

UOGÓLNIONA POSTAĆ ROZWIĄZANIA OBRYSU NOSKA OSOWIO-SYMETRYCZNEGO O NAJMNIJSZYM OPORZE AERODYNAMICZNYM

STANISŁAW DUBIEL

Wojskowa Akademia Techniczna, Warszawa

Wprowadzenie

Właściwe wykorzystanie dużej ilości energii silnika raketowego przekształconej w stosunkowo krótkim czasie, wymaga ustalenia jak najkorzystniejszych warunków ruchu. To też technika raketowa nie tylko wykorzystwała metody optymalizacji w najszerszym stopniu (uogólnione metody rachunku wariacyjnego), ale była inspiracją do opracowania nowych metod [2, 3].

Istotną rolę w poszukiwaniu optymalnych warunków lotu raket odgrywają dwa zagadnienia. Pierwsze to poszukiwanie optymalnych programów sterowania (programów pracy zespołów napędowych i programów sterowania kierunkiem lotu), drugie to poszukiwanie optymalnych kształtów o najmniejszym oporze aerodynamicznym.

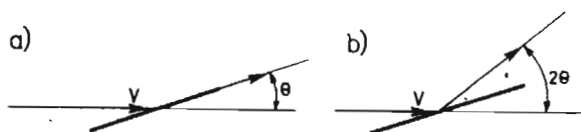
Zasadniczym kryterium w dynamice lotu raket są: minimum czasu osiągnięcia celu i minimum energii potrzebnej na przebycie drogi do celu. Kryteria te dla lotu w próżni dają analogiczne rezultaty. Wyraźne różnice występują przy programowaniu lotu w atmosferze i kryteria te są sobie przeciwstawne. Dla ruchu w atmosferze, kryterium minimalno-czasowe nie liczy się ze stratami energetycznymi, które są tym większe, im większa jest prędkość lotu. Podwyższenie prędkości domaga się skrócenia czasu lotu. Nie oznacza to jednak, że dla raket sterowanych programem minimalno-czasowym straty energii nie odgrywają roli. Jednakże jedynym sposobem ich zmniejszenia jest zmniejszenie oporu aerodynamicznego. Stąd też poszukiwanie kształtu ciała o najmniejszym oporze aerodynamicznym jest jednym z bardzo ważnych problemów.

Praca niniejsza jest poświęcona poszukiwaniu rozwiązań optymalnego obrysu noska osiowo-symetrycznego dla różnych zakresów prędkości lotu. Różnym zaś zakresom prędkości odpowiadają różne hipotezy "odbicia" cząsteczek powietrza przy opływie ciała. Poszukiwanie optymalnego obrysu noska ograniczono do minimalizacji oporu tylko ciśnieniowego bez tarcia. Opór tarcia uwzględniono dopiero

do ustalenia najkorzystniejszego wydłużenia noska. Rozdzielenie takie uzasadniają uzyskane wyniki, z których można wyciągnąć wniosek, że siły tarcia jako styczne do obrysu, wpływają na jego kształt w stopniu nieznacznym. Istotne znaczenie posiadają natomiast przy ustalaniu smukłości noska.

1. Funkcja tworząca problem optymalizacji obrysu noska

Funkcję tworzącą w problemie optymalizacji obrysu noska konstruuje się dla trzech hipotez odbicia strumienia cząsteczek powietrza od powierzchni noska.



Rys. 1. Optyw z odbiciem: a) newtonowskim, b) zwierciadlanym

1. Hipoteza odbicia newtonowskiego przyjęta w aerodynamice jako podstawowa przy nieściśliwym optywie ciał. Zmiana pędu strumienia w kierunku przepływu niezakłóconego wyraża się zależnością:

$$v(1 - \cos \theta) = vC_p. \quad (1.1)$$

2. Hipoteza odbicia zwierciadlanego przyjmowana w zakresie prędkości hipersonicznych i przy bardzo rozrzedzonych gazach z liczbą Knudseną większą od 1 ($Kn \geq 1$). Zmiana pędu cząsteczek w kierunku przepływu niezakłóconego wyraża się zależnością:

$$v(1 - \cos 2\theta) = vC_p. \quad (1.2)$$

3. Hipoteza odbicia gazu ściśliwego wyraża się współczynnikiem zmiany pędu wywołaną nie tylko zmianą kierunku, ale i falą uderzeniową:

$$v \frac{4\theta}{\sqrt{M^2 - 1}} = vC_p. \quad (1.3)$$

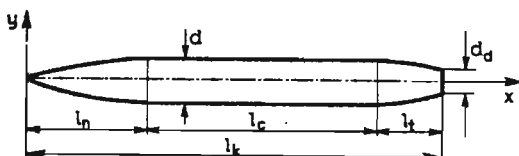
Elementarna siła normalna do powierzchni dS dla wszystkich trzech hipotez wyraża się zależnością:

$$dR = \rho dQ v C_p, \quad (1.4)$$

gdzie: ρ — gęstość powietrza, v — prędkość opływu strumienia niezakłóconego, $dQ = v dS \sin \theta$ — wydatek objętościowy strumienia odbijającego się od powierzchni dS , θ — kąt pochylenia elementu powierzchni względem opływu niezakłóconego.

Elementarny opór jako składowa siły normalnej w kierunku prędkości opływu:

$$dP_x = dR \sin \theta. \quad (1.5)$$



Rys. 2. Obrys kadłuba osiowo-symetrycznego

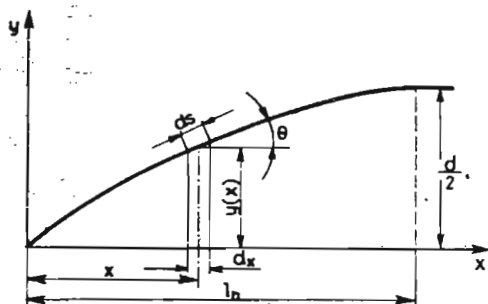
Kadłuby raket są z zasady ciałami osiowo symetrycznymi ponieważ te gwarantują największą pojemność wewnętrzną przy zachowaniu odpowiednich momentów bezwładności względem osi bocznych. Najkorzystniejszym kształtem byłby więc walec, ale aerodynamiczne wymagania skłoniły do stosowania noska i części tylnej kadłuba z narastającym lub malejącym płynnym przekrojem. Zmiana tych przekrojów powinna być tak dobrana aby kształt obrysu zapewniał jak najsukcesywniejsze zmniejszenie oporu. Uzyskuje się w ten sposób trzy charakterystyczne (niekiedy tylko dwie) bryły, które tworzą ostateczny kształt kadłuba: nos — część o narastającym przekroju, $y(x)$ zazwyczaj od $y_0 = 0$ do $y_1 = \frac{d}{2}$ o długości l_n , część cylindryczna ze stałym przekrojem o długości l_c i część tylna o malejącym przekroju $y(x)$ od $y = \frac{d}{2}$ do $y = \frac{d_d}{2}$ i długości l_t . Opór aerodynamiczny zależy w głównej mierze od charakteru zmiany przekroju przede wszystkim noska, a zatem od obrysu $y(x)$ oraz od zmiany przekroju części tylnej, a więc od obrysu $y(x)$ choć w nieco mniejszej mierze z uwagi na konieczne ścięcie dla dyszy silnika raketowego.

Zadanie minimalizacji oporu sprowadza się więc do wyznaczenia najkorzystniejszego obrysu noska. Nie kończy to jednak zadania definitywnie. Istniejące teorie opływu umożliwiają formowanie kształtu głównie przy określaniu zależności oporu

ciśnieniowego od kształtu ciała z pominięciem oporu tarcia. Jeżeli dla wyznaczenia optymalnego obrysu względnego nie wprowadza to dużego błędu, to dobranie odpowiedniej smukłości kadłuba musi opór tarcia uwzględnić. Zadanie więc rozdziela się na dwa problemy. Pierwszy to wyznaczenie optymalnego obrysu, drugi to wyznaczenie odpowiedniej smukłości kadłuba i części o zmiennym przekroju.

