

ANALIZA NUMERYCZNA RUCHU RAKIETY STEROWANEJ PROGRAMOWO

JÓZEF GAČEK

Wojskowa Akademia Techniczna, Warszawa

1. Wstę

Obserwowany w ostatnich dziesięcioleciach burzliwy rozwój techniki rakieter wyraża się m.in. udoskonalaniem przyrządów zapewniających lot raket po ściśle określonym torze. Wynikający stąd wzrost dokładności osiągnięcia żądanych punktów w przestrzeni okołozemskiej (na powierzchni Ziemi) w znacznym stopniu uwarunkowany jest zastosowaniem we współczesnych raketach elektronicznej techniki obliczeniowej. Technika komputerowa wykorzystywana w procesie sterowania raketami, wymaga zastosowania różnorodnych algorytmów zawierających odpowiednie modele własności dynamicznych raket na torze lotu.

W związku z powyższym, generalnym celem pracy jest sformułowanie modelu matematycznego ruchu rakiety sterowanej automatycznie na aktywnej części toru, oraz opracowanie wygodnej do zastosowania metodyki badania własności dynamicznych rozpatrywanej klasy raket.

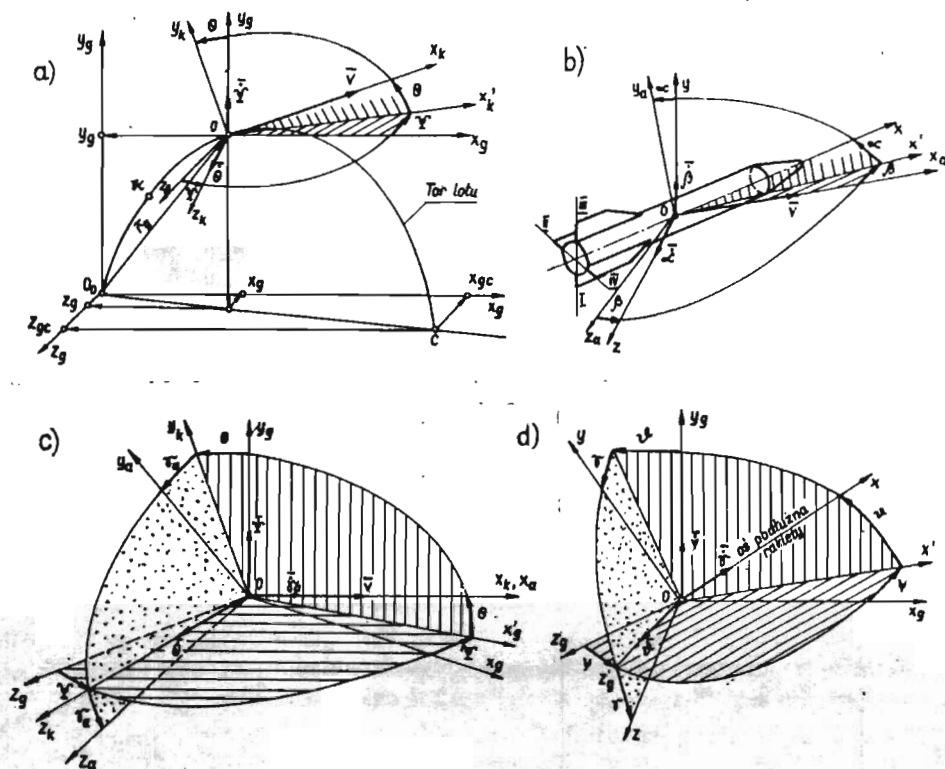
W szczególności zamierza się:

- opracować model fizyczny rakiety przez ustalenie zbioru charakterystyk konstrukcyjnych, masowych, aerodynamicznych oraz niektórych charakterystyk sterowania,
- sformułować model matematyczny opisujący zjawisko lotu rakiety na aktywnej i biernej części toru,
- wyznaczyć podstawowe charakterystyki lotne rakiety.

