

## OPTYMALIZACJA NAPĘDU STERU W UKŁADZIE SAMONAPROWADZANIA

JANUSZ BISKUP

STANISŁAW DUBIEL

*Wojskowa Akademia Techniczna, Warszawa*

Rozważany jest ruch małej rakiety z automatycznym układem sterowania, samonaprowadzającej się na cel lecący na małej wysokości. Skuteczność rakiet przeciwlotniczych bliskiego zasięgu w istotny sposób zależy od czasu trwania procesu przejściowego z uwagi na ich krótki czas lotu do celu.

Zakłócenia w rzeczywistym ruchu sterowanym wymagają znalezienia związków sprzęgających zapewniających sterowalność procesu. Pojawia się więc problem techniczny polegający na skonstruowaniu takiego układu automatycznej regulacji, przy którym zapewniony jest możliwie najszybszy powrót ze stanu przejściowego do stanu zaprogramowanego.

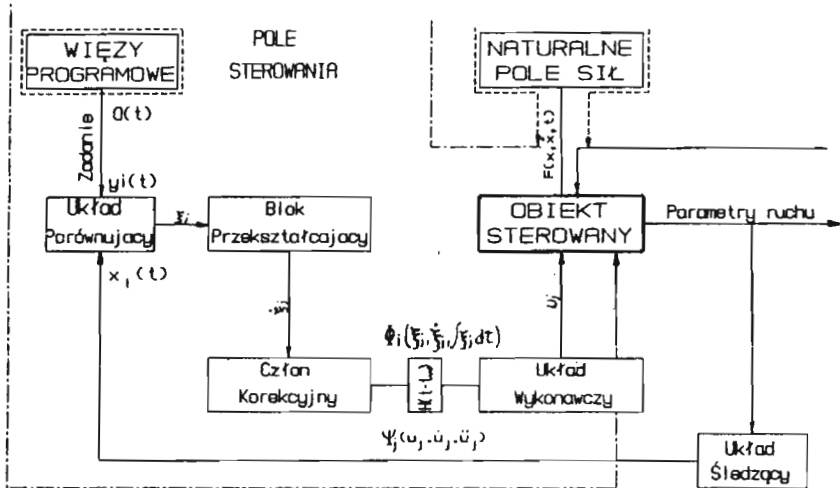
### 1. Sterowany lot rakiety jako ruch nieswobodny z więzami specjalnego typu

W chwili włączenia układu sterowania rakiety pojawia się sygnał sterujący korygujący proces, który w odniesieniu do procesu sterowanego idealnie można przedstawić następująco:

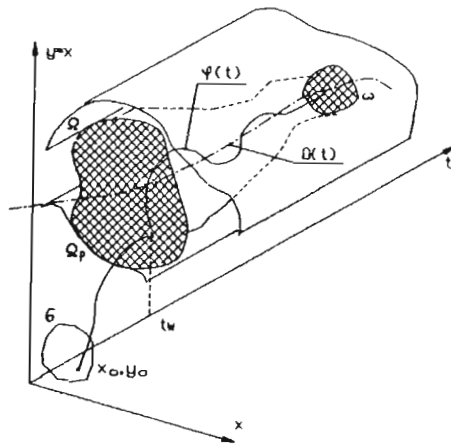
$$\sigma_k = \Phi_j(\xi_j, \xi'_j, \xi''_j, \int_0^t \xi d\tau, t). \quad (1.1)$$

Związki sprzęgające pole sygnałów  $\sigma_k$  z układem sterowań  $u_j$ , w ujęciu ogólnym mają postać:

$$\Psi_j(u''_j, u'_j, u_j) = H(t - t_w) \Phi_j(\xi''_j, \xi'_j, \xi_j, \int_0^t \xi d\tau, t). \quad (1.2)$$



Rys. 1. Automacyjny układ sterowania z więzami programowymi



Rys. 2. Tory lotu sterowanego:  $0(t)$  - idealny,  $\varphi(t)$  - rzeczywisty

Ruch sterowany wraz z dynamiką układu automatycznej regulacji można przedstawić układem równań ruchu nieswobodnego z więzami w postaci pola sił [2]:

— równania ruchu:

$$a) \quad x'' = F_i(x_1, \dots, x_n, x'_1, \dots, x'_n, u_j, u'_j, t), \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (1.3)$$

— równania więzów:

$$b) \quad \varphi_j(y_1, \dots, y_n, y'_1, \dots, y'_n, t) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, m, \quad (1.3)$$

— związki sprzęgające:

$$c) \quad \xi_i = x_i - y_i, \\ \Psi_i(u'_j, u_j, u_j) = H(t - t_w) \Phi_j(\xi''_j, \xi'_j, \xi_j, \int \xi_j d\tau, t), \quad (1.3)$$

gdzie:

$x_i$  — współrzędne określające rzeczywiste położenie rakiety,

$y_i$  — współrzędne ruchu idealnego spełniające równania więzów.