2. Obrys noska o najmniejszym oporze ciśnienia

Zadanie sprowadza się do wyznaczenia obrysu rozszerzającej się części kadłuba jako ciała obrotowego (rys.3).



Rys. 3. Obrys noska

Elementarną powierzchnię noska osiowo-symetrycznego wyraża zależność:

$$dS = 2\pi y(x) ds = 2\pi y(x) \frac{dx}{\cos \theta}. \quad (2.1)$$

Po wprowadzeniu powyższego wyrażenia do wzorów (1.4) i (1.5) otrzymuje się wyrażenie ogólne na opór elementarnej powierzchni noska:

$$dP_x = \rho v^2 2\pi y(x) C_p \sin^2 \theta \frac{dx}{\cos \theta}, \quad (2.2)$$

przy czym odpowiednie współczynniki dla poszczególnych hipotez opływu:

$C_{p1} = 1 - \cos \theta$ — opływ poddźwiękowy,

$C_{p2} = 1 - \cos 2\theta$ — opływ hipersoniczny,

$C_{p3} = \frac{4\theta}{\sqrt{M^2 - 1}}$ — opływ naddźwiękowy.

Ponieważ kąt θ obrysu łatwo wyrazić związkiem:

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{dy}{dx} = y',$$

więc wszystkie funkcje zawierające θ można wyrazić za pomocą tejże pochodnej. Przyjmuje się ponadto dla małych kątów θ związek $\operatorname{tg}\theta \cong \theta$ w kierunku odwrotnym. Ponieważ we wszystkich przypadkach wystąpią wyrażenia:

$$C_p \sin \theta \operatorname{tg}\theta = C_p \frac{\operatorname{tg}^2 \theta}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \theta}},$$

zaś:

$$C_{p1} = 1 - \cos \theta = \frac{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \theta} - 1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \theta}} \cong \frac{1}{2} \frac{\operatorname{tg}^2 \theta}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \theta}},$$

$$C_{p2} = 1 - \cos 2\theta = 2 \sin^2 \theta = 2 \frac{\operatorname{tg}^2 \theta}{1 + \operatorname{tg}^2 \theta},$$

$$C_{p3} = \frac{4\theta}{\sqrt{M^2 - 1}} \cong 4 \operatorname{tg}\theta \sqrt{M^2 - 1}.$$

Zatem wprowadzenie $y' = \operatorname{tg}\theta$ daje możliwość wyznaczenia oporu ciśnieniowego po scałkowaniu wyrażenia (1.5) w następującej postaci dla poszczególnych hipotez opływu:

$$P_{x1} = 4\pi q \frac{1}{2} \int_0^{l_n} y(x) \frac{y'^4(x)}{\sqrt{1 + y'^2}} dx,$$

$$P_{x2} = 4\pi q 2 \int_0^{l_n} y(x) \frac{y'^4(x)}{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}} dx, \quad (2.3)$$

$$P_{x3} = 4\pi q \frac{4}{\sqrt{M^2 - 1}} \int_0^{l_n} y(x) \frac{y'^3(x)}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \theta}} dx,$$

gdzie:

$$q = \frac{\rho v^2}{2} \quad \text{— ciśnienie dynamiczne.}$$

Kąty θ dla poszukiwanych obrysów są na ogół mniejsze od $\theta \leq 15^\circ$ (z wyłączeniem noska) zatem można przyjąć, że $y'^2 \ll 1$ i ostatecznie można przyjąć, że funkcje tworzące pod całką można zapisać w formie ogólnej następująco:

$$P_{xc} = 4\pi q k \int_0^{l_n} F[y(x), y'(x)] dx. \quad (2.4)$$

Funkcje tworzące problem mają postać ogólną:

$$F[y(x), y'(x)] = y(x)y'^n(x), \quad (2.5)$$

gdzie:

$n = 4$ — dla opływów poddźwiękowego i hipersonicznego¹,

$n = 3$ — dla opływu naddźwiękowego, zaś współczynniki k przyjmują wartości:

$k = 0.5$ — dla opływu poddźwiękowego,

$k = 2$ — dla opływu hipersonicznego,

$k = \frac{4}{\sqrt{M^2-1}}$ — dla opływu naddźwiękowego.

