6 March 2012

Abstract

Normal distribution formula is very important to analyze the reciprocity between the random event probability and the events. There exists certain kind of reciprocity between random variable that conforms to normal distribution and its parameter. Solutions to apply normal distribution to the evaluation of continuous random variable, optimize the random variables by adopting optimization principles and methods were proposed in this paper. The purpose is to establish random variable standard deviation expected value function that conforms to normal distribution. The reciprocity among random variable, expected value and standard deviation, that is, the "mutual restraint principle of the three elements" were explored in this paper, in order to improve the accuracy and scientificity of decisions of random variable that conforms to normal distribution, avoid decision-making errors, and enhance the policy-making reliability.

KeyWords: Normal distribution, Random variable, Parameter, Reciprocity, Project investment

一个基于正态分布的项目投资风险收益分析模式 [1]

陈立文
河北工业大学经济管理学院，天津 300401

摘要：正态分布公式是分析随机事件概率与事件之间关系的一种重要公式，而符合正态分布的随机变量与其参数存在着某种关系，本文提出如何应用正态分布于连续型随机变量的评价中，采用最优化的原理与方法，进行随机变量的优化研究。目的是建立符合正态分布的随机变量标准差期望值函数，研究了随机变量、期望值、标准差三要素相互关系，即“三要素相互制约准则”。进而为了提高符合正态分布的随机变量决策的正确性和科学性，避免决策失误，提高决策可靠性。

关键词：正态分布，随机变量，参数，相互关系，项目投资

1. 引言

数学的发展来源于社会实践、生活实际，它是人类实践经验的总结，它属于客观世界，并服务于社会。

在概率及数理统计中，一般说来若影响随机变量的因素很多，那么，每个因素单独引起的作用很小，不能起到压倒一切的作用，甚至可以忽略不计，各随机因素相互独立，它们的作用可以叠加，那么这个随机变量服从正态分布。在自然现象和社会现象中，大量的随机变量都服从或近似地服从正态分布。例如：人的身高、农作物收获量、测量某零件长度的误差、海洋波浪的高度、电子管或半导体器件中的热噪声电流或电压、空气分子运动速度等都服从正态分布，因此，正态分布在概率统计中的基本理论及其应用中占有特殊重要地位。本文研究就是为了拓宽正态分布研究的领域[1-3]。

随着项目投资规模越来越大，无论从时间方面还是从空间方面考虑，工程投资项目具有实施周期长、不确定因素多、经济风险和技术风险大，对生态环境的潜在影响严重，在国民经济和社会发展中

[1]**基金项目：**国家自然科学基金(70872029)、河北省百名优秀创新人才支持计划(SPRC016)和河北省人才工程培养经费资助
作者简介：陈立文，男(1964-)，河北工业大学经济管理学院副院长、博士、教授、博士生导师，研究方向：项目管理与风险控制、技术经济与投资决策

占有重要的战略地位等特征。现代工程项目投资规模大，投资大，影响深远，因而所面临的风险种类繁多，各种风险之间的相互关系错综复杂，投资项目从立项到完成后运行的整个周期中都必须重视风险管理。

由于科技的飞速发展及其在社会生产各方面的广泛应用，从而使各种风险因素及风险发生的可能性大大增加，并且扩大了风险事件造成的损失，这使各项目组不得不加强自身的风险管理水平，从而使风险管理的各种手段应用于工程投资项目中。

项目投资经济效果评价指标的风险分析，指的是如何依据各影响因素的概率分布来推求经济效果评价指标的概率分布。有了这个概率分布也就有了项目投资经济效果评价指标的大小及实现其大小的可能性。一般来讲，风险表示一种可能性，衡量其大小通常用可能出现风险的概率表示，由于概率的大小反映了风险的大小，所以产生风险的关键性变量可以由期望值和方差两个特征参数所反映的概率分布表达式中确定出来。如果我们给出项目投资经济效果评价指标与累积概率的关系曲线，也就有了风险发生的全部信息，这样决策者也就可以很方便地进行决策了，会做到胸中有数，措施得当，因此，它为合理决策提供了依据[4]。

经济效果评价指标是多种多样的，它们从不同角度反映了项目投资的经济性，这些指标主要可以分成两大类：一类是以货币单位计量的价值型指标，如净现值、净年值、费用现值、费用年值等；另一类是反映资金利用效率的效率型指标，如投资收益率、内部收益率、净现值指数等。