Nażenie pola sił sterujących na układ w postaci więzów z odpowiednimi związkami sprzęgającymi przedstawiono na rys.1., a idealny i rzeczywisty tor lotu sterowanego na rys.2.

Rozważania ogranicza się do sterowania rakieta w płaszczyźnie pionowej. Równania ruchu w ujęciu zlinearyzowanym z odkształcalnym układem sterowania mają postać:

— równania ruchu:

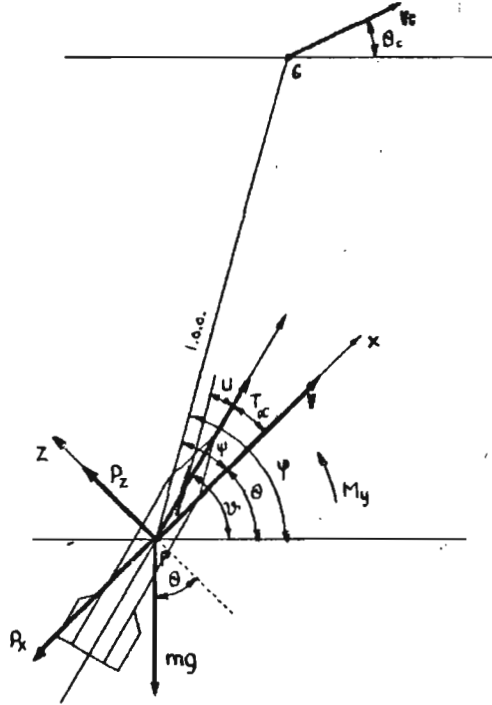
$$a) \quad m \frac{dv}{dt} = -P_x - mg \sin \gamma, \\ mv \frac{d\gamma}{dt} = T \sin \alpha + P_x - mg \cos \gamma, \\ I_v \frac{d^2 \vartheta}{dt^2} = M_y + M_{vu}, \quad (1.4) \\ \vartheta = \gamma + \alpha, \\ \frac{dx_o}{dt} = v \cos \gamma, \\ \frac{dz_o}{dt} = v \sin \gamma,$$

— równania więzów:

$$b) \quad \frac{dv}{dt} - v_c \cos(\varphi - \gamma_c) + v \cos(\varphi - \gamma) = 0, \quad (1.4) \\ r \frac{d\varphi}{dt} + v_c \sin(\varphi - \gamma) - v \sin(\varphi - \gamma) = 0,$$

— związki sprzęgające:

$$\begin{aligned} \text{c) } \quad \xi_j' &= v \sin(\varphi - \gamma) - r_o \varphi', \\ u'' + 2hu' + \omega^2 u &= H(t - t_w) \Phi(\xi, \xi'). \end{aligned} \quad (1.4)$$



Rys. 3. Układ sił i parametry ruchu.

W wyniku odpowiednich przekształceń [4], dla ustalonej prędkości lotu rakiety i małych odchyżeń od procesu programowego, otrzymano liniowy układ równań, których robocza postać dla ruchu podłużnego z kompensacją siły ciężkości i sygnału sterującego w formie  $\sigma = \Phi_j(\xi')$  jest następująca:

— równania ruchu:

$$\begin{aligned} \text{a) } \quad \alpha'' &= k_1 \omega^2 u - \omega_r^2 \alpha - 2\xi \omega_r \alpha', \\ \gamma'' &= \frac{1}{T_v} \alpha', \\ \varphi'' &= \frac{2}{l} \varphi - \frac{k_v}{l T_v} \alpha, \end{aligned} \quad (1.5)$$

— równania więzów:

$$b) \quad -v_{ce} \sin \varphi + v_c \sin(\varphi - \gamma) = 0, \quad (1.5)$$

— związki sprzęgające:

$$c) \quad u'' + 2h\omega u' + \omega^2 u = H(t - t_w)k_2\omega^2\varphi'. \quad (1.5)$$

Układ sił i parametry ruchu rakiety przedstawiono na rysunku 3.

