

## **METODA WYZNACZANIA KSZTAŁTU NARZĘDZI DLA OSIOWO - SYMETRYCZNYCH PROCESÓW OBRÓBKI PLASTYCZNEJ**

**TADEUSZ SÓLKOWSKI**

*Politechnika Krakowska*

Do wyznaczania kształtu narzędzi zastosowano metodę charakterystyk dla przypadku osiowo - symetrycznego stanu naprężenia i odkształcenia. Zaproponowano procedurę numerycznego rozwiązywania zagadnień brzegowych mieszanych w przypadku jeśli przebieg brzegu zagadnienia nie jest znany, również z uwzględnieniem tarcia. Przedstawiono przykłady rozwiązań statycznie i kinematycznie dopuszczalnych dla różnych procesów wyciskania. Rozwiązania pozwoliły wyznaczyć opływowe kształty stempli do wyciskania przeciwbieżnego i profile matryc do wyciskania współbieżnego o minimalnym zużyciu.

### **1. Wstęp**

Większość teoretycznych rozwiązań procesów obróbki plastycznej jest wykonana przy znanym kształcie narzędzi a rozwiązanie ma na celu wyznaczenie nacisków i sił niezbędnych do przeprowadzenia procesu. Dla praktyki, ważniejszy jest często przypadek, gdy przy założonych warunkach przebiegu odkształcenia należy wyznaczyć kształt geometryczny narzędzia, który te warunki zrealizuje.

Kryteria wyjściowe przyjmowane do wyznaczania profili narzędzi mogą być różne. Często jest to minimalizacja siły odkształcającej, ale bierze się również pod uwagę długość profilu narzędzia, rozkład prędkości wypływu materiału ze strefy odkształcenia, warunki wpływające na zużycie narzędzia i inne.

Najwięcej rozwiązań, których wynikiem jest wyznaczenie profilu narzędzia wykonano dla procesu ciągnięcia taśmy, dla którego zaproponowano kilka typów idealnych profili ciągań [1]. Dla warunków płaskiego stanu odkształcenia wyznaczono opływowy kształt ciągań, który został wykreślony z warunku, aby kierunek naprężenia głównego był wszędzie styczny do tego profilu. Zastosowanie tego opływowego profilu jest praktycznie bardzo ograniczone gdyż jest on zbyt długi. Richmond i Morrison [2] zaproponowali opływowe kształty ciągań dla procesów przebiegających w warunkach osiowej symetrii, które nazwali ciągańkami o minimalnej długości. Wyznaczony profil powstał jako trajektoria, wzdłuż której

naprężenie główne jest styczne do narzędzia. Warunki geometryczne przedstawionego rozwiązania nie pozwalają przystosować go do innych ważnych procesów osiowo-symetrycznych jak np. wyciskanie.

W niniejszej pracy podjęto próbę opracowania procedury pozwalającej wyznaczać profile narzędzi dla różnych procesów. Zasada proponowanej metody polega na przyjęciu założeń pozwalających rozwiązać zagadnienie brzegowe mieszane przylegające do profilu narzędzia z równoczesnym wyznaczaniem tego profilu.

Efektywność procedury zilustrowano przykładami rozwiązań.

Wyznaczono opływowe kształty stempli do wyciskania przeciwbieżnego oraz kształty matryc do wyciskania współbieżnego zapewniające minimalne zużycie.

Dla wyznaczonych profili uzyskano rozwiązania statyczne i kinematyczne.

## 2. Równania podstawowe i sformułowanie zagadnienia

Zależności podstawowe i sposoby rozwiązywania zagadnień brzegowych przyjęto jak w monografii [3].

