

## METODA SKOŚNEGO PRZEŚWIETLANIA DO ANALIZY PŁASKIEGO STANU NAPRĘŻENIA PRZY WYKORZYSTANIU JEDYNIIE POLA IZOCHROM

MAREK SIKOŃ

*Politechnika Krakowska*

### Wstęp

Poszukiwania zmierzające do analizy jedynie pola izochrom w badaniach elasto-  
optycznych są uzasadnione trudną interpretacją zwykle bardzo rozmytego pola izoklin  
jak też przydatnością tego typu technik przy dynamicznych obciążeniach modeli.

Spośród metod wykorzystujących do analizy płaskiego stanu naprężenia obrazy samych  
tylko izochrom, a więc jedynie informację o różnicy faz promieni składowych należy  
wymienić: metodę wyznaczania sumy naprężeń głównych z równania Laplace'a [3] metodę  
charakterystyk [4], metodę światła rozproszonego [5] i [6], metodę skośnego prześwie-  
tlenia [7]. Dwie pierwsze metody wymagają uzupełnienia pomiaru dodatkowymi równaniami  
teorii sprężystości, co w konsekwencji zamiany pochodnych różnicami skończonymi  
i prowadzenia obliczeń metodą „krok po kroku” powoduje zwielokrotnienie błędów.

Trzecia metoda daje już wystarczające informacje dla każdego punktu wewnątrz  
obszaru modelu, wymaga jednak zastosowania bardziej złożonej aparatury pomiarowej  
i stwarza większe wymagania dla modeli elasto-  
optycznych.

Skośne prześwie-  
tlenie daje rozwiązanie poprzez pomiar w klasycznym polaryskopie,  
nie wymaga rozbudowy aparatury pomiarowej oraz unika błędów metody „krok po kroku”.  
Zalety te przekonują do większego zainteresowania się tą metodą.

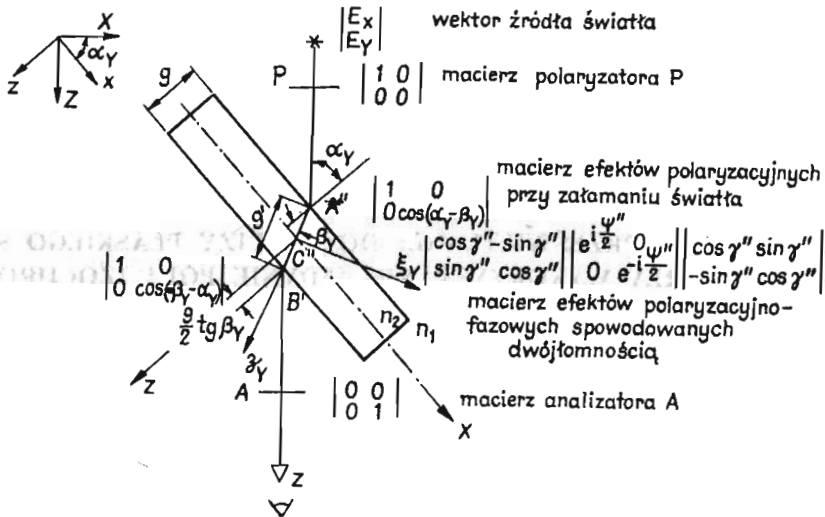
Klasyczna metoda skośnego prześwie-  
tlenia zaproponowana w pracy [7], wymaga  
znajomości pola izoklin i jest uciążliwa z uwagi na konieczność obrotu modelu do prześwie-  
tlenia skośnego wokół kierunku jednego z naprężeń głównych w badanym punkcie modelu.

Obrót modelu do skośnego prześwie-  
tlenia realizowany w niniejszej pracy odbywa się  
wokół osi przyjętych niezależnie od kierunków naprężeń głównych. Do analizy wykorzysta-  
wane jest jedynie pole izochrom.

### 1. Analiza biegu światła przy skośnym prześwie- tleniu

Zasadę skośnego prześwie-  
tlenia oraz macierzowy zapis oddziaływania kolejnych  
czynników znajdujących się na drodze światła na falę świetlną [1], [2] przedstawia rys. 1.