## 2. Optymalizacja związków sprzęgających

Rozpatruje się liniowy proces sterowania opisany metodą przestrzeni stanów. Układ równań różniczkowych liniowych sprowadza się do formy:

$$\dot{x}(t) = A_0 x(t) + B_0 m(t), \quad (2.1)$$

Jeśli zmienne wejściowe potraktuje się jako zmienne stanu układu autonomizowanego [6], to proces liniowy można opisać równaniem o postaci:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) \quad (2.2)$$

przy czym  $x(t)$  jest kolumnowym wektorem zmiennych wejściowych  $u$ ; i zmiennych stanu  $x$ ; . Przyjmując oznaczenia:

$$x_1 = \varphi', \quad x_2 = \alpha, \quad x_3 = \alpha', \quad x_4 = u, \quad x_5 = u',$$

otrzymuje się układ równań:

$$\dot{x}_1 = 2lx_2 - \frac{K_v}{IT_v}x_3,$$

$$\dot{x}_2 = x_3,$$

$$\dot{x}_3 = -\omega_r^2 x_2 - 2\xi\omega_r x_3 + k_1\omega_r^2 x_4, \quad (2.3)$$

$$\dot{x}_4 = x_5,$$

$$\dot{x}_5 = k_2\omega x_2 - \omega^2 x_4 - 2h\omega x_5,$$

lub w zapisie macierzowym:

$$\dot{x}(t) = Ax(t), \quad (2.4)$$

którego macierz  $\mathbf{A}$  ma postać:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{2}{I} & \frac{K_r}{IT_r} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\omega_r^2 & -2\xi\omega_r & k_1\omega_r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ k_2\omega^2 & 0 & 0 & -\omega^2 & -2h\omega \end{bmatrix}.$$

Wprowadzając podstawienie:

$$x_i(t) = y_i(t)e^{\delta t},$$

gdzie:

$$\delta = \frac{1}{5} \text{Tr} \mathbf{A} = \frac{1}{5} (a_{11}^* + a_{33}^* + a_{55}^*),$$

układ równań (2.4) przekształca się w nowy układ równań:

$$s'(t) = \mathbf{B}s(t), \quad (2.5)$$

którego macierz  $\mathbf{B}$  ma postać:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{2}{I} - \delta & \frac{K_r}{IT_r} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\delta & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\omega_r^2 & -2\xi\omega_r - \delta & k_1^2\omega_r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\delta & 1 \\ k_2\omega^2 & 0 & 0 & -\omega^2 & -2h\omega - \delta \end{bmatrix},$$

a jej elementy leżące na przekątnej głównej wyznaczają się z zależności:

$$b_{ii} = a_{ii} - \delta.$$

Równanie charakterystyczne macierzy  $\mathbf{B}$  przekształca się do wielomianu charakterystycznego o postaci:

$$D(\omega) = \omega^5 + b_2\omega^3 + b_3\omega^2 + b_4\omega + b_5 = 0, \quad (2.6)$$

gdzie współczynniki  $b_i$  są sumami minorów głównych  $i$ -tego stopnia macierzy  $\mathbf{B}$ .

Układ równań (2.5) posiada rozwiązania nierosnące jeśli pierwiastki równania charakterystycznego macierzy  $\mathbf{B}$  są czysto urojone lub równe zero [2], [3].

Dla uzyskania takiego rozwiązania konieczne jest aby:

$$\begin{aligned} b_i &= 0 && \text{dla } i \text{ nieparzystych,} \\ b_i &> 0 && \text{dla } i \text{ parzystych.} \end{aligned} \quad (2.7)$$

Prowadzi to do warunków, z których dobiera się niektóre współczynniki  $a_{ij}^*$  macierzy  $\mathbf{A}$ , charakteryzujące dynamikę wychylenia sterów (sprężystość i tłumienie) i współczynnik wzmocnienia sygnału sterującego.

Zatem zmianie mogą podlegać współczynniki ostatniego wiersza, a pozostałe są ustalone. Dobierane współczynniki oznacza się gwiazdką.