Przyjmujemy model materiału sztywno-plastycznego spełniającego warunek plastyczności Treski i postulat Haara - Karmana. Stan naprężenia opisany jest składowymi  $\sigma_r$ ,  $\sigma_\theta$ ,  $\sigma_z$ ,  $\tau_{rz}$  a prędkości płynięcia przez składowe  $v_r$  i  $v_z$ . Naprężenie pośrednie  $\sigma_2 = \sigma_\theta$  jest równe większemu naprężeniu głównemu  $\sigma_2 = \sigma_1$  przy płynięciu na zewnątrz a mniejszemu  $\sigma_2 = \sigma_3$  przy płynięciu do wewnątrz układu współrzędnych. Równania charakterystyk i związki wzdłuż nich mają postać:

$$\frac{dz}{dr} = \operatorname{tg} \vartheta, \quad dp - 2kd\vartheta = \frac{k}{r}(dz \pm dr), \quad (2.1)$$

$$\frac{dz}{dr} = -\operatorname{ctg} \vartheta, \quad dp + 2kd\vartheta = -\frac{k}{r}(dz \mp dr), \quad (2.2)$$

gdzie:  $p = (\sigma_1 + \sigma_3)/2$ , a  $\vartheta$  jest kątem jaki tworzy normalna do płaszczyzny maksymalnych naprężeń stycznych z osią  $r$ . Charakterystyki dla prędkości pokrywają się z charakterystykami dla naprężeń, a związki wzdłuż nich mają postać:

$$dv_r \cos \vartheta + dv_z \sin \vartheta = -\frac{v_r}{2r}(dr \cos \vartheta + dz \sin \vartheta), \quad (2.3)$$

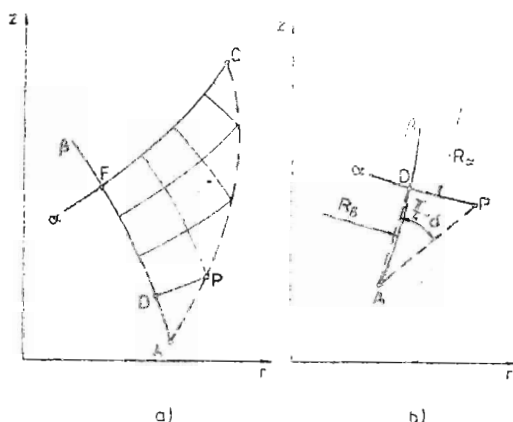
$$dv_r \sin \vartheta - dv_z \cos \vartheta = \frac{v_r}{2r}(dz \cos \vartheta - dr \sin \vartheta). \quad (2.4)$$

Rozwiązanie procesu plastycznego płynięcia sprowadza się do rozwiązywania zagadnień brzegowych metodą numeryczną.

Rozwiązanie rozpoczynamy od zagadnienia brzegowego Cauchy'ego przylegającego do linii, wzdłuż której znamy stan naprężenia. Natomiast rozpoczęcie rozwiązania od linii styku strefy odkształcenia z narzędziem wymaga znajomości z góry

kształtu tej linii, a więc tego typu rozwiązanie nie może służyć do wyznaczenia profilu narzędzia.

Rozpoczynając od zagadnienia brzegowego Cauchy'ego na wyjściu narzędzia i kontynuując następnie zagadnienie charakterystyczne dochodzimy do sytuacji, w której mamy daną charakterystykę  $AF$  (rys.1a) i należy wykreślić nieznaną profil  $AC$  przez rozwiązanie zagadnienia zmieszanego  $AFC$ .



Rys. 1.

W typowych zagadnieniach brzegowych mieszanych znamy równanie linii  $AC$  oraz dysponujemy informacją o stanie naprężenia wzdłuż tej linii. W przypadku poszukiwania profilu narzędzia nie znamy położenia linii  $AC$  i aby ją wyznaczyć musimy przyjąć dodatkowe założenia.

W rozwiązaniach omawianych w pracach [1,2] przyjmuje się, że charakterystyka  $FC$  w zagadnieniu tego typu jest prostoliniowa i biegnie pod kątem  $\pi/4$  do osi symetrii narzędzia  $r = 0$ . Nie jest to jednak warunek zawsze konieczny do spełnienia, a przyjęcie go daje w wyniku bardzo długie profile narzędzi.