一个理智决策人对项目投资决策的意愿是选取收益相对高，风险相对小的项目。也就是要求项目投资的经济效果风险收益最好，那么，如何在给定的条件下，即收益、风险一定的条件下，确定风险收益条件下的最优经济效果，以及在最优经济效果的条件下如何确定收益和风险。

本文提出如何应用正态分布于连续型随机变量的评价中，采用最优化的原理与方法，进行项目投资经济效果的随机变量优化研究。目的是建立符合正态分布的项目投资经济效果随机变量标准差期望值函数，研究了随机变量、期望值、标准差三要素相互关系，即“三要素相互制约准则”。进而为了提高符合正态分布的随机变量决策的正确性和科学性，避免决策失误，提高决策可靠性。

2. 符合正态分布的随机变量标准差期望值函数的建立

在项目不确定风险分析中，当某项目投资经济效果随机变量期望值相对较低，如净现值(NPV)，需进一步了解项目经济效益发生在某一区间的可能性有多大，则应计算这个区间内所有可能取值的概率之和，即累积概率，用P(NPV≥0)表示。

设符合正态分布的某项目投资经济效果随机变量为z，实现其大小的累积概率为$p(z)$，其密度函数为$f(z)$，分布函数为$F(z)$，则：

$$f(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(z-\mu)^2}{2\sigma^2}} \tag{1}$$

$$F(z)=\int_{-\infty}^{z}f(t)\mathrm{d}t \tag{2}$$

$$\begin{aligned}p(z)&=\int_{z}^{+\infty}f(t)\mathrm{d}t\\&=1-\int_{-\infty}^{z}f(t)\mathrm{d}t\\&=1-F(z)\end{aligned} \tag{3}$$

则实现该随机变量z的期望值为：

$$\begin{aligned}g_1(z)&=\int_{z}^{+\infty}tf(t)\mathrm{d}t\\&=\int_{-\infty}^{+\infty}tf(t)\mathrm{d}t-\int_{-\infty}^{z}tf(t)\mathrm{d}t\\&=\mu-\int_{-\infty}^{z}tf(t)\mathrm{d}t\\&=\mu-\int_{-\infty}^{z}t\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}t\\&=\mu-\int_{-\infty}^{\frac{z-\mu}{\sigma}}\frac{\mu+\sigma Y}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{Y^2}{2}}\mathrm{d}Y\\&=\mu-\int_{-\infty}^{\frac{z-\mu}{\sigma}}\frac{\mu}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{Y^2}{2}}\mathrm{d}Y-\int_{-\infty}^{\frac{z-\mu}{\sigma}}\frac{\sigma Y}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{Y^2}{2}}\mathrm{d}Y\\&=\mu-\mu\varphi\left(\frac{z-\mu}{\sigma}\right)+\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(z-\mu)^2}{2\sigma^2}}\\&=\mu\varphi\left(\frac{\mu-z}{\sigma}\right)+\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(z-\mu)^2}{2\sigma^2}}\end{aligned} \tag{4}$$

称$g_1(z)$为该随机变量z的标准差期望值函数。$g_1(z)$有唯一最大值(证明见附录1)。

则最低实现该随机变量 z 的期望值为：

$$\begin{aligned} g_2(z) &= \int_z^{+\infty} z f(t)\mathrm{d}t \\ &= z\int_z^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t \\ &= zp(z) \\ &= z(1-F(z)) \end{aligned} \tag{5}$$

称 $g_2(z)$ 为该随机变量 z 的最低标准差期望值函数。$g_2(z)$ 也有唯一最大值(证明见附录2)。

由(4)式知：

$$g_1(\mu) = \frac{\mu}{2} + \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \tag{6}$$

(6)式说明随机变量 z 的标准差期望值函数 $g_1(z)$，当 $z=\mu$ 时，$g_1(\mu)$ 既与期望值 μ 有关系，同时与标准差 σ 也有关系。

由(5)式知：

$$\begin{aligned} g_2(\mu) &= \int_z^{+\infty} z f(t)\mathrm{d}t \\ &= \mu\int_\mu^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t \\ &= \frac{\mu}{2} \end{aligned} \tag{7}$$

(7)式说明随机变量 z 的最低标准差期望值函数 $g_2(z)$，当 $z=\mu$ 时，$g_2(\mu)$ 只与期望值 μ 有关系。

比较(6)式与(7)式可得：

$$g_1(\mu) - g_2(\mu) = \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \tag{8}$$