2. Stosowane oznaczenia

b_A	—	średnia cięciwa aerodynamiczna statecznika,
$c_{x_a}, c_{y_a}, c_{z_a}$	—	współczynniki aerodynamiczne: oporu czołowego, siły nośnej i siły bocznej,
$c_{x_a}^{\alpha^2}, c_{y_a}^{\alpha}, m_x^{\omega_x}, \dots$	—	pochodne cząstkowe współczynników aerodynamicznych względem odpowiednich zmiennych,
$g(y_g)$	—	przyspieszenie siły ciężkości,
$I_x(t), I_y(t), I_z(t)$	—	momenty bezwładności rakiety względem osi związanego układu współrzędnych $Oxyz$ (rys.1.b),
L	—	długość rakiety,
l	—	rozpiętość brzechw rakiety,
$m_x^{\alpha}, m_y^{\beta}$	—	pochodne współczynników momentów stabilizujących względem kąta natarcia i ślizgu,
$m_x^{\omega_x}, m_y^{\omega_y}, m_z^{\omega_z}$	—	pochodne współczynników momentów tłumiących względem odpowiednich rzutów prędkości kątowych,
m_x, m_y, m_z	—	współczynniki momentów aerodynamicznych (przechylenia, odchylenia, pochylenia) w związanym układzie współrzędnych $Oxyz$,
Ma	—	liczba Macha,
$m(t)$	—	masa rakiety,
$m_a(t)$	—	wydatek sekundowy masy rakiety,
Ma_g	—	liczba Macha charakteryzująca strumień gazów wypływających z dyszy silnika,
R	—	średni promień Ziemi,
S	—	powierzchnia charakterystyczna rakiety,
α, β	—	odpowiednio kąt natarcia i kąt ślizgu (rys.1.b),
γ, θ, ψ	—	odpowiednio kąty: przechylenia, pochylenia i odchylenia (rys.1.d),
γ_a, θ, Ψ	—	odpowiednio: prędkościowy kąt przechylenia, kąt nachylenia toru do poziomu, kąt zwrotu toru (rys.1.c),
$\delta_w, \delta_k, \delta_p$	—	odpowiednio kąty wychylenia sterów: wysokości, kierunku i przechylenia,
$\omega_x, \omega_y, \omega_z$	—	rzuty prędkości kątowej rakiety na osie układu związanego $Oxyz$ (rys.1.b),
$\Pi(y_g) = \frac{p(y_g)}{p_0}$	—	funkcja zawarta w tablicach Atmosfery Standardowej,
$\rho(y_g)$	—	zmiana gęstości powietrza z wysokością określona na podstawie Atmosfery Standardowej.

3. Modelowanie własności dynamicznych rakiety w ruchu przestrzennym



Rys. 1.

W modelu fizycznym i matematycznym rakiety zostaną uwzględnione uzasadnione praktyką artyleryjską założenia upraszczające dotyczące konstrukcji rakiety oraz warunków w jakich odbywa się jej ruch. Podstawowe z tych założeń można sformułować następująco:

- rakieta jest osiowosymetryczną bryłą sztywną o czterokrotnej symetrii centralnej,
- środek masy rakiety leży na osi podłużnej rakiety,

- kierunek działania ciągu silnika pokrywa się z osią podłużną rakiety,
- nie uwzględnia się zmiany położenia głównych centralnych osi bezwładności w czasie pracy silnika rakiety,
- normalne wartości parametrów charakteryzujących ośrodek ruchu przyjęto według As-64.

Pozostałe założenia upraszczające zostaną podane w trakcie modelowania własności dynamicznych rakiety.

Układy współrzędnych zastosowane w opisie ruchu rakiety przedstawiono na rys.1.

3.1. Współrzędne liniowe i kątowe

Współrzędne liniowe określają jednoznacznie położenie układu odniesienia $0xyz$ związanego z poruszającą się rakieta względem nieruchomego układu inercyjnego $0_0x_gy_gz_g$ związanego z Ziemią (rys.1.a):

$$\mathbf{r}_g = x_g \mathbf{i}_g + y_g \mathbf{j}_g + z_g \mathbf{k}_g. \quad (3.1)$$

Współrzędne kątowe - kąty obrotu ψ , ϑ , γ określają jednoznacznie położenie układu współrzędnych związanego z rakieta $0xyz$ względem normalnego ziemskiego układu współrzędnych $0x_gy_gz_g$ (rys.1.d).

3.2. Siły działające na raketę w locie

Przyjęto, że ruch rakiety odbywa się pod wpływem następujących sił i momentów sił zewnętrznych:

a) Ciągu silnika raketowego P

$$P(t, y_g) = P_0 = p_0 S_a [1 - \Pi(y_g)], \quad (3.2)$$

gdzie: $P_0 = P(y_g = 0)$ — ciąg silnika na poziomie morza,
 $p_0 = p(y_g = 0)$ — ciśnienie atmosferyczne na poziomie morza.