W celu wyznaczenia profili narzędzi, w niniejszej pracy przyjęto dwa typy procedur w zależności od geometrii procesu i warunków tarcia. Pierwszy sposób stosujemy gdy mamy określoną współrzędną  $r_C$  punktu  $C$  (jest to np. oś symetrii) a kąt  $\vartheta_C$  w tym punkcie jest znany. W celu obliczenia pierwszego przybliżenia współrzędnych punktu  $P$  (rys.1a) odcinki krzywoliniowe elementu  $ADP$  zastępujemy prostymi i wykorzystujemy dwa związki - równanie charakterystyki  $\alpha$  dla odcinka  $DP$  oraz warunek, że charakterystyka  $AD$  ma podchodzić do wyznaczonego brzegu pod kątem  $\pi/4$  z uwzględnieniem warunku ortogonalności  $AD$  i  $DP$ :

$$z_P - z_D = (r_P - r_D) \operatorname{tg} \vartheta_D, \quad (2.5)$$

$$(r_P - r_D)^2 + (z_P - z_D)^2 = (r_D - r_A)^2 + (z_D - z_A)^2. \quad (2.6)$$

Z powyższych równań obliczamy  $r_P$ ,  $z_P$ . Kąt  $\vartheta_P$  nie jest znany. W tym przypadku znamy natomiast wartość kąta  $\vartheta$  w punkcie  $C$ . Możemy założyć sposób zmiany kąta  $\vartheta$  wzdłuż  $AC$ , najlepiej zmianę równomierną, czyli na odcinku  $AP$  nastąpi zmiana kąta  $\vartheta$  o wartość  $\Delta\vartheta = (\vartheta_C - \vartheta_A)/(n-1)$ , gdzie  $n$  jest ilością punktów węzłowych wzdłuż  $AF$ , a także wzdłuż  $AC$ . Znając już kąt  $\vartheta_P$  rozwiązujemy odwrotnie zagadnienie Cauchy'ego dla odcinka  $AP$  aby sprawdzić czy zgadzają się teraz współrzędne punktu  $D$ . Na tej podstawie wprowadzamy drugie i dalsze przybliżenia dla punktu  $P$ . Kontynuując, rozwiązujemy całe zagadnienie  $AFC$ .

Drugi przypadek zagadnienia mieszanego  $AFC$  występuje, gdy na brzegu  $AC$  mamy uwzględnić tarcie. Wychodzimy wówczas z danych o stanie naprężenia w punkcie  $A$  i przyjętego prawa tarcia. Przyjmujemy prawo tarcia suchego Coulomba  $t = \mu\sigma_n$ . Odcinek  $AD$  ma teraz podchodzić do wyznaczonego brzegu pod kątem  $\pi/4 - \delta$  (rys.1b). Wartość kąta  $\delta$  znajdujemy metodą kolejnych przybliżeń. W pierwszym przybliżeniu  $\delta' = \frac{1}{2} \arcsin \mu$ . Następnie obliczymy  $\sigma'_{nA} = p_A - k \cos 2\delta'$ , ponownie  $\delta'' = \frac{1}{2} \arcsin(\mu\sigma'_{nA}/k)$ , itd., aż różnica między kolejnymi przybliżeniami będzie odpowiednio mała. W celu obliczenia pierwszego przybliżenia współrzędnych punktu  $P$  wykorzystujemy dwa związki - równanie charakterystyki dla odcinka  $DP$  oraz stosunek długości odcinków  $DP$  do  $AD$ , który po uwzględnieniu warunku ortogonalności jest równy  $\text{tg}(\pi/4 - \delta)$ .

Mamy więc równanie (2.5) i związek:

$$\sqrt{(r_P - r_D)^2 + (z_P - z_D)^2} = \sqrt{(r_D - r_A)^2 + (z_D - z_A)^2} \text{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \delta\right). \quad (2.7)$$

Obliczamy  $r_P$  i  $z_P$ . Kąt  $\vartheta_P$  nie jest znany i nie posiadamy żadnej informacji o zmianie  $\vartheta$  wzdłuż  $AC$ .

W celu rozwiązania zagadnienia w tym przypadku, w niniejszej pracy przyjęto, że siatka ma charakter regularny i promienie krzywizn odcinków charakterystyk  $AD$  i  $DP$  są równe. Wprowadza to dodatkową zależność  $(d\vartheta_\alpha/dS_\alpha) = -(d\vartheta_\beta/dS_\beta)$  pozwalająca przyjąć wartość  $\vartheta_P$ .