3. 随机变量、期望值、标准差三要素相互关系研究

要满足最低标准差期望值函数条件下的随机变量 z 最优时，需使：

$$g_2'(z) = 0 \tag{9}$$

即：

$$zf(z) = 1 - \int_{-\infty}^{z} f(t)\mathrm{d}t \tag{10}$$

将(1)式代入(10)式得：

$$\frac{z}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(z-\mu)^2}{2\sigma^2}} = 1 - \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} \mathrm{d}t \tag{11}$$

由(11)式可知，在最低标准差期望值函数条件下，随机变量 z、期望值 μ、标准差 σ 三要素之间存在着相互制约的关系，(11)式没有解析解，但可采用计算机可以求出(11)的数值解，三者之间的关系如图1所示。

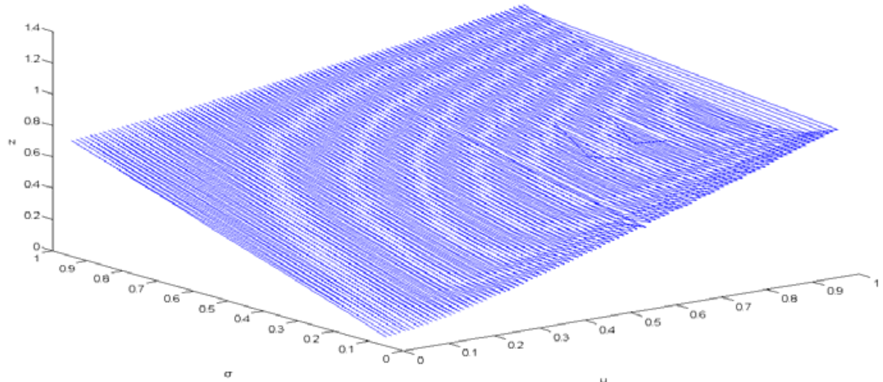

图1 随机变量 z、期望值 μ、标准差 σ 三要素之间相互制约的关系图

在三者之间，只有两个要素保持独立或不固定，最后一个要素必然是由已决定的两个要素中推出的值，即它们之间存在着两个自由度。即三要素之间存在着相互制约的关系，称上述关系为"三要素相互制约准则"。由此可知，对于符合正态分布的随机变量 z：