W przypadku rozpatrywanej rakiety określono:

$$P(t, y_g) = 8300 + 1410[1 - \Pi(y_g)]. \quad (3.3)$$

b) Siły ciężkości

$$G(t, y_g) = m(t)g(y_g). \quad (3.4)$$

c) Sił aerodynamicznych

Składowe całkowanej siły aerodynamicznej w prędkościowym układzie współrzędnych $0x_a y_a z_a$ określają zależności:

$$\begin{aligned} R_{x_a}(Ma, y_g, \alpha) &= \left[c_{x_{a0}}(Ma) + c_{y_g}^{\alpha}(Ma)y_g + 0.5c_{x_a}^{\alpha^2}(Ma)\alpha^2 \right] \frac{\rho(y_g)v^2}{2} S, \\ R_{y_a}(Ma, y_g, \alpha) &= c_{y_a}^{\alpha}(Ma) \frac{\rho(y_g)v^2}{2} S\alpha, \\ R_{z_a}(Ma, y_g, \beta) &= c_{z_a}^{\beta}(Ma) \frac{\rho(y_g)v^2}{2} S\beta. \end{aligned} \quad (3.5)$$

d) Momentów sił aerodynamicznych

Składowe wektora głównego momentu sił aerodynamicznych w związanym układzie współrzędnych $0xyz$ określają zależności:

$$\begin{aligned} M_x(Ma, y_g, \omega_x) &= (m_{x_0} + m_x^{\omega_x} \omega_x) \frac{\rho(y_g)v^2}{2} S l, \\ M_y(Ma, y_g, \beta, \alpha, \omega_y) &= (m_y^{\beta} \beta + m_y^{\alpha} \alpha + m_y^{\omega_y} \omega_y) \frac{\rho(y_g)v^2}{2} S b_A, \\ M_z(Ma, y_g, \alpha, \beta, \omega_z) &= (m_z^{\alpha} \alpha + m_z^{\beta} \beta + m_z^{\omega_z} \omega_z) \frac{\rho(y_g)v^2}{2} S b_A. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Z założenia o symetrii osiowej i czterokrotnej symetrii centralnej wynika, że :

$$\begin{aligned} c_{y_a} &= -c_{z_a}, \\ m_y^{\beta} &= m_x^{\alpha}, \\ m_y^{\omega_y} &= m_x^{\omega_x}, \\ m_y^{\alpha} &= -m_x^{\beta}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

W przypadku rozpatrywanej rakiety przyjęto:

$$m_{x_0} = m_{y_0} = m_{z_0} = 0.$$

Zmianę współczynników aerodynamicznych oraz zmianę położenia środka parcia rakiety przedstawiono na rys.2 i rys.3.

e) Siły i momenty sił powstające na sterach gazowych

Dla rozpatrywanej rakiety określono następujące zależności do wyznaczania sił i momentów sił gazodynamicznych wytwarzanych przez stery:

$$\begin{aligned} R_{x_g}(Ma_g, \delta_w) &= 1570 + 2230\delta_w^2, \\ R_{y_g}(Ma_g, \delta_w) &= 15177.1\delta_w, \\ R_{z_g}(Ma_g, \delta_k) &= 15177.1\delta_k, \\ M_{x_g}(Ma_g, \delta_p) &= R_{y_g} z_{g_0} + R_{z_g} y_{g_0}, \\ M_{y_g}(Ma_g, \delta_k) &= R_{x_g} [x_{g_0} - x_{\dot{s}m}(t)], \\ M_{z_g}(Ma_g, \delta_w) &= R_{y_g} [x_{g_0} - x_{\dot{s}m}(t)], \end{aligned} \quad (3.8)$$

gdzie:

z_{g_s}, y_{g_s} — odległości od punktów przyłożenia sił R_{x_g} i R_{y_g} do osi podłużnej rakiety,

x_{g_s} — odległość od noska rakiety do osi obrotu steru ($x_{g_s} = 10.175$ m).