Definiujemy trzy prostokątne układy współrzędnych jak na rys. 1. Układ XYZ jest



Rys. 1.

związany z polaryskopem, układ  $xyz$  z modelem, układ  $\xi\eta\zeta$  jest związany ze skośnym prześwietlaniem. Osie  $Y, y, \eta$  są prostopadłe do płaszczyzny rysunku. Ustawienie modelu do skośnego prześwietlania realizujemy w układzie  $XYZ$ . Model obracamy wokół osi  $X$  i  $Y$ . Oznaczamy układ  $\xi_x \eta_x \zeta_x$  związany z obrotem modelu wokół osi  $X$  i układ  $\xi_y \eta_y \zeta_y$  związany z obrotem modelu wokół osi  $Y$ . (Rys. 1 przedstawia położenie modelu w przypadku realizacji obrotu wokół osi  $Y$ ).

Model prześwietlamy trzykrotnie: normalnie wzdłuż kierunku  $z$  i skośnie wzdłuż kierunków  $\zeta_x$  i  $\zeta_y$ .

Do opisu zjawisk zachodzących w polaryskopie wykorzystujemy założenia falowej teorii światła.

Obciążony model umieszczony w polaryskopie i oświetlony spolaryzowanym światłem monochromatycznym, daje efekt, który jest sumą oddziaływania wszystkich czynników znajdujących się na drodze światła na falę świetlną.

Punkty, w których strumień światła podlega przemianie opisujemy za pomocą macierzy Jonesa (rys. 1) [1], [2]. Wyprowadzenia stosowanych macierzy są zawarte w dodatku I.

$$E = \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \end{bmatrix} \quad \text{— wektor fali świetlnej wychodzącej ze źródła światła,}$$

$$M_P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{— macierz polaryzatora,}$$

$$M_A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{— macierz analizatora,}$$

$$R(\gamma) = \begin{bmatrix} \cos \gamma & \sin \gamma \\ -\sin \gamma & \cos \gamma \end{bmatrix} \quad \text{— macierz obrotu płaszczyzny polaryzacji o kąt } \gamma,$$

$$R(-\gamma) = \begin{bmatrix} \cos \gamma & -\sin \gamma \\ \sin \gamma & \cos \gamma \end{bmatrix} \quad \text{— macierz obrotu płaszczyzny polaryzacji o kąt } (-\gamma),$$

$$\mathbf{T}(\psi) = \begin{bmatrix} e^{i\frac{\psi}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{\psi}{2}} \end{bmatrix} \text{ — macierz względnego opóźnienia } \psi \text{ składowych pola elektrycznego,}$$

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha - \beta) \end{bmatrix} \text{ — macierz efektów polaryzacyjnych przy załamaniu światła } (\alpha, \beta \text{ kąty padania i załamania}).$$

Oznaczając:

$E_X, E_Y$  — składowe wektora natężenia pola elektrycznego drgające wzdłuż osi  $X$  i  $Y$ ,

$\psi, \psi', \psi''$  — różnica faz składowych wektora pola elektrycznego drgających wzdłuż kierunków naprężeń optycznie czynnych dla prześwietlenia normalnego i dla prześwietlań skośnych w kierunkach  $\zeta_X, \zeta_Y$ ,

$\gamma, \gamma', \gamma''$  — parametry izoklin dla prześwietlenia normalnego i dla prześwietleń skośnych w kierunkach  $\zeta_X$  i  $\zeta_Y$ ,

$\alpha_X, \beta_X$  — kąt padania i załamania dla prześwietlenia w kierunku  $\zeta_X$ ,

$\alpha_Y, \beta_Y$  — kąt padania i załamania dla prześwietlenia w kierunku  $\zeta_Y$ .

przystosujemy macierze Jonesa do warunków prześwietlenia normalnego i prześwietlań skośnych i zapiszemy wzory na wypadkowe wektory fal pola elektrycznego jako iloczyny macierzy kolejnych czynników znajdujących się na drodze światła.

$$\begin{aligned} E^z &= \mathbf{M}_A \mathbf{R}(-\gamma) \mathbf{T}(\psi) \mathbf{R}(\gamma) \mathbf{M}_P E, \\ E^{\zeta_X} &= \mathbf{M}_A \mathbf{P}(X) \mathbf{R}(-\gamma') \mathbf{T}(\psi') \mathbf{R}(\gamma') \mathbf{P}(X) \mathbf{M}_P E, \\ E^{\zeta_Y} &= \mathbf{M}_A \mathbf{P}(Y) \mathbf{R}(-\gamma'') \mathbf{T}(\psi'') \mathbf{R}(\gamma'') \mathbf{P}(Y) \mathbf{M}_P E, \end{aligned} \quad (1)$$

gdzie:

$E^z, E^{\zeta_X}, E^{\zeta_Y}$  — wypadkowe wektory fal pola elektrycznego dla prześwietlenia normalnego i dwóch prześwietleń skośnych w kierunkach  $\zeta_X$  i  $\zeta_Y$ .