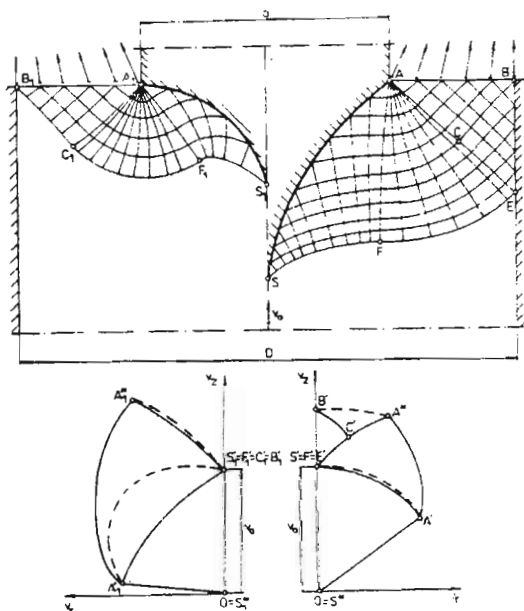
Podobnie jak poprzednio, sprawdzamy odwrotnie współrzędne punktu  $D$  i obliczamy dalsze przybliżenia dla punktu  $P$ .

Kontynuując, rozwiązujemy całe zagadnienie  $AFC$  przy zadanym współczynniku tarcia  $\mu$ .

### 3. Optywowe kształty stempli do wyciskania przeciwbieżnego

Przy wyciskaniu przeciwbieżnym na materiał zamknięty w matrycy działamy stemplem o mniejszej średnicy. Stosowanie do tego procesu stempli o płaskim czole nie jest uzasadnione gdyż wymagają one dużych sił odkształcających. Jak dotąd brak jest teoretycznych rozwiązań pozwalających optymalizować kształty stempli.

Pokazemy przykładowe rozwiązanie, które wyznacza częściowo opływowe kształty stempli (rys.2) przy pominięciu tarcia.



Rys. 2.

Rozwiązanie statyczne rozpoczynamy od brzegu  $AB$ , na którym przyjmujemy prostoliniową granicę między strefą odkształcenia a materiałem, który opuścił matrycę. Rozwiązanie będzie więc właściwe tylko dla stadium przepływu stacjonarnego i przy pominięciu wpływu zniekształcenia powierzchni wyrobu powstałego we wstępnym stadium wglębiania stempla. Przy tych założeniach, wzdłuż linii  $AB$  mamy  $\sigma_x = 0$ ,  $\sigma_r = -2k$  a  $\sigma_\theta = 0$  gdyż materiał płynie na zewnątrz układu współrzędnych. Rozwiązujemy zagadnienie Cauchy'ego  $ABC$ . Obszar między linią  $BC$  a ścianką matrycy może być uznany za sztywny, jak obok zagadnienia  $A_1B_1C_1$ , lub uplastyczniony, a wówczas rozwiązujemy zagadnienie mieszane  $BCE$ . Przy braku tarcia punkt  $B$  nie jest punktem osobliwym. W zależności od zakresu obszaru uplastycznionego otrzymamy profile stempli o różnych długościach. Zakres zagadnienia charakterystycznego  $AEF$  nie jest z góry znany. Na początku, rozwiązujemy go w odpowiednio szerokim zakresie, a następnie obszar jego jest korygowany po wyznaczeniu położenia punktu  $S$ . Do rozwiązania zagadnienia mieszane  $AFS$  stosujemy pierwszą z procedur opisanych w poprzednim punkcie. Kąt  $\vartheta$  w punkcie  $S$  może przyjmować różne wartości, ale jeśli profil stempla ma być opływowy musi on wchodzić stycznie do linii prądu a więc w punkcie  $S$  wchodzi stycznie do osi symetrii. Po rozwiązaniu zagadnienia  $AFS$  dokonuje się wspo-

mnianej korekty zagadnienia  $AEF$  tak, aby punkt  $S$  znalazł się dokładnie na osi symetrii po ponownym rozwiązaniu zagadnienia  $AFS$ .

Rozwiązanie przedstawione na rys.2 wykonano przy stosunku  $d/D = 0.5$ . Rozwiązania przy innych wartościach stosunku  $d/D$  wykazały, że w zakresie  $d/D > 0.6$  możliwe jest wykreślenie tylko profili długich, tzn. z budową obszaru  $BCE$ . W zakresie  $0.2 < d/D < 0.5$  profile najkrótsze, tzn. bez obszaru  $BCE$  są już z praktycznego punktu widzenia stosunkowo długie.