Dla rozważanego układu uzyskano następujące zależności na współczynniki  $b_i$ :

$$\begin{aligned}
 b_1 &= \text{Tr} \mathbf{B} = \sum_{i=1}^5 b_{ii} = \sum_{i=1}^5 a_{ii} - 5\delta, \\
 b_2 &= -10\delta + a_{11} a_{33} + (a_{11} + a_{33}) a_{55}^* - a_{32} - a_{54}^*, \\
 b_3 &= 20\delta^3 - 3\delta(a_{11} a_{33} + a_{33} a_{55}^* + a_{11} a_{55}^* - a_{32}) + \\
 &\quad + (a_{11} + a_{33} - 3\delta) a_{54}^* + a_{11} a_{33} a_{55}^*, \\
 b_4 &= -15\delta^4 + 3\delta^2(a_{11} a_{33} + a_{33} a_{55}^* + a_{11} a_{55}^* - a_{54}^* - a_{32}) + \\
 &\quad + 2\delta(a_{33} a_{54}^* + a_{11} a_{54}^* + a_{55}^* a_{32} + a_{11} a_{32} - a_{11} a_{33} a_{55}^*) + \\
 &\quad - (a_{33} a_{54}^* + a_{55}^* a_{32}) a_{11} + a_{32} a_{54}^*, \\
 b_5 &= 4\delta^5 - \delta^3(a_{11} a_{33} + a_{33} a_{55}^* + a_{11} a_{55}^* - a_{54}^* - a_{32}) + \\
 &\quad + \delta^2[a_{11} a_{33} a_{55}^* - a_{54}^* (a_{11} + a_{33}) - a_{32} (a_{11} + a_{55}^*)] + \\
 &\quad + \delta(a_{11} a_{33} a_{54}^* + a_{11} a_{55}^* a_{32} - a_{32} a_{54}^*) + a_{11} a_{32} a_{54}^* + a_{12} a_{34} a_{51}^*.
 \end{aligned} \tag{2.8}$$

Warunki wystarczające otrzymania pierwiastków czysto urojonych lub równych zeru wyznacza się z równania charakterystycznego (2.6). Uwzględniając warunki na  $b_i$  (2.7) oraz wprowadzając podstawienie  $\omega^2 = b_2 r$  równanie to sprowadza się do postaci:

$$\omega(r^2 + r + \frac{b_4}{b_2^2}) = 0.$$

Otrzymano warunki wystarczające w formie:

$$0 < b_4 < \frac{1}{4} b_2^2. \tag{2.9}$$

Warunki konieczne (2.7) i wystarczające (2.9) tworzą następujący zespół warunków:

$$\begin{aligned}
 b_1 &= 0, \\
 b_2(a_{55}^*, a_{54}^*) &> 0, \\
 b_3(a_{55}^*, a_{54}^*) &= 0, \\
 b_4(a_{55}^*, a_{54}^*) &> 0, \\
 b_5(a_{55}^*, a_{54}^*, a_{51}^*) &= 0, \\
 0 < b_4 < \frac{1}{4} b_2^2.
 \end{aligned} \tag{2.10}$$

Z zespołu warunków (2.10) tworzy się zbiory dopuszczalnych wartości współczynników  $a_{ij}^*$  i  $b_i$ , dla których rozwiązania układu (2.5) są nierosnące:

— zbiór  $\mathcal{A}$  par uporządkowanych  $(a_{55}^*, a_{54}^*)$ :

$$\text{a) } \mathcal{A} = \{(a_{55}^*, a_{54}^*) : b_3(a_{55}^*, a_{54}^*) = 0 \wedge b_2(a_{55}^*, a_{54}^*) > 0\}, \quad (2.11)$$

którego wykresem jest krzywa 2 w przedziale  $a', b'$  (rys.4)<sup>1</sup>;

— zbiór  $\mathcal{B}$  ciągów  $(a_{55}^*, a_{54}^*, b_2)$ :

$$\text{b) } \mathcal{B} = \{(a_{55}^*, a_{54}^*, b_2) : b_2(a_{55}^*, a_{54}^*) > 0 \wedge (a_{55}^*, a_{54}^*) \in \mathcal{A}\}, \quad (2.11)$$

którego wykresem jest krzywa 3 w przedziale  $(a', b')$  (rys.4):

— zbiór  $\mathcal{C}$  ciągów  $(a_{55}^*, a_{54}^*, b_4)$ :

$$\begin{aligned} \text{c) } \mathcal{C} = \{ & (a_{55}^*, a_{54}^*, b_4) : b_4(a_{55}^*, a_{54}^*) > 0 \wedge \\ & \wedge 0 < b_4 < \frac{1}{4}b_2^2 \wedge (a_{55}^*, a_{54}^*) \in \mathcal{A}\}, \end{aligned} \quad (2.11)$$

którego wykresem są punkty krzywej  $b_4 = f(a_{55}^*)$  w przedziale  $(a, b)$  (rys.5);