①给定一组参数 μ、σ 后，在满足随机变量最低标准差期望值函数的条件下，必存在唯一的随机变量 z 的值。

②要达到一定的随机变量z，在满足最低标准差期望值函数的条件下，给定随机变量z的期望值μ，可唯一地确定标准差σ的值，二者关系如图2所示。

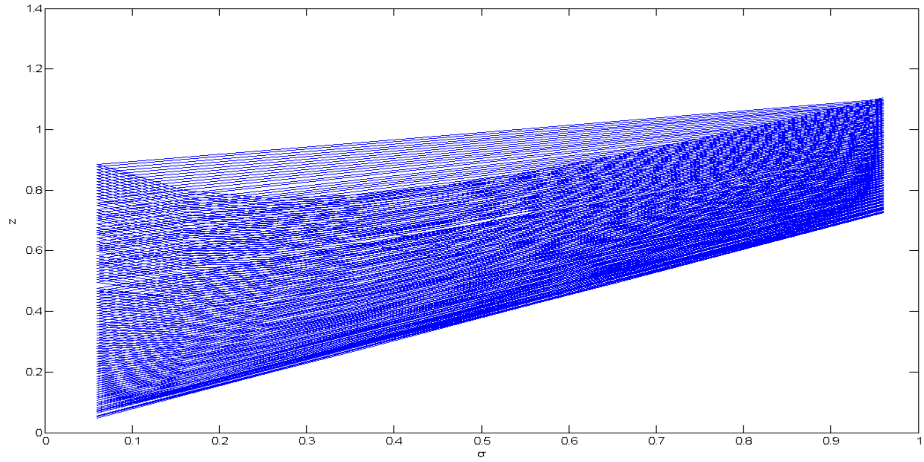

图2 随机变量z与标准差σ二要素之间相互制约的关系图

③要达到一定的随机变量z，在满足最低标准差期望值函数的条件下，给定随机变量z的标准差σ，可唯一地确定期望值μ的值，二者关系如图3所示。

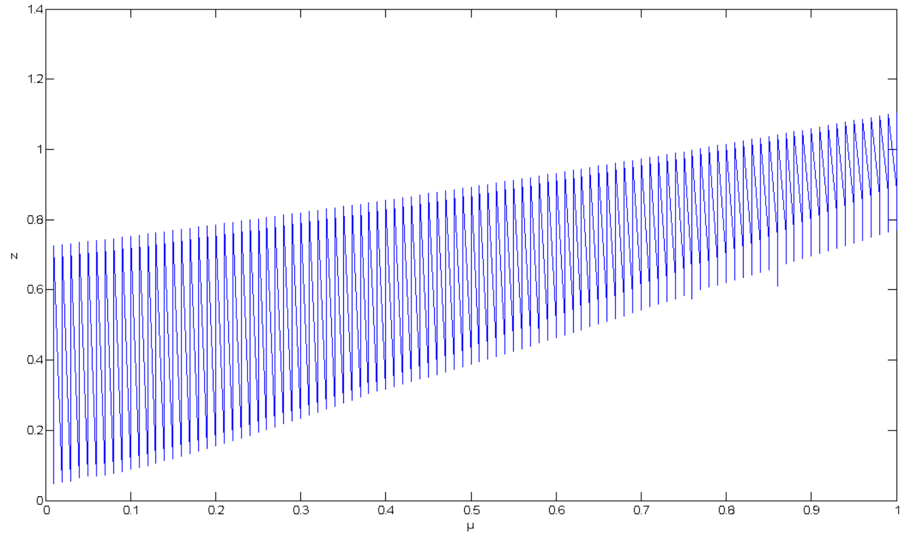

图3 随机变量z与期望值μ二要素之间相互制约的关系图

当$z=\mu$时，(11)式就可简化成(12)式：

$$\frac{\mu}{\sqrt{2\pi\sigma}}=0.5 \tag{12}$$

则离散系数为：

$$\frac{\sigma}{\mu}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}=0.7979 \tag{13}$$

(13)式说明，当随机变量z取期望值μ标准差时，单位期望值的标准差为一常数，即离散系数约为0.7979。离散系数的大小说明了分布离散程度，离散系数越大说明分布越离散，否则分布越集中。这个离散系数对符合正态分布的随机变量标准差期望值函数的决策提供了一个参考依据。这个系数对

项目投资风险收益等问题研究具有非常重要的意义。

4. 计算实例

已知某项目投资收益率z服从正态分布，其期望值μ=24.8%，标准差σ=7.9%，现作下列优化及测算，估计出该项目投资的风险性。计算可得如下结果：

①绘制投资收益率z～累计概率$p(z)$的关系曲线

投资收益率z～累计概率$p(z)$关系为：

$$p(z)=\int_z^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$$
$$=\int_z^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(z-\mu)^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}t$$
$$=1-\phi\left(\frac{z-\mu}{\sigma}\right)$$

通过查标准正态分布表，可求得投资收益率z、累计概率$p(z)$、风险收益函数$g_1(z)$，最低风险收益函数$g_2(z)$的关系列入表1中：

表1 $p(z)$、$g_1(z)$及$g_2(z)$计算表

z（100%）	0	0. 05	0. 10	0. 15	0. 16	0. 17	0. 18	0. 19
$p(z)$（100%）	0. 999	0. 993	0. 970	0. 892	0. 866	0. 839	0. 805	0. 767
$g_1(z)$	0. 2490	0. 2480	0. 2460	0. 2360	0. 2320	0. 2270	0. 2210	0. 2150
$g_2(z)$	0	0. 0397	0. 0970	0. 1338	0. 1386	0. 1326	0. 1339	0. 1359
z（100%）	0. 20	0. 21	0. 22	0. 23	0. 24	0. 248	0. 25	0. 26
$p(z)$（100%）	0. 728	0. 685	0. 638	0. 590	0. 530	0. 500	0. 390	0. 330
$g_1(z)$	0. 2070	0. 1980	0. 1880	0. 1770	0. 1650	0. 1560	0. 1530	0. 1400
$g_2(z)$	0. 1356	0. 1339	0. 1303	0. 1357	0. 1296	0. 1230	0. 1225	0. 1133
z（100%）	0. 27	0. 28	0. 29	0. 30	0. 31	0. 35	0. 50	1
$p(z)$（100%）	0. 371	0. 332	0. 298	0. 255	0. 216	0. 099	0. 001	0
$g_1(z)$	0. 1270	0. 1140	0. 1010	0. 0890	0. 0770	0. 0380	0. 0004	0
$g_2(z)$	0. 1002	0. 0958	0. 0863	0. 0765	0. 0670	0. 0337	0. 0004	0