3. Obrys noska o minimalnym oporze ciśnieniowym

Opór ciśnieniowy P_{xc} określony zależnością (2.4) z funkcją tworzącą (2.5) jest funkcjonalem zależnym od funkcji $y(x)$ opisującej obrys noska osiowo-symetrycznego. Zadanie więc polega na wyznaczeniu takiej funkcji $y(x)$, dla której funkcjonal:

$$I[y(x)] = \int_0^{l_n} F[y(x), y'(x)] dx, \quad (3.1)$$

przyjmuje najmniejsze wartości. Zadanie jest więc typowym zadaniem wariacyjnym na poszukiwanie ekstremali $y_0(x)$. Ponieważ funkcja tworząca [1]:

$$F[y(x), y'(x)] = y(x)y'^n(x)$$

nie jest jawnie zależna od zmiennej x zatem równanie Eulera:

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{d}{dx} (F - \frac{\partial F}{\partial y'} y') - \frac{\partial F}{\partial x} = 0, \quad (3.2)$$

posiada całkę pierwszą:

$$F - \frac{\partial F}{\partial y'} y' = \bar{C}_0. \quad (3.3)$$

Dla ogólnej postaci funkcji tworzącej (2.5) pochodną:

$$\frac{\partial F}{\partial y'} = ny(x)[y'(x)]^{n-1},$$

¹Funkcję tworzącą dla odbicia zwierciadlanego podano dla $n = 3$ w pracy [2,3] przyjmując błędnie, że $C_p = 2C_x$ gdy poprawnie związek ten powinien mieć postać $2C_x = C_p \sin \theta$

zatem całka pierwsza wyrazi się zależnością:

$$y(x) y^n(x) = \frac{C_0}{1-n}, \quad (3.4)$$

której postać swobodniejsza do scałkowania:

$$y^{\frac{1}{n}}(x) y'(x) = \bar{C}_1, \quad (3.4')$$

gdzie:

$$\bar{C}_1 = \left(\frac{C_0}{1-n} \right)^{\frac{1}{n}}.$$

Scałkowanie wyrażenia (3.4') daje ostateczną postać ekstremali:

$$y(x) = (\bar{C}_1 x + C_2)^{\frac{n}{n+1}}. \quad (3.5)$$

Stałe całkowania wyznacza się dla warunków granicznych:

$$\begin{aligned} x_0 = 0, \quad y_0 = 0, \\ x_1 = l_n = \lambda_n d, \quad y_1 = \frac{d}{2}. \end{aligned}$$

Celem ustalenia wpływu wydłużenia noska na wartość współczynnika oporu wprowadza się zależność $l_n = \lambda_n d$, gdzie λ_n — wydłużenie noska jako stosunek długości noska do średnicy największego jego przekroju d . Ostatecznie więc otrzymuje się:

$$C_2 = 0, \quad C_1 = \frac{1}{2\lambda_n} l_n^{\frac{1}{n+1}},$$

zaś ekstremalę określa funkcja:

$$y(x) = C_1 x^{\frac{n}{n+1}}. \quad (3.5')$$

Najmniejszy współczynnik oporu dla takiego obrysu noska uzyskuje się po wprowadzeniu powyższej funkcji do wyrażeń (2.4) i (2.5) oraz podzieleniu przez ciśnienie dynamiczne q i powierzchnię odniesienia S . Niech powierzchnią odniesienia będzie powierzchnia największego przekroju czołowego, a więc:

$$S = \frac{\pi d^2}{4}.$$

Wówczas:

$$C_{xc} = \frac{16}{d^2} k \int_0^{l_n} y(x) y^n(x) dx. \quad (3.6)$$

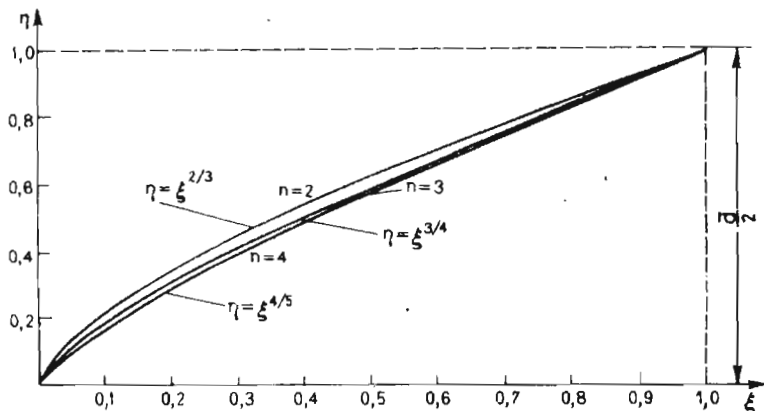
Ponieważ:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{n}{n+1} \frac{1}{2\lambda_n} l_n^{\frac{n}{n+1}} x^{-\frac{1}{n+1}},$$

zatem:

$$C_x = \frac{16}{2^{n+1}} \left(\frac{n}{n+1} \right)^n k \frac{1}{\lambda^{n-1}}. \quad (3.6')$$

Zależność współczynnika oporu ciśnieniowego od wydłużenia noska jest dość oczywista. Nie mniej wartość jego ograniczają nie tylko względy konstrukcyjne. Optyw rzeczywistym gazem, jakim niewątpliwie jest powietrze, wymaga uwzględnienia oporu tarcia, który w przeciwieństwie do oporu ciśnieniowego będzie się zwiększać ze wzrostem wydłużenia noska. Uwzględnienie oporu tarcia zezwoli na ustalenie wydłużenia noska, któremu odpowiada najmniejszy opór całkowity.



Rys. 4. Obrysy optymalne dla $n = 2, n = 3, n = 4$

Celem pokazania zależności rodzaju opływu na kształt obrysu optymalnego noska zależność (3.5') przedstawia się w formie bezwymiarowej. Wprowadza się w tym celu następujące zmienne:

$$\xi = \frac{x}{l_n}, \quad \eta = \frac{2y}{d},$$

stąd:

$$\eta = \xi^{\frac{n}{n+1}}. \quad (3.5'')$$

Kształty obrysu przedstawiono na rys.4 dla $n = 2, n = 3$ i $n = 4$. Przyjęcie $n = 2$ ma tylko charakter penetracyjny. Wielkość $n = 3$ odpowiada opłwowi naddźwiękowemu, zaś $n = 4$ opłwowi nieściśliwemu i hipersonicznemu, jakkolwiek dla tego opływu w literaturze niesłusznie podano rozwiązanie dla $n = 3[2, 3]$.

4. Optymalne wydłużenie noska

Celem pokazania sposobu wyznaczania optymalnego wydłużenia noska przyjmuje się kadłub składający się z noska i części cylindrycznej (por. rys.1). Wyznaczenia sumarycznego oporu dokonuje się przy założeniu, że całkowita objętość kadłuba nie ulega zmianie przy zmiennym wydłużeniu noska:

$$V = V_n + V_c = \text{const.} \quad (4.1)$$

Wydłużenie noska pociągnie za sobą skrócenie części cylindrycznej i na odwrót. Pociągnie to za sobą zwiększenie powierzchni opływowej kadłuba ze wzrostem wydłużenia noska, a tym samym oporu tarcia.