— zbiór  $\mathcal{D}$  ciągów  $(a_{55}^*, a_{54}^*, a_{51}^*)$ :

$$\text{d) } \mathcal{D} = \{(a_{55}^*, a_{54}^*, a_{51}^*) : b_5 = f(a_{55}^*, a_{54}^*, a_{51}^*) = 0 \wedge (a_{55}^*, a_{54}^*) \in \mathcal{A}\}. \quad (2.11)$$

Dobierane współczynniki  $a_{ij}^*$  macierzy  $\mathbf{A}$  wyrażają się zależnościami:

$$\begin{aligned} a_{55}^* &= -2h\omega, \\ a_{54}^* &= -\omega^2, \\ a_{51}^* &= k_2\omega^2, \end{aligned} \quad (2.12)$$

z których wyznacza się parametry napędu sterów ( $\omega$  i  $h$ ) oraz współczynnik wzmocnienia  $k_2$ . Poszukuje się takich wartości współczynników  $a_{ij}^*$  i elementów ciągów  $(a_{55}^*, a_{54}^*, a_{51}^*) \in \mathcal{D}$ , aby rozwiązania układu (2.4) były najszybciej tłumione.

Warunki na  $b_i$  prowadzą do rozwiązania układu (2.5) w postaci:

$$s(t) = \sum_{k=1}^3 [A_k \cos \omega_k(t - t_0) + B_k \sin \omega_k(t - t_0)], \quad (2.13)$$

a układu (2.4):

$$\mathbf{x}(t) = e^{-\delta(t-t_0)} \sum_{k=1}^3 [A_k \cos \omega_k(t - t_0) + B_k \sin \omega_k(t - t_0)]. \quad (2.14)$$

<sup>1</sup>Rysunki na końcu pracy



Jednym z bardzo istotnych warunków najszybszego tłumienia układu (2.4) jest jak największa wartość bezwzględna śladu macierzy  $A$ :

$$|\text{Tr}A| = |\text{Tr}A|_{\max} \quad \text{przy} \quad \text{Tr}A < 0. \quad (2.15)$$

Powyższy warunek spełnia się doбором współczynnika  $a_{55}^*$ . Przy ujemnej wartości współczynnika  $a_{55}^*$  warunek (2.15) jest spełniony gdy:

$$|a_{55}^*| = |a_{55}^*|_{\max}, \quad (2.16)$$

co zachodzi w punkcie  $b$ , w którym  $b_4 = 14b_2^2$  (rys.5).

Wyznaczono rozwiązania w punktach  $n_1, n_2, n_3$  spełniające zespół warunków (2.10) oraz w punktach  $n_4$  i  $n_5$  nie spełniające tych warunków. Wyniki rozwiązań przedstawiono na rysunkach: 6 - 10, a zestawienie składowej  $x_2$  w punktach  $n_1, n_2, n_3, n_4$ , na rysunku 11.

Z porównania czasu regulacji  $t_r$  zmiennej  $x_2$ , dla ustalonego  $\Delta = 0.0025$  rad, wynika, że najkrótszy czas regulacji posiada rozwiązanie w punkcie  $n_2$ , mimo iż

$$|a_{55}^*|_{n_2} < |a_{54}^*|_{n_1}. \quad (2.17)$$

W punktach  $a$  i  $b$  (rys.5) układ posiada wartości własne zbliżone do siebie, co powoduje wrażliwość układu charakteryzującą się wzrostem amplitudy i wydłużeniem czasu procesu przejściowego. Wynika stąd ważny wniosek: należy dobrać parametry sterowania tak, aby wartości własne  $\omega_i$  różniły się od siebie dostatecznie wyraźnie. Dla warunków optymalnych "czas regulacji  $t_r$ " jest najkrótszy co było zamierzeniem optymalizacji.

### 3. Wnioski końcowe

Wpływ przekształcenia sygnału sterującego przez odkształcalny układ sterowania na proces samonaprowadzania jest bardzo wyraźny. Towarzyszące temu przekształceniu procesy przejściowe napędu sterów zmieniają charakter i jakość rozwiązań układu. Wykorzystanie metody optymalizacji opisanej w pracach [2] i [3] umożliwi wyznaczenie takiej struktury układu sterowania, aby powstałe odchylenia od ruchu programowego zanikały najszybciej. Ma to praktyczne znaczenie przy projektowaniu raket przeznaczonych do niszczenia celów niskolejących, gdzie dąży się do minimalizacji czasu przechwycenia celu oraz bliższej granicy strefy ataku.