绘制z～$p(z)$关系曲线，如图4所示。

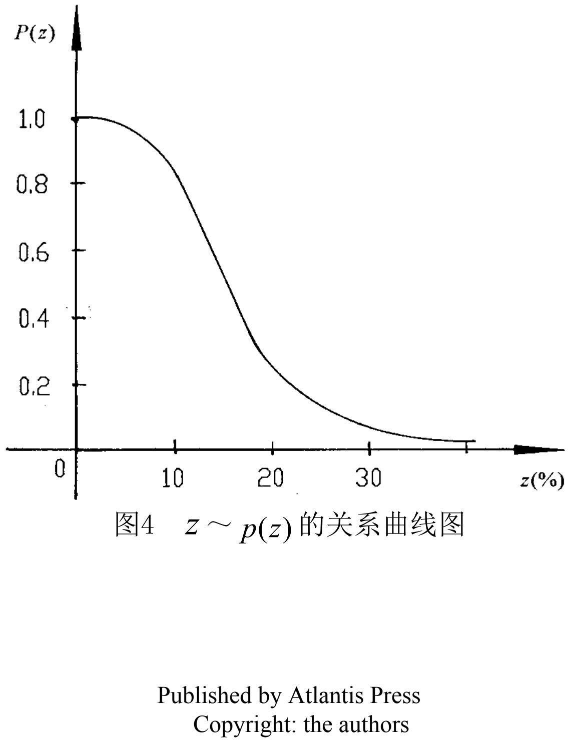

图4 z～$p(z)$的关系曲线图

这条关系曲线不仅反映了项目投资经济效果的大小，同时也反映了实现其大小的可能性，决策者依据这条曲线做决策会胸中有数，措施得当，因此，它为合理决策提供了依据。

②建立风险期望收益函数 $g_1(z)$

$$g_1(z)=\int_z^{+\infty} tf(t)dt$$

$$=\int_z^{+\infty} t\frac{1}{\sqrt{2\pi}\times 0.079}e^{-\frac{(t-0.248)^2}{2\times 0.079^2}}dt$$

③建立风险最低期望收益函数 $g_2(z)$

$$g_2(z)=z\big(1-F(z)\big)$$

$$=z\left(1-\int_{-\infty}^{z} f(t)\mathrm{d}t\right)$$

$$=z\left(1-\int_{-\infty}^{z}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}t\right)$$

$$=z\left(1-\int_{-\infty}^{z}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\times 0.079}e^{-\frac{(t-0.248)^2}{2\times 0.079^2}}\mathrm{d}t\right)$$

④求最优值 $\max g_1(z), \max g_2(z)$ 及最佳经济效果 z_1^*, z_2^*

$$\max_{Z_1^*=0} g_1(z)=\mu+\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{\mu^2}{2\sigma^2}}-\mu\phi\left(-\frac{\mu}{\sigma}\right)$$

$$=0.248+\frac{0.079}{\sqrt{2\pi}}\times e^{-\frac{0.248^2}{2\times 0.079^2}}-0.248\phi\left(-\frac{0.248}{0.079}\right)$$

$$=0.2485$$

$$\max_{Z_2^*=0.19} g_2(z)=0.1359$$

⑤绘制风险期望收益函数 $g_1(z)$ 和风险最低期望收益函数 $g_2(z)$ 的曲线

$g_1(z)$ 的关系曲线类同示意图5， $g_2(z)$ 的关系曲线类同示意图6。

⑥求投资收益率在 $[a,b]$ 区间（设[10%, 15%]）的概率

由概率论理论得：

$$p(a<z<b)=\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$$

$$=\phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right)-\phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$$