Powierzchnie opływu kadłuba wyznacza się jako sumę powierzchni opływu noska i powierzchni cylindra:

$$F = F_n + F_c, \quad dF_n = 2\pi y(x) \frac{dx}{\cos \theta}.$$

Stosuje się analogiczne uproszczenia jak poprzednio z uwagi na $y^2 \ll 1$. Zatem powierzchnię noska wyznacza się z całki:

$$F_n = 2\pi \int_0^{l_n} y(x) dx = \frac{n+1}{2n+1} \pi \lambda_c d^2, \quad (4.2)$$

a powierzchnia opływu cylindra wynosi:

$$F_c = 2\pi d^2 \lambda_c. \quad (4.3)$$

W podobny sposób wyznacza się objętości:

$$dV_n = \pi y^2(x) dx,$$

$$V_n = \pi \left(\frac{1}{2\lambda_c} \right)^2 (l_n)^{\frac{2}{n+1}} \int_0^{l_n} x^{\frac{2n}{n+1}} dx.$$

Ogólne wyrażenie na objętość noska o minimalnym oporze ciśnieniowym uzyskuje się z wyrażenia na krzywą obrysu:

$$V_n = \frac{\pi}{4} \frac{n+1}{3n+1} d^3 \lambda_n. \quad (4.4)$$

Objętość części cylindrycznej jest następująca:

$$V_n = \frac{\pi}{4} d^3 \lambda_c. \quad (4.5)$$

Ponieważ $V_0 = V_n + V_c$ ma być wielkością stałą zatem można będzie wyznaczyć relację między wydłużeniami części nosowej i cylindrycznej ze związków:

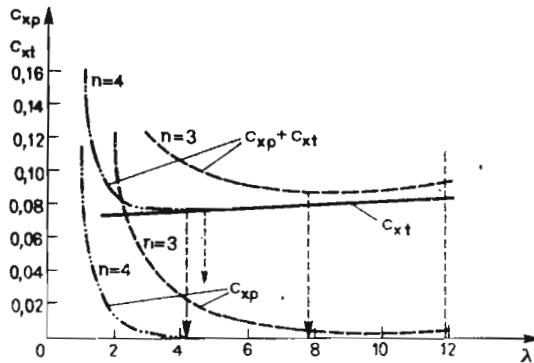
$$V_0 = \frac{\pi d^3}{4} \left(\frac{n+1}{3n+1} \lambda_n + \lambda_c \right). \quad (4.6)$$

$$\lambda_c = \frac{4V_0}{\pi d^3} \frac{n+1}{3n+1} \lambda_n. \quad (4.6')$$

Wyrażenie powyższe jest słuszne dla:

$$\frac{4V_0}{\pi d^3} \frac{n+1}{3n+1} \lambda_n \geq 0, \quad \text{stad} \quad \lambda_n \leq \frac{4V_0}{\pi d^3} \frac{3n+1}{n+1}, \quad (4.7)$$

to znaczy do zaniku części cylindrycznej.



Rys. 5. Optymalne wydłużenie noska

Kadłub posiada wówczas kształt noska o najmniejszym oporze. Nie koniecznie odpowiada to najmniejszemu oporowi z uwzględnieniem poru tarcia. Dla wyznaczenia najkorzystniejszej wartości wydłużenia noska należy sporządzić bilans współczynnika oporu. Opór tarcia wyznacza się dla całkowitej powierzchni opływu przy zmiennym wydłużeniu noska i rozpoczyna się od $\lambda_n = 1$.

Całkowitą powierzchnię opływu nasek + cylinder z zachowaniem relacji między wydłużeniami (4.6') wyraża zależność:

$$F = \pi d^2 \left(\frac{n+1}{2n+1} \lambda_n + 2\lambda_c \right). \quad (4.8)$$

Z wykresów współczynnika oporu odczytuje się dla odpowiedniej liczby Re współczynnik C_t . Wielkości liczb Reynolda ustala odpowiednie wydłużenie:

$$Re = \frac{d(\lambda_n + \lambda_c)v}{\nu}$$

Po odczytaniu wartości C_t można określić:

$$C_{x_t} = \frac{4F}{\pi d^2} C_t = 4C_t \left(\frac{n+1}{2n+1} \lambda_n + 2\lambda_c \right). \quad (4.9)$$