3.3. Równania ruchu przestrzennego rakiety sterowanej programowo

Formułując dynamiczne równania ruchu środka masy rakiety w układzie współrzędnych związanym z trajektorią $Ox_k y_k z_k$, a równania dynamiczne ruchu dookoła środka masy w związanym układzie współrzędnych $Oxyz$ określając określając związki kinematyczne i geometryczne między układami odniesienia otrzymano następujący układ równań ruchu rakiety sterowanej programowo:

$$m \frac{dv}{dt} = \sum F_{x_k},$$

$$mv \frac{d\theta}{dt} = \sum F_{y_k},$$

$$mv \cos \theta \frac{d\Psi}{dt} = \sum F_{z_k},$$

$$I_x \frac{d\omega_x}{dt} + (I_x - I_y) \omega_y \omega_z = \sum M_x,$$

$$I_y \frac{d\omega_y}{dt} + (I_x - I_z) \omega_x \omega_z = \sum M_y,$$

$$I_z \frac{d\omega_z}{dt} + (I_y - I_x) \omega_x \omega_y = \sum M_z,$$

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{1}{\cos \theta} (\omega_y \cos \gamma - \omega_x \sin \gamma),$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega_y \sin \gamma + \omega_x \cos \gamma,$$

$$\frac{d\gamma}{dt} = \omega_z - \operatorname{tg} \theta (\omega_y \cos \gamma - \omega_x \sin \gamma),$$

$$\frac{dx_g}{dt} = v \cos \theta \cos \Psi,$$

$$\frac{dy_g}{dt} = v \sin \theta,$$

$$\frac{dz_g}{dt} = -v \cos \theta \sin \Psi,$$

$$\sin\beta = \cos\theta\sin(\psi - \Psi)\cos\gamma + \cos\theta\sin\theta\cos(\psi - \Psi)\sin\gamma - \sin\theta\cos\theta\sin\gamma, \quad (3.9)$$

$$\sin\alpha = [\cos\theta\sin\theta\cos(\psi - \Psi)\cos\gamma - \sin\theta\cos\theta\cos\gamma - \cos\theta\sin(\psi - \Psi)\sin\gamma] \frac{1}{\cos\beta},$$

$$\sin\gamma_a = \frac{1}{\cos\beta} [\sin\theta\sin(\psi - \Psi)\cos\gamma + \cos\theta\cos\theta\sin\gamma + \sin\theta\sin\theta\cos(\psi - \Psi)\sin\gamma],$$

gdzie:

$$\begin{aligned} \sum F_{x_k} &= P(t, y_g)\cos\alpha\cos\beta - R_{x_a}(Ma, y_g, \alpha^2) - R_{x_g}\cos\alpha + \\ &\quad - R_{y_g}\sin\alpha\cos\beta + R_{z_g}\sin\beta - G(t, y_g)\sin\theta, \\ \sum F_{y_k} &= P(t, y_g)(\sin\alpha\cos\gamma_a + \cos\alpha\sin\beta\sin\gamma_a) + \\ &\quad + R_{y_a}(Ma, y_g, \alpha)\cos\gamma_a - R_{z_a}(Ma, y_g, \beta)\sin\gamma_a + \\ &\quad - R_{x_g}(\sin\alpha\cos\gamma_a + \cos\alpha\sin\beta\sin\gamma_a) + \\ &\quad + R_{y_g}(\cos\alpha\cos\gamma_a + \sin\alpha\sin\beta\sin\gamma_a) + \\ &\quad + R_{z_g}\cos\beta\sin\gamma_a - G(t, y_g)\cos\theta, \\ \sum F_{z_k} &= P(t, y_g)(\sin\alpha\sin\gamma_a - \cos\alpha\sin\beta\cos\gamma_a) + \\ &\quad + R_{y_a}(Ma, y_g, \alpha)\sin\gamma_a + R_{z_a}(Ma, y_g, \beta)\cos\gamma_a + \\ &\quad - R_{x_g}(\sin\alpha\sin\gamma_a - \cos\alpha\sin\beta\cos\gamma_a) + \\ &\quad + R_{y_g}(\cos\alpha\sin\gamma_a + \sin\alpha\sin\beta\cos\gamma_a) + \\ &\quad + R_{z_g}\sin\beta\cos\gamma_a, \\ \sum M_x &= M_x(Ma, y_g, \omega_x) + M_{x_g}(Ma_g, \delta_p), \\ \sum M_y &= M_y(Ma, y_g, \beta, \alpha, \omega_y) + M_{y_g}(Ma_g, \delta_k), \\ \sum M_z &= M_z(Ma, y_g, \alpha, \beta, \omega_z) + M_{z_g}(Ma_g, \delta_w). \end{aligned} \quad (3.10)$$