Rozwiązanie kinematyczne rozpoczynamy od warunku na linii  $EFS$  lub odpowiednio  $B_1C_1F_1S_1$ , wzdłuż której mamy  $v_r = 0$  i  $v_z = v_0$ . Punkt  $S$  jest punktem osobliwym dla prędkości; prędkość stempla jest równa zero a prędkość materiału  $v_z = v_0$ . Wzdłuż zarysu stempla  $AS$  mamy warunek aby wektor prędkości był styczny do profilu narzędzia. Warunek ten łącznie z zależnościami wzdłuż charakterystyk dla prędkości daje możliwość wyznaczenia prędkości w całym obszarze  $AFS$ . Rozpoczynamy od punktu węzłowego położonego w pobliżu punktu  $S$ . Do obliczenia składowych prędkości w punktach wzdłuż profilu  $AS$  korzystamy z dwóch związków - równania (2.4) i zależności  $v_z/v_r = \tan \gamma$  obowiązującej w każdym punkcie profilu, gdzie  $\gamma$  jest kątem nachylenia stycznej do profilu w danym punkcie. Na rys.2 zmianę prędkości wzdłuż profilu  $AS$  i  $A_1S_1$  przedstawiono liniami przerywanymi, natomiast wzdłuż charakterystyk  $AF$  i  $A_1F_1$  liniami ciągłymi.

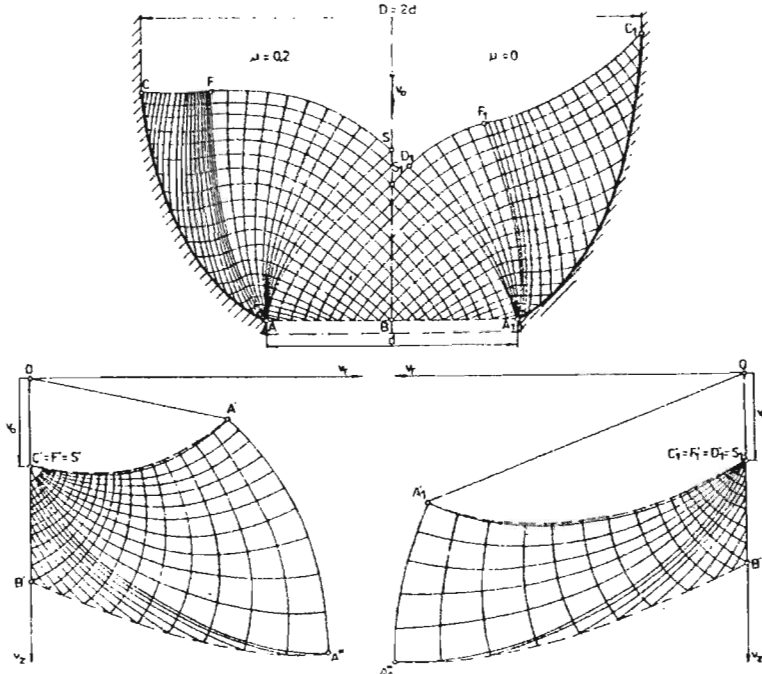
Większą część charakterystyk dla prędkości opuszczono, gdyż ze względu na zachodzenie pól na siebie rysunek stawał się nieczytelny. Wychodząc z danych na  $AF$  i  $FE$  rozwiązujemy zagadnienie  $AFE$ . Wzdłuż linii styku z matrycą  $BE$  mamy warunek  $v_r = 0$ . W wyniku rozwiązania zagadnień  $ABC$  i  $A_1B_1C_1$  otrzymujemy rozkład prędkości wypływu materiału z matrycy. Na planie prędkości zaznaczono go liniami przerywanymi  $A^*B'$  i  $A_1^*B_1'$ . Przy wyznaczonych profilach stempli rozkład ten jest nierównomierny. Profil krótki  $A_1S_1$  charakteryzuje się większą nierównomiernością wypływu materiału niż profil długi  $AS$ . Przy obydwu profilach wektor prędkości w punktach  $A$  i  $A_1$  posiada składową promieniową i materiał nie wypływa stycznie do cylindrycznej powierzchni bocznej stempla. Wyznaczone profile stempli są więc tylko częściowo opływowe.