### 4. Literatura

1. И.П.Доброленский и др., Автоматика управляемых снарядов, Гос.Науч.-Тех.Изд.Оборонгиз, Москва 1963

2. S.DUBIEL, *Układy mechaniczne celowego działania*, Sterowanie w mechanice, Roz. IV, Warszawa 1983
3. S.DUBIEL, *Liniowe układy mechaniczne o najszybszym tłumieniu*, Mechanika Teoretyczna i Stosowana z.3, t.24, 1986
4. А.Н.Голубенцев, *Интегральные методы в динамике*, Изд.Техника, Киев 1967
5. B.KOWALCZYK, *Macierze i ich zastosowania*, PWNT, Warszawa 1976
6. J.T.TOU, *Nowoczesna teoria sterowania*, PWNT, Warszawa 1967

### Summary

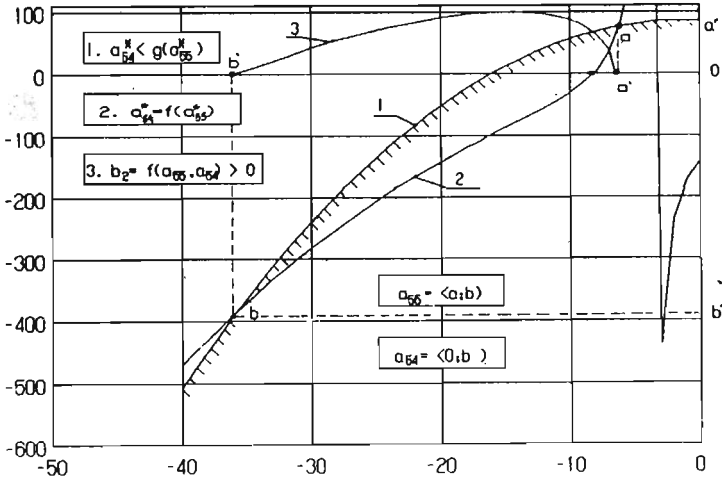
The optimization refers to joining bonds of homing missile movement with steering fields. These bonds have been introduced in the form of oscillating circuit for rudder driver with the signal proportional to angular line-of-sight velocity. There have been determined the rudder driver characteristic and rate gain guaranteeing the most rapid damping of regulation process.

As the results we have obtained a set of solutions of optimal characteristics and the solution for the shortest time of regulation.

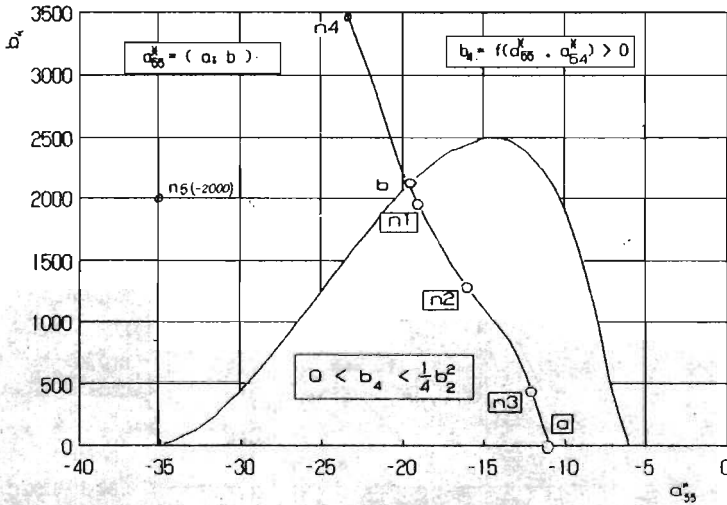
### Резюме

Оптимизация подвержено связи сопряжения движения самонаводящей ракеты, соединяющие колебательный привод руля с полем управлений сигналов управления пропорциональных к угловой скорости линии наблюдения. Определено характеристики и коэффициент усиления колебательного привода руля, гарантирующие наиболее быстрое затухание переходных процессов. В результате исследований получено множество решений оптимальных характеристик и определено решение для наиболее короткого времени регулирования процесса самонаведения.