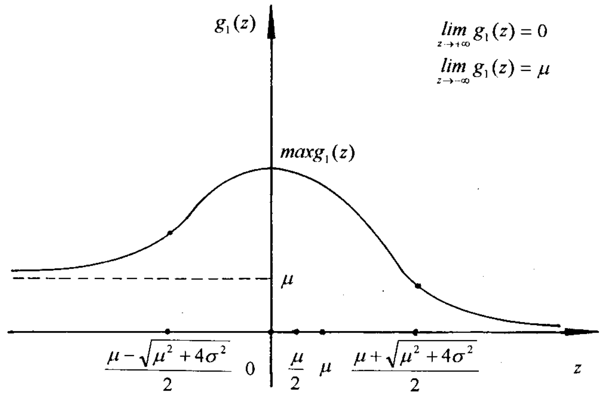

图5　$g_1(z)$ 示意图

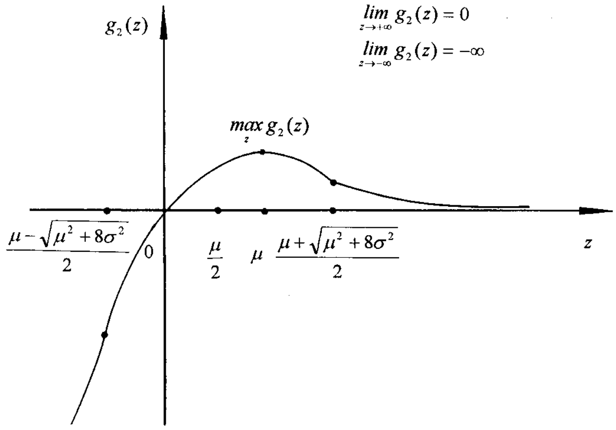

图6　$g_2(z)$ 示意图

则

$$p(10\%<z<15\%)=\int_{10\%}^{15\%} f(t)\mathrm{d}t$$

$$=\phi\left(\frac{0.15-0.248}{0.079}\right)-\phi\left(\frac{0.10-0.248}{0.079}\right)$$

$$=\phi(-1.24)-\phi(-1.87)$$

$$=0.0768$$

这说明项目投资收益率在区间[10%, 15%]的概率为7.68%。

⑦求投资收益率小于零的概率

$$p(-\infty<z<0)=\phi\left(\frac{0-\mu}{\sigma}\right)-\phi\left(\frac{-\infty-\mu}{\sigma}\right)$$

$$=\phi\left(-\frac{0.248}{0.079}\right)-0$$

$$=\phi(-3.14)$$

$$=0.0009$$

这说明该项目投资收益率小于零的概率约为0.09%，即：该项目亏损的可能性只有0.09%，这是一种小概率事件，因此，正常情况下可以认为该项目是不会发生亏损的。

⑧求投资收益率不小于某个值(设 20%)的概率

$$p(20\% < z < +\infty) = \phi\left(\frac{+\infty-\mu}{\sigma}\right) - \phi\left(\frac{0.20-\mu}{\sigma}\right)$$

$$= 1-\phi\left(\frac{0.20-0.248}{0.079}\right)$$

$$= 0.7291$$

这说明该项目投资收益率达到或超过20%的概率为72.91%。

⑨如果项目有亏损，求平均的投资收益(亏损)率

由条件期望得：

$$E(z|z<0) = \frac{\int_{-\infty}^{0} tf(t)\mathrm{d}t}{\int_{-\infty}^{0} f(t)\mathrm{d}t}$$

$$= \frac{\int_{-\infty}^{-\frac{\mu}{\sigma}} (t\sigma+\mu)f(t\sigma+\mu)\mathrm{d}t}{p\left(z<-\frac{\mu}{\sigma}\right)}$$

$$= \mu - \frac{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sigma e^{-\frac{\mu^2}{2\sigma^2}}}{\phi\left(-\frac{\mu}{\sigma}\right)}$$

$$= 0.248 - \frac{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\times 0.079\times e^{-\frac{0.248^2}{2\times 0.079^2}}}{0.0009}$$

$$= -0.004$$

这说明，如果该项目可能出现各种亏损，那么该项目投资平均亏损率为 0.4%。

⑩如果项目有收益，求平均的投资收益率

由条件期望得：

$$E(z|z>0) = \frac{\int_{0}^{+\infty} tf(t)\mathrm{d}t}{\int_{0}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t}$$

$$= 1-E(z|z>0)$$

$$= \mu + \frac{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sigma e^{-\frac{\mu^2}{2\sigma^2}}}{1-\phi\left(-\frac{\mu}{\sigma}\right)}$$

$$= 0.248 + \frac{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\times 0.079\times e^{-\frac{0.248^2}{2\times 0.079^2}}}{0.0009}$$

$$= 0.24823$$

这说明该项目若有收益，则该项目平均收益率为24.823%。

5. 结论

本文采用最优化的原理与方法，对符合正态分布的项目投资经济效果随机变量标准差期望值函数进行了深入研究，其目的是为了提高符合正态分布的项目投资经济效果随机变量决策的正确性和科学性，避免决策失误，提高决策可靠性。本文的主要工作有：(1)从理论上证明了所建的符合正态分布的项目投资经济效果随机变量标准差期望值函数有唯一最大值，从而为决策者提供了可靠的依据。(2)提出了符合正态分布的项目投资经济效果随机变量z、期望值μ、标准差σ三要素之间相互制约的关系，即决策三要素相互制约的准则。(3)项目投资经济效果随机变量z的标准差期望值函数$g_1(z)$与最低标准差期望值函数$g_2(z)$，当$z=\mu$时，$g_1(\mu)-g_2(\mu)=\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}$。(4)提出了符合正态分布的项目投资经济效果随机变量取期望值时，其离散系数为一定值，即约为0.7979。(5)通过某项目投资收益率z服从正态分布，在已知其期望值和标准差情况下估计出了该项目投资的风险性。