Istnieje możliwość wyznaczenia profili w pełni opływowych, to znaczy zarówno na wejściu jak i na wyjściu, lecz wymaga to rozszerzenia rozwiązania w obszar sztywny poza linię  $EF$ , a profil stempla byłby wówczas tak długi, że praktycznie niemożliwy do zastosowania.

#### 4. Profile matryc do wyciskania współbieżnego o minimalnym zużyciu

Profile matryc do wyciskania współbieżnego można dobierać ze względu na różne kryteria. W przypadku prostych matryc stożkowych dobiera się tylko kąt

stożka tak, aby uzyskać najmniejszą siłę wyciskania. Bardziej złożone jest zadanie opracowania profili matryc do wyciskania w podwyższonej temperaturze a zwłaszcza wyciskania kuźniczego stali. W procesach tego typu bardzo szybkiemu zużyciu ulega wyjściowa część kalibrująca matrycy i musi być ona wycofana z pracy gdy wyrób traci wymiar. Inne kryteria w tym przypadku mają charakter drugorzędny.



Rys. 3.

W dotychczasowych rozwiązaniach teoretycznych przyjmuje się w płaszczyźnie wyjścia z matrycy stan naprężenia jak na swobodnym brzegu, to znaczy  $\sigma_z = 0$  i  $\sigma_r = -2k$ . W konsekwencji, taki stan naprężenia na wyjściu powoduje, że na cylindryczną część kalibrującą w pobliżu punktu A (rys.3) wywierany jest duży nacisk promieniowy a poślizg metalu po tej części pod tym naciskiem powoduje jej bardzo szybkie zużycie. Dlatego profil matrycy o najmniejszym zużyciu zostanie wyznaczony przy założeniu odmiennego stanu naprężenia na wyjściu z matrycy. Przyjmujemy mianowicie wzdłuż linii AB, że  $\sigma_z = 0$ , natomiast  $\sigma_r$  będzie spadać od wartości  $-2k$  w punkcie B do  $\sigma_r = 0$  w punkcie A. Wartości  $p$  i kąta  $\vartheta$  będą odpowiednio zmieniać się od B do A zgodnie z warunkiem plastyczności:  $p$  zmienia się od  $-k$  w punkcie B do 0 w punkcie A, a kąt  $\vartheta$  wynika z zależności  $\sigma_z = p + k \sin 2\vartheta = 0$ .

Na linii AB pojawiają się naprężenia styczne, które będą przenoszone rów-

niez przez materiał znajdujący się już poza matrycą. Wpływ materiału z matrycy będzie odbywał się z bardzo zróżnicowaną prędkością, jednakże w naszych rozważaniach możemy pominąć oddziaływanie materiału spoza matrycy na zależności w obszarze matrycy.

Profil matrycy wyznaczony przy takich warunkach na wyjściu  $AB$  będzie profilem zapewniającym najmniejsze zużycie części kalibrującej matrycy.

Rozwiązanie statyczne (rys.3) rozpoczynamy od zagadnienia brzegowego Cauchy'ego przylegającego do linii  $ABA_1$ . Na końcu rozwiązania może okazać się, że nie cały obszar tego zagadnienia znajdzie się w strefie uplastycznionej.

Wychodząc z punktu  $A$  i charakterystyki  $AS$  wyznaczamy zagadnienie  $ASF$ , przy czym jego ostateczny obszar jest nieznany i będzie ustalony w kolejnych próbach konstruowania zagadnienia  $AFC$  dla zadanego  $\mu$  i stosunku  $D/d$ . Zagadnienie  $AFC$  wyznaczamy drugą z procedur omówionych w poprzednim punkcie. Położenie punktu  $C$  określa stosunek  $D/d$  i warunek, aby wyznaczony profil  $AC$  wchodził stycznie do pionowej ścianki matrycy. Natomiast wartość kąta  $\vartheta$  w punkcie  $C$  zależy od współczynnika tarcia.

Rozwiązanie kinematyczne rozpoczynamy od linii  $CFS$ , wzdłuż której mamy  $v_r = 0$  i  $v_z = v_0$  oraz zagadnienia  $CFA$ . Wzdłuż zarysu  $CA$  mamy warunek aby wektor prędkości był styczny do profilu narzędzia. Rozpoczynamy od punktów węzłowych położonych w pobliżu punktu  $C$ .