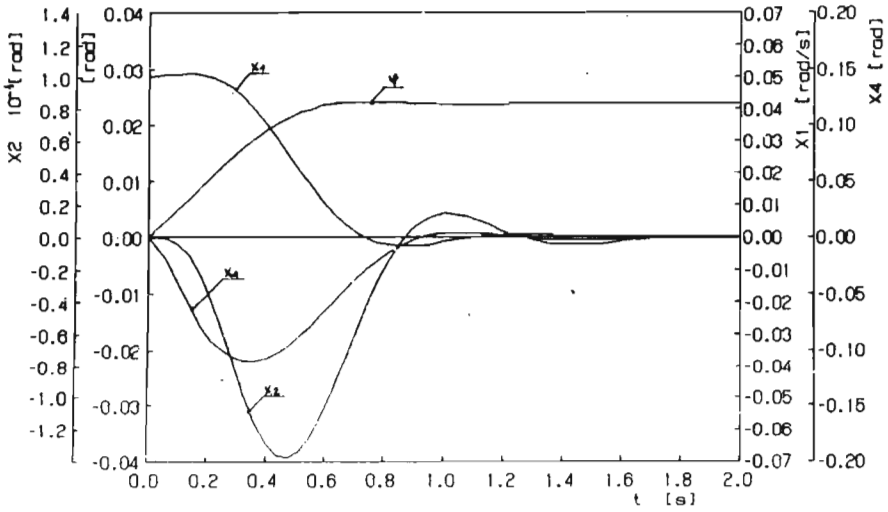
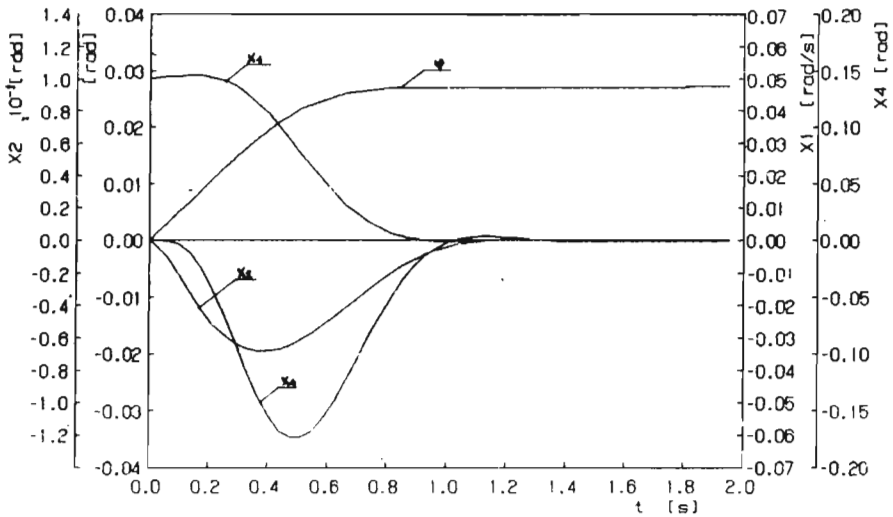
*Praca wpłynęła do Redakcji dnia 15 marca 1989 roku*

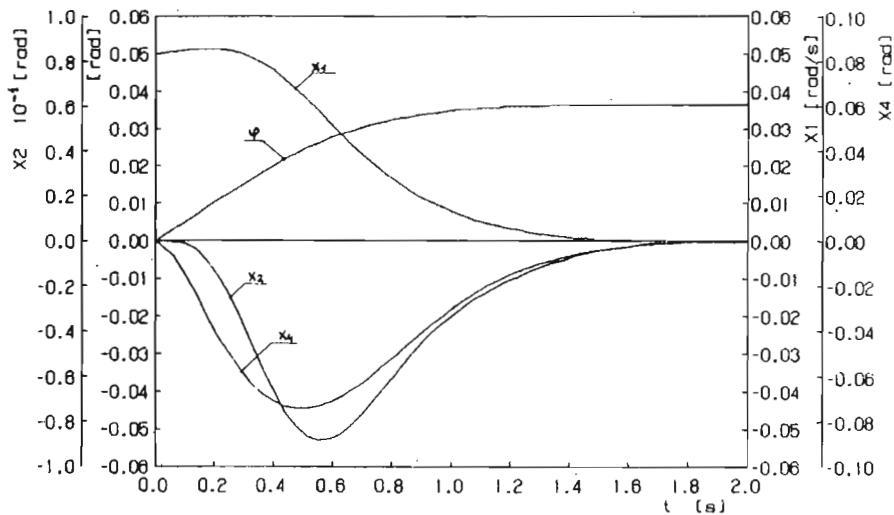
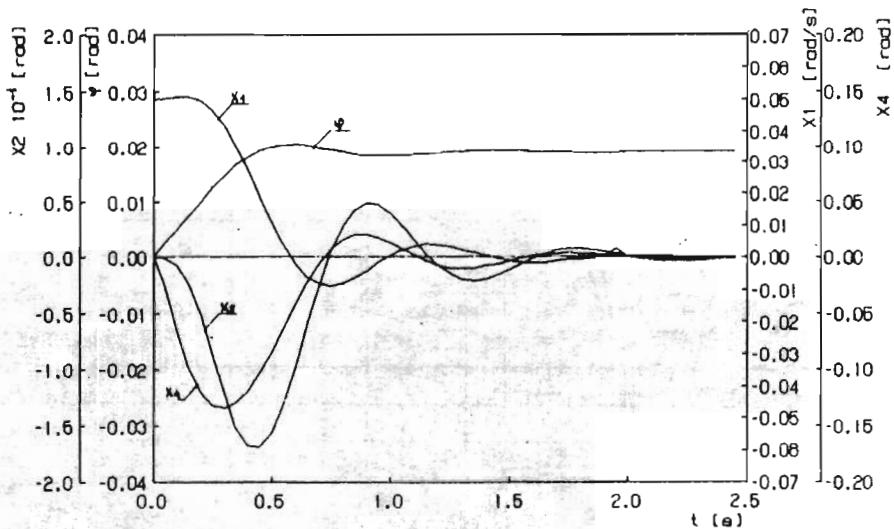