Całkowity współczynnik oporu jest sumą C_{x_c} i C_{x_t} , a zatem:

$$C_x = C_{x_c} + C_{x_t} = \frac{16}{2^{n+1}} \left(\frac{n}{n+1} \right)^n k \lambda_n^{-1} + 4C_t \left(\frac{n+1}{2n+1} \lambda_n + 2\lambda_c \right). \quad (4.10)$$

Poszukuje się wydłużenia $\lambda_{n \text{ opt}}$, któremu odpowiada najmniejsza wartość oporu. Zmiana całkowitego współczynnika oporu dla różnych n podana jest na rys.5.

Odpowiednią wartość wydłużenia wyznacza się dla odpowiednich rodzajów opływu. Dla raket o naddźwiękowych prędkościach lotu wartość wydłużenia λ_n dla minimalnego oporu wypada największa dla $n = 3$. Najmniejsza wartość optymalnego wydłużenia noska odpowiada prędkościom poddźwiękowym, a więc dla $n = 4$. Nieco większe wydłużenie odpowiada opływowi hipersonicznemu, choć wyznaczenie optymalnego wydłużenia dla tego rodzaju opływu ma sens symboliczny, bo przy odbiciu zwierciadlanym opór tarcia nie występuje.

5. Podsumowanie i wnioski

Skończone rozwiązania optymalnego obrysu noska uzyskano przy założeniach upraszczających, które jak widać z kształtów obrysu nie są uproszczeniami mogącymi budzić poważne wątpliwości, za wyjątkiem otoczenia punktu $x_o = 0$ i $y_o = 0$. Wartości kątów θ poza tym otoczeniem są mniejsze od 15° , szczególnie przy wydłużeniach optymalnych większych od $\lambda_n = 4$, a zatem $\text{tg}^2 \theta \leq 0.0718 \ll 1$.

Uproszczony jest również sposób wyznaczania oporu tarcia. Jego zmiana wpływa jednak zdecydowanie na przebieg całkowitego oporu dopiero w otoczeniu optymalnego wydłużenia i powyżej. Co więcej, zmiana współczynnika oporu w otoczeniu $\lambda_{n \text{ opt}}$ posiada łagodny charakter, a więc błędy wynikające z tego uproszczenia nie mają istotnego znaczenia w praktyce.

Podany sposób doboru optymalnego obrysu kadłuba można uznać za wystarczająco dokładny, zaś prostota uzyskanych wyników udostępnia ich wykorzystanie w praktyce.

Literatura

1. S.DUBIEL, *Minimalno-czasowy program zespołu napędowego raket*, Biul.WAT nr 11, 1987

2. J.LEITMAN, *Optimization techniques with applications to aerospace system*, Acad.Press New York, London, 1962
3. Проблемы движения головной части ракет дальнего действия, Сборник статей, ред: Е.В.Самуйлова и Э.Э.Шпиларин, Изд.ИЛ., Москва, 1959

Summary

Optimization of streamline configuration for axi-symmetrical nose was carried out for three hypothesis of flow repulsion. The function which goverus the problem has been constructed for subsonic, supersonic and hipersonic flows in a single generalized form. The solution of streamline for minimum drag also is given in a generalized form. Next, a method of determining the optimal elongation of the nose has been proposed for of the flows, when the fricting drag, is decisive.

Резюме

Оптимизация формы очертания носовой части для трёх диапазонов течения: дозвукового, сверхзвукового и гиперзвукового. Функция образующая задачи построена для всех диапазонов течения в одном обобщенном виде. Решение линии обтекания с минимальным сопротивлением получено тоже в обобщенной форме. Далее предположено метод определения оптимального удлинения носовой части, которого величина зависит от сопротивления трения.

Praca wpłynęła do Redakcji dnia 1 marca 1989 roku