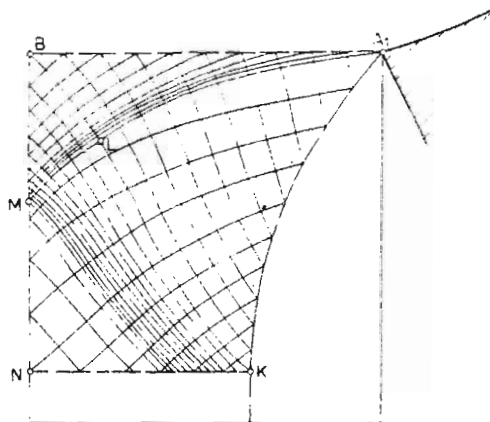
Prędkości w punktach na linii  $CF$  są znane, a dla punktów położonych na profilu  $CA$  znamy zależność  $v_z/v_r = \operatorname{tg}\gamma$ , gdzie  $\gamma$  jest kątem nachylenia stycznej do profilu. Korzystając z tej zależności i związków wzdłuż charakterystyk możemy wyznaczyć pole prędkości w całym zagadnieniu  $CFA$ . Na hodografie (rys.3) zmianę prędkości wzdłuż  $CA$  wykreślono linię przerywaną. Wychodząc z danych na  $FS$  i  $FA$  wyznaczamy pole prędkości w zagadnieniu  $AFS$ . W punktach położonych na osi symetrii  $r = 0$  musimy przyjąć  $v_r = 0$ . Przy wychodzeniu z punktów położonych na osi  $r = 0$  przyjmujemy, że wartość wyrażenia  $v_r/r$  zmierza do zera. Możemy więc wyznaczyć prędkości w całym zagadnieniu  $ABS$  gdyż mamy dane na  $AS$  i warunek  $v_r = 0$  na  $BS$ . W wyniku otrzymujemy rozkład prędkości wypływu materiału na wyjściu  $AB$  z matrycy. Cząstki materiału wypływające w pobliżu punktu  $A$  mają dużą składową promieniową prędkości co potwierdza założenie, że część kalibrująca matrycy nie będzie narażona na ścieranie i szybkie zużycie.

Profile  $AC$  i  $A_1C_1$  wyznaczone przy zróżnicowanych wartościach współczynnika tarcia  $\mu = 0$  i  $\mu = 0.2$  geometrycznie bardzo mało różnią się od siebie.

Również inne, na przedstawione tu rozwiązania wykonane w zakresie  $D/d = 1.3 \div 2.8$  dały podobny kształt geometryczny matrycy o najmniejszym zużyciu.

Pozostaje do sprawdzenia czy pod wpływem naprężeń działających na linii  $ABA_1$  nie nastąpi uplastycznienie materiału znajdującego się poza tą linią na zewnątrz matrycy. W tym celu budujemy przedłużenie rozwiązania rozpoczynając go od linii  $ABA_1$ , do której przylega zagadnienie Cauchy'ego  $ABA_1M$  wyznaczone





Rys. 4.

teraz w drugą stronę od tej linii (rys.4). Wychodząc z danych na charakterystyce  $A_1M$  i punktu  $A_1$ , w którym już poprzednio przyjęto wartość  $p = 0$ , wyznaczamy trajektorię  $A_1K$ , wzdłuż której  $p = 0$ . Trajektorię tę kończymy w punkcie  $K$ , gdyż od tego miejsca może ona oprzeć się na kolumnie pionowej. Wychodząc z danych na  $KL$  i  $LM$  oraz warunku symetrii na  $MN$  wyznaczamy dalszy obszar rozwiązania, które kończymy trajektorią kierunku naprężenia głównego  $KN$ .

Przeprowadzając rozumowanie Bishopa [5] dla warstwy materiału pomiędzy  $A_1K$  i bocznym brzegiem swobodnym stwierdzamy, że ciśnienie normalne na  $A_1K$  jest równe zero. Ponieważ ciśnienie w drugim kierunku, w kolumnie pod punktem  $K$  jest również równe zero, linia  $A_1K$  jest trajektorią zerowego stanu naprężenia.