Układ równań (3.9) uzupełniają zależności opisujące:

a) Zmianę charakterystyk masowych rakiety w czasie lotu:

$$\begin{aligned} m(t) &= m_0 - \int_0^t m_s(t)dt, \\ I_x(t) &= I_{x_0} - \int_0^t \frac{dI_x}{dm} m_s(t)dt, \\ I_y(t) &= I_y(t) = I_{y_0} - \int_0^t \frac{dI_y}{dm} m_s(t)dt. \end{aligned} \quad (3.11)$$

b) Zmianę charakterystyk ośrodka ruchu z wysokością:

$$\begin{aligned}
 g(y_g) &= \frac{R^2}{(y_g + R)^2}, \\
 \rho(y_g) &= 1.225956 \left(\frac{288 - 0.0065y_g}{288} \right)^{4.25} && \text{dla } y_g \leq 11000\text{m}, \\
 \rho(y_g) &= 0.36375 \exp \left(\frac{y_g - 11000}{6340} \right) && \text{dla } y_g > 11000\text{m}, \\
 a(y_g) &= 20.056 (288 - 0.0065y_g)^{0.5} && \text{dla } y_g \leq 25000\text{m}, \\
 a(y_g) &= 20.056 \sqrt{T(y_g)} && \text{dla } y_g > 25000\text{m}, \\
 T(y_g) &= 34.5232 a_m M_m y_m,
 \end{aligned} \tag{3.12}$$

gdzie: $a_m(y_g)$, $M_m(y_g)$ - funkcje podane w Atmosferze Standardowej.

c) Pracę systemu sterowania rakiety:

$$T_2 \ddot{\delta} + T_1 \dot{\delta} + \delta = K_0 \lambda + K_1 \dot{\lambda} + K_2 \ddot{\lambda} - F_{pr}(t), \tag{3.13}$$

gdzie: T_1, T_2 — stałe czasowe,

λ — parametr sterowania,

$$F_{pr}(t) = k_0 \lambda_{pr}(t) + k_1 \dot{\lambda}_{pr}(t) + k_2 \ddot{\lambda}_{pr}(t).$$

Na podstawie równania (3.13) można otrzymać równania opisujące pracę poszczególnych kanałów systemu sterowania rozpatrywanej klasy rakiet. np. równanie opisujące pracę kanału pochylenia (kanału θ) autopilota rakiety sformułowano w następującej postaci:

$$\begin{aligned}
 5.084 \ddot{\delta}_w + 37.25 \dot{\delta}_w + 57.295 \delta_w &= 749.48 \theta + 488.77 \dot{\theta} + \\
 + 284.78 \ddot{\theta} - [307.14 \theta_{pr}(t) + 200.3 \dot{\theta}_{pr}(t) + 116.69 \ddot{\theta}_{pr}(t)].
 \end{aligned}$$

Programową zmianę kąta pochylenia w czasie lotu $\theta_{pr}(t)$ oraz funkcji $F_{pr}(t)$ przedstawiono na rys.6. dla kanałów sterowania w kącie przechylenia γ i kącie odchylenia ψ , w przypadku rozpatrywanej rakiety programowe wartości parametru sterowania wynoszą:

$$\gamma_{pr}(t) = \psi_{pr}(t) = 0.$$

Model matematyczny ruchu rakiety (3.9) wraz z zależnościami uzupełniającymi (3.10) ÷ (3.13) stanowi złożony układ równań różniczkowych zwyczajnych nieliniowych i niestacjonarnych. Model ten został wykorzystany do przeprowadzenia symulacji numerycznej własności dynamicznych rakiety sterowanej programowo (rakiety balistycznej).