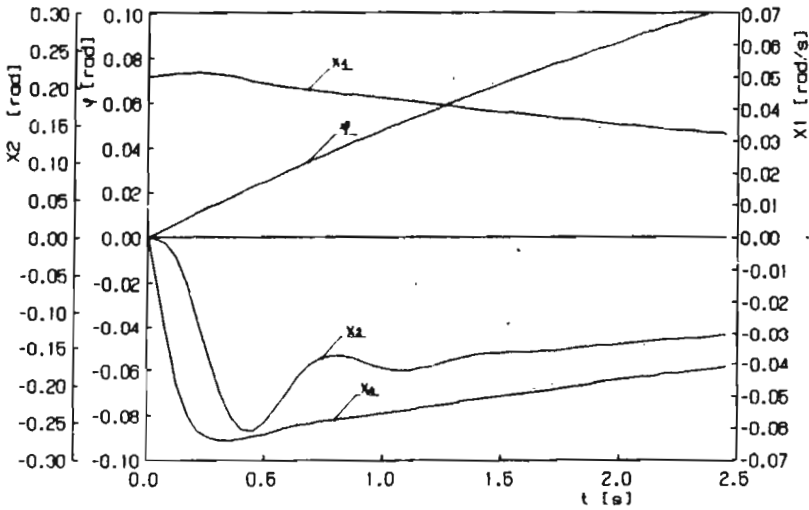
Rys. 4. Wykresy zbiorów wartości współczynników  $\alpha_{55}^*$  i  $b_i$



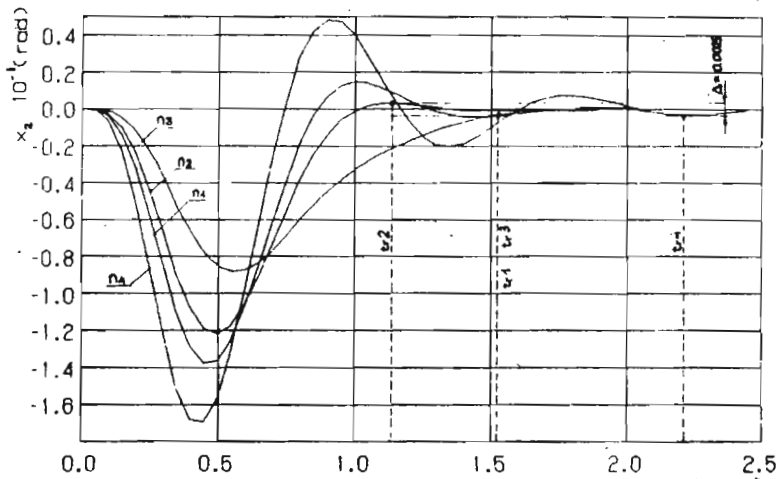
Rys. 5. Wykres zbioru dopuszczalnych wartości współczynników  $\alpha_{55}^*$  i  $b_i$

Rys. 6. Rozwiązanie układu w punkcie  $n_1$ Rys. 7. Rozwiązanie układu w punkcie  $n_2$

Rys. 8. Rozwiązanie układu w punkcie  $n_3$ Rys. 9. Rozwiązanie układu w punkcie  $n_4$



Rys. 10. Rozwiązanie układu w punkcie  $n_5$



Rys. 11. Zestawienie składowej  $x_2$  w punktach  $n_1$ ,  $n_2$ ,  $n_3$  i  $n_4$