Wychodząc teraz od linii  $A_1K$  analizujemy stan naprężenia wzdłuż poszczególnych charakterystyk biorąc pod uwagę zmiany wartości  $p$  i  $\vartheta$  w kolejnych węzłach siatki. Na przykład wzdłuż charakterystyk  $KL$  i  $A_1L$  wartości  $p$  są niewielkie, a przy małych obrotach charakterystyk promienie kół Mohra są wszędzie mniejsze od  $k$ . Również między punktami  $B$  i  $L$ , osiągnięcie wartości  $p$  bliskiej zera w punkcie  $L$  jest możliwe jedynie przez zmniejszanie promienia koła Mohra. Sprawdzając w ten sposób inne punkty, dochodzimy do wniosku, że w całym obszarze  $A_1BNK$  warunek plastyczności nie może być osiągnięty a rozwiązanie problemu spełnia warunki statyczne.

Przedłużenie takie może być zbudowane również przy innym rozkładzie naprężeń stycznych wzdłuż  $BA_1$  niż w rozwiązaniu przykładzie pod warunkiem, że będzie to rozkład monotoniczny w zakresie od zera do  $k$ , bez ostrych zmian, oś symetrii będzie kierunkiem głównym, a wszędzie wzdłuż  $BA_1$   $\sigma_z = 0$ . Wówczas promienie kół Mohra dla punktów pomiędzy  $B$ ,  $L$  i  $K$  zmniejszają się a charakter rozkładu ma jedynie wpływ na kształt brzegu  $A_1K$ .

## 5. Uwagi końcowe

Przedstawiona procedura rozwiązania zagadnień brzegowych mieszanych z równoczesnym wyznaczeniem kształtu brzegu, mimo wielu założeń upraszczających okazała się dość efektywna w zastosowaniu. W wyniku uzyskanych w ten sposób rozwiązań można zaproponować opływowe profile narzędzi jeszcze krótsze od dotychczas uznanych w literaturze [2,4] za najkrótsze lub optymalne. Profile te wyznaczać można dla różnych żądanych warunków przebiegu procesu.

Na wstępie rozwiązania przyjmuje się różne kryteria, decydujące o kształcie profilu. W ten sposób, teoretycznie wyznaczono profile matryc do wyciskania o najmniejszym zużyciu części kalibrującej. W literaturze można napotkać wzmianki o stosowaniu przez niektóre firmy tego typu matryc kulistych zwanych matrycami ciśnieniowymi. Nie było jednak teoretycznego wyjaśnienia dlaczego przepływ materiału w matrycach kulistych jest korzystny ze względu na ich żywotność.

Obliczenia numeryczne do rozwiązań, których przykłady tu przedstawiono wykonano przy pomocy komputera CYBER-72. Program obejmujący rozwiązanie statyczne i kinematyczne sporządzono w języku Fortran.

## 6. Literatura

1. JOHNSON W., SOWERBY R., VENTER R.D., *Plane strain slip line fields for metal deformation processes*, Pergamon Press, Oxford, 1982, 85-92
2. RICHMOND O., MORRISON H.L., *Streamlined wire drawing dies of minimum length*, J.Mech.Phys.Solids, 15, 1967 195-203
3. SZCZEPIŃSKI W., *Wstęp do analizy procesów obróbki plastycznej. Rozdz. VIII. Osiowo - symetryczny stan naprężenia i odkształcenia*, PWN Warszawa, 1967
4. SORTAIS H.C., KOBAYASHI S., *An optimum die profile for axisymmetric extrusion*, J.Int.Machine Tool Design and Research, 8, 1968, 61
5. BISHOP J.F.W., *On the complete solution to problems of deformation of a plastic - rigid material*, J.Mech.Phys.Solids, 2, 1953, 43-53

### Summary

The method of characteristics for axially-symmetric stress and strain conditions is applied to tool profiles the design. The numerical solving procedure of mixed boundary problems with unknown boundary and also considering friction is proposed. The kinematically admissible solutions to extrusion problems are obtained as example. The solutions allow one to determine favourable punch profiles for backward extrusion and die profiles with minimum wear for forward extrusion.

*Praca wpłynęła do Redakcji dnia 29 maja 1989 roku*