参考文献

[1] 浙江大学数学系高等数学教研组编．概率论与数理统计[M]．人民教育出版社，1982.8

[2] 周誓达编著．概率论与数理统计[M]．中国人民大学出版社，2005.6

[3] 陈梅荪．论正态分布曲线与太极图的联系性及物理意义[J]．井冈山师范学院学报，2001，22(5)：4-5+7

[4] 陈立文著．项目投资风险分析理论与方法[M]．北京：机械工业出版社，2004.9

附录1：

定理1 满足(4)式函数 $g_1(z)$ 有唯一最大值。

证明 为了证明(4)式函数 $g_1(z)$ 有唯一最大值，现在先来研究函数 $g_1(z)$ 的极值，由(4)式知：

$$
\begin{aligned}
g_1(z) &= \int_z^{+\infty} tf(t)\mathrm{d}t \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)\mathrm{d}t - \int_{-\infty}^{z} tf(t)\mathrm{d}t \\
&= \mu - \int_{-\infty}^{z} tf(t)\mathrm{d}t \\
&= \mu - \int_{-\infty}^{z} t\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}t \\
&= \mu - \int_{-\infty}^{\frac{z-\mu}{\sigma}} \frac{\mu+\sigma Y}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{Y^2}{2}}\mathrm{d}Y \\
&= \mu - \int_{-\infty}^{\frac{z-\mu}{\sigma}} \frac{\mu}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{Y^2}{2}}\mathrm{d}Y - \int_{-\infty}^{\frac{z-\mu}{\sigma}} \frac{\sigma Y}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{Y^2}{2}}\mathrm{d}Y \\
&= \mu - \mu\varphi\left(\frac{z-\mu}{\sigma}\right) + \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(z-\mu)^2}{2\sigma^2}} \\
&= \mu\varphi\left(\frac{\mu-z}{\sigma}\right) + \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(z-\mu)^2}{2\sigma^2}}
\end{aligned}
\tag{14}
$$

为了判断函数 $g_1(z)$ 的特性，先来求 $g_1'(z)$、$g_1''(z)$：

$$g_1'(z) = -zf(z) \tag{15}$$

由于 $f(z) > 0$，所以说 $g_1'(z)$ 的正负性是由 z 的正负性决定的，即：

$$\mathrm{sgn}(g_1'(z)) = \begin{cases} 1 & z < 0 \\ 0 & z = 0 \\ -1 & z > 0 \end{cases} \tag{16}$$

此处 $\mathrm{sgn}(x)$ 为符号函数，即：

$$\mathrm{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases} \tag{17}$$

这说明函数 $g_1(z)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调增加，在 $(0,+\infty)$ 上单调减少，在 $z=0$ 处取得唯一最大值，且为：

$$
\begin{aligned}
\max_z g_1(z) &= g_1(0) \\
&= \mu - \int_{-\infty}^{0} tf(t)\mathrm{d}t \\
&= \mu - \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{0} te^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}t \\
&= \mu - \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{-\frac{\mu}{\sigma}} (y\sigma+\mu)e^{-\frac{y^2}{2}}\sigma\mathrm{d}y \\
&= \mu - \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\left(\int_{-\infty}^{-\frac{\mu}{\sigma}} y\sigma^2 e^{-\frac{y^2}{2}}dy + \int_{-\infty}^{-\frac{\mu}{\sigma}} \mu\sigma e^{-\frac{y^2}{2}}\mathrm{d}y\right) \\
&= \mu + \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{-\frac{\mu}{\sigma}} e^{-\frac{y^2}{2}}\mathrm{d}\left(-\frac{y^2}{2}\right) - \frac{\mu}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{-\frac{\mu}{\sigma}} e^{-\frac{y^2}{2}}\mathrm{d}y \\
&= \mu + \frac{\mu}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}\Bigg|_{-\infty}^{-\frac{\mu}{\sigma}} - \mu\phi\left(-\frac{\mu}{\sigma}\right) \\
&= \mu + \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{\mu^2}{2\sigma^2}} - \mu\phi\left(-\frac{\mu}{\sigma}\right) \\
&= \mu\phi\left(\frac{\mu}{\sigma}\right) + \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{\mu^2}{2\sigma^2}}
\end{aligned}
\tag{18}
$$