4. Rozwiązanie równań różniczkowych ruchu rakiety. Wyniki obliczeń

Układ równań (9) rozwiązano metodą Rungego-Kutty przy wykorzystaniu

komputera. Przedstawione na rysunkach 2 - 6¹ wyniki charakteryzują lot rakiety dla $t_0 \leq t \leq t_k$, natomiast na rys.7 podano przykładowo niektóre wyniki obliczeń dla $t > t_k$. Wyniki te otrzymano dla następującego zbioru danych początkowych:

$$\begin{aligned} v(t_0) &= x_g(t_0) = y_g(t_0) = z_g(t_0) = \Psi(t_0) = \psi(t_0) = \\ &= \gamma(t_0) = \omega_x(t_0) = \omega_y(t_0) = \omega_z(t_0) = 0, \\ \theta(t_0) &= \Theta(t_0) = \frac{\Pi}{2}. \end{aligned}$$

Podstawowe charakterystyki modelu fizycznego rakiety oraz ich zmianę w funkcji czasu lotu i liczby Macha przedstawiono na rys.2 i rys.3.

5. Wnioski końcowe

Na podstawie metod mechaniki klasycznej i zasad teorii sterowania sformułowano model matematyczny rakiety wyposażonej w układ sterowania programowego. Uwzględniono przy tym wszystkie główne stopnie swobody rakiety jako układu mechanicznego.

Podczas analizy ogólnych równań ruchu przestrzennego rakiety stwierdzono występowanie istotnych sprzężeń ruchów podłużnych i bocznych oraz sprzężeń ruchów środka masy i ruchu obrotowego rakiety. Z tych względów oddzielne analizowanie wymienionych ruchów jest dużym uproszczeniem i nie jest zalecane do zastosowania w poważniejszych rozważaniach.

Sformułowany model matematyczny jest wygodny do stosowania w badaniach komputerowych i może być wykorzystywany przy rozważaniu wielu zagadnień dynamiki rakiet balistycznych.

Wyniki otrzymane na podstawie symulacji własności dynamicznych rakiety sterowanej programowo po konfrontacji z danymi określonymi innymi metodami potwierdzają poprawność opracowanego modelu matematycznego.

6. Literatura

1. S.DUBIEL, *Zjawisko autorotacji podłużnej aparatów latających*, Biul. WAT nr 6, 1971
2. J.GACEK, *Model aerodynamiczny i opis matematyczny ruchu wydłużonego pocisku ciężkiego*, MTiS 3-4, 23, 1985
3. J.MARYNIAK, *Oscylacje rakiety lecącej po torze falistym w atmosferze Ziemi*, MTiS 3, 2, 1964

¹Rysunki na końcu pracy

4. J.MARYNIAK, *Modelowanie fizyczne i matematyczne w dynamice obiektów ruchomych*, Zbiór referatów XXVI Sympozjonu Modelowanie w Mechanice, Kudowa, 1987

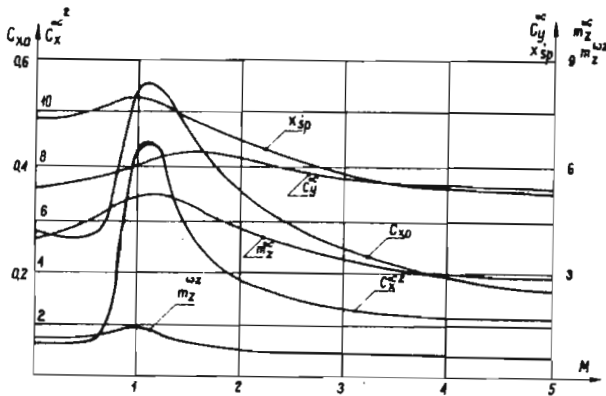
Summary

The subject of this paper is to present the process of designing the Earth - Earth short - range rocket motion as well as the results of its dynamic properties while being on trajectory.

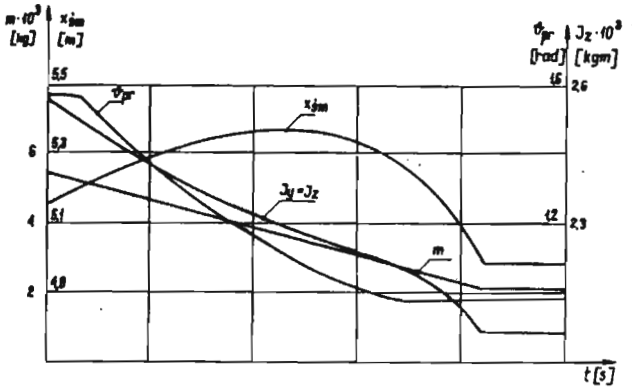
Резюме

В работе представлен процесс моделирования движения ракеты с программным управлением близкой дальности класса земля-земля, а также даны избранные результаты анализа её динамических свойств на траектории полёта.

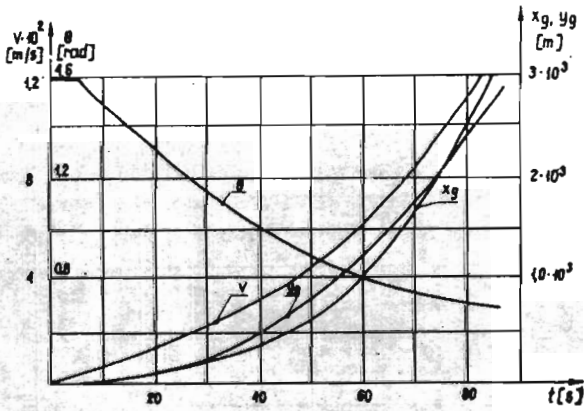
Praca wpłynęła do Redakcji dnia 12 października 1988 roku



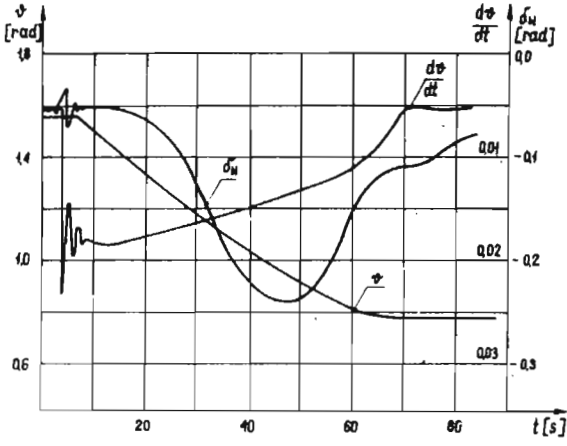
Rys. 2.



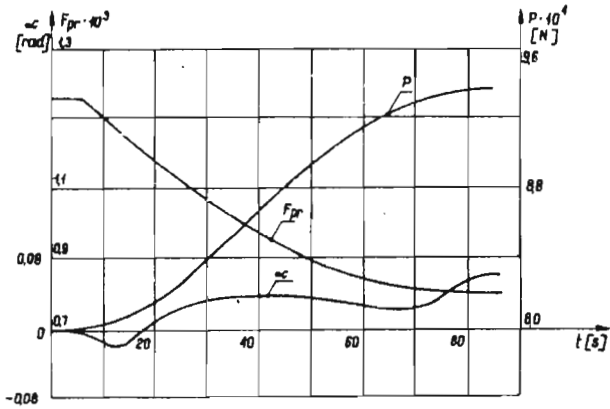
Rys. 3.



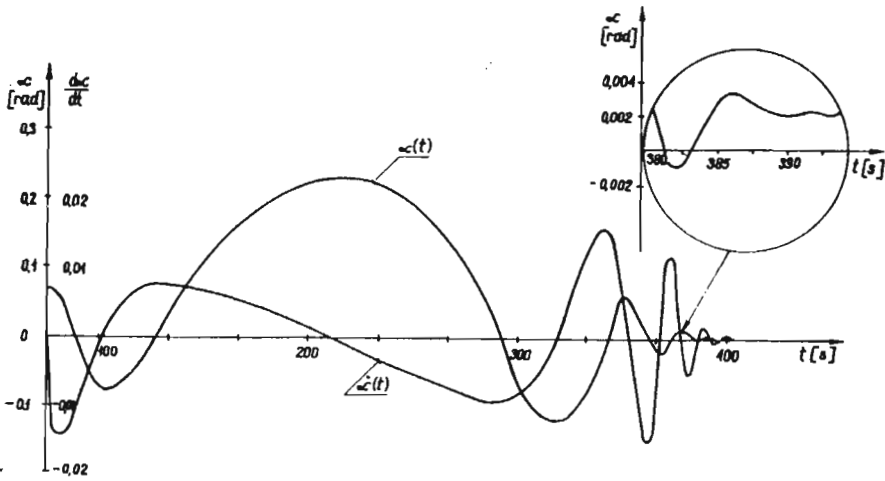
Rys. 4.



Rys. 5.



Rys. 6.



Rys. 7.