证毕。

附录 2：

定理2 满足(5)式函数$g_2(z)$有唯一最大值。

证明 为了证明(5)式函数$g_2(z)$有唯一最大值，现在先来研究函数$g_2(z)$的极值，为此先来求$g_2'(z)$、$g_2''(z)$：

$$g_2'(z)=1-F(z)-zf(z) = 1-\int_{-\infty}^{z} f(t)dt - zf(z) \tag{19}$$

$$g_2''(z)=-2f(z)-zf'(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma^3} e^{-\frac{(z-\mu)^2}{2\sigma^2}}\left(z^2-\mu z-2\sigma^2\right) \tag{20}$$

令

$$\varphi_2(z)=z^2-\mu z-2\sigma^2 \tag{21}$$

由于$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma^3} e^{-\frac{(z-\mu)^2}{2\sigma^2}}>0$，所以$g_2''(z)$的正负性是由$\varphi_2(z)$的正负性决定的，即：

$$\mathrm{sgn}(g_2''(z))=\begin{cases}1 & \varphi_2(z)>0\\ 0 & \varphi_2(z)=0\\ -1 & \varphi_2(z)<0\end{cases} \tag{22}$$

由于$\varphi_2(z)=0$的两个根$z_{1,2}=\frac{\mu\pm\sqrt{\mu^2+8\sigma^2}}{2}$，又由于$g_2(z)$连续可微，则(22)式又可以写成下式：

$$\mathrm{sgn}(g_2''(z))=\begin{cases}1 & z<\frac{\mu-\sqrt{\mu^2+8\sigma^2}}{2}, z>\frac{\mu+\sqrt{\mu^2+8\sigma^2}}{2}\\ 0 & z_{1,2}=\frac{\mu\pm\sqrt{\mu^2+8\sigma^2}}{2}\\ -1 & \frac{\mu-\sqrt{\mu^2+8\sigma^2}}{2}<z<\frac{\mu+\sqrt{\mu^2+8\sigma^2}}{2}\end{cases} \tag{23}$$

这说明：

$$g_2(z)=\begin{cases}\textit{Convex function} & \mathrm{sgn}(g_2''(z))=1\\ \textit{Inflection point value} & \mathrm{sgn}(g_2''(z))=0\\ \textit{Concave function} & \mathrm{sgn}(g_2''(z))=-1\end{cases} \tag{24}$$

又由于$z\le 0$时，$1-F(z)>0$ $f(z)>0$，$zf(z)\le 0$，$-zf(z)\ge 0$，则$g_2'(z)>0$，所以当$z\le 0$时，$g_2(z)$为单调增函数，也就是说$g_2(z)$在$\left(-\infty,\frac{\mu+\sqrt{\mu^2+8\sigma^2}}{2}\right]$区间内有唯一最大值。

当$z>\frac{\mu+\sqrt{\mu^2+8\mu^2}}{2}$时，$g_2''(z)>0$，所以$g_2(z)$是凸函数，又由于：

$$\begin{aligned}\lim_{z\to+\infty} g_2(z) &= \lim_{z\to+\infty} z(1-F(z))\\ &=\lim_{z\to+\infty} z\left(1-\int_{-\infty}^{z} f(t)\mathrm{d}t\right)\\ &=\lim_{z\to+\infty}\frac{1-\int_{-\infty}^{z} f(t)\mathrm{d}t}{\frac{1}{z}}\\ &=\lim_{z\to+\infty} z^2 f(z)\\ &=\lim_{z\to+\infty}\frac{z^2}{\sqrt{2\pi}\sigma e^{\frac{(z-\mu)^2}{2\sigma^2}}}\\ &=\lim_{z\to+\infty}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sigma}{\left(1-\frac{\mu}{z}\right)e^{\frac{(z-\mu)^2}{2\sigma^2}}}=0\end{aligned} \tag{25}$$

因此，函数$g_2(z)$在$\left[\frac{\mu+\sqrt{\mu^2+8\sigma^2}}{2},+\infty\right)$区间内单调递减，又由于$g_2(z)$连续可微，则$g_2(z)$在$(-\infty,+\infty)$内有唯一最大值，且在$\left[0,\frac{\mu+\sqrt{\mu^2+8\sigma^2}}{2}\right]$区间内取得。

证毕。