Po wykonaniu mnożenia otrzymujemy:

$$\begin{aligned} E^z &= iE_X \sin 2\gamma \sin \frac{\psi}{2}, \\ E^{\zeta_X} &= iE_X \cos(\alpha_X - \beta_X) \sin 2\gamma' \sin \frac{\psi'}{2}, \\ E^{\zeta_Y} &= iE_X \cos(\alpha_Y - \beta_Y) \sin 2\gamma'' \sin \frac{\psi''}{2}. \end{aligned} \quad (2)$$

Iloczyny powyższych wektorów i ich wartości zespolonych sprzężonych dają wzory na natężenie światła dla kolejnych prześwietleń modelu:

$$\begin{aligned} J &= E^z E^{z*} = E_X^2 \sin^2 2\gamma \sin^2 \frac{\psi}{2}, \\ J_X &= E^{\zeta_X} E^{\zeta_X*} = E_X^2 \cos^2(\alpha_X - \beta_X) \sin^2 2\gamma' \sin^2 \frac{\psi'}{2}, \\ J_Y &= E^{\zeta_Y} E^{\zeta_Y*} = E_X^2 \cos^2(\alpha_Y - \beta_Y) \sin^2 2\gamma'' \sin^2 \frac{\psi''}{2}. \end{aligned} \quad (3)$$

## 2. Związek pomiędzy stanem naprężeń a stanem optycznym przy skośnym prześwietlaniu

W układach  $xyz$ ,  $\xi_x \eta_x \zeta_x$ ,  $\xi_y \eta_y \zeta_y$  liczymy różnicę ekstremalnych naprężeń normalnych w płaszczyznach prostopadłych do kierunków  $z$ ,  $\zeta_x$ ,  $\zeta_y$  wyrażając naprężenia układów  $\xi_x \eta_x \zeta_x$  i  $\xi_y \eta_y \zeta_y$  poprzez naprężenia układu  $xyz$  [3]. Operacje te zawarte są w dodatku II.

$$\begin{aligned}\sigma_1^z - \sigma_2^z &= [(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2]^{\frac{1}{2}}, \\ \sigma_1^{\zeta_x} - \sigma_2^{\zeta_x} &= [(\sigma_x - \sigma_y \cos^2 \beta_x)^2 + 4\tau_{xy}^2 \cos^2 \beta_x]^{\frac{1}{2}}, \\ \sigma_1^{\zeta_y} - \sigma_2^{\zeta_y} &= [(\sigma_x \cos^2 \beta_y - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2 \cos^2 \beta_y]^{\frac{1}{2}}.\end{aligned}\quad (4)$$

Związek pomiędzy stanem naprężeń a stanem optycznym wyrażamy poprzez wzór Maxwella — Naumanna przystosowany do warunków prześwietlania normalnego i dwóch prześwietleń skośnych (szkieł wyprowadzenia wzoru Maxwella — Naumanna zawarty jest w dodatku III).

$$\begin{aligned}(\sigma_1^z - \sigma_2^z) dz &= \frac{\lambda}{2\pi C_\sigma} \left[ d\psi - \left( \frac{a}{b} - \frac{b}{a} \right) \sin \psi d\Phi \right], \\ (\sigma_1^{\zeta_x} - \sigma_2^{\zeta_x}) d\zeta_x &= \frac{\lambda}{2\pi C_\sigma} \left[ d\psi' - \left( \frac{a'}{b'} - \frac{b'}{a'} \right) \sin \psi' d\Phi' \right], \\ (\sigma_1^{\zeta_y} - \sigma_2^{\zeta_y}) d\zeta_y &= \frac{\lambda}{2\pi C_\sigma} \left[ d\psi'' - \left( \frac{a''}{b''} - \frac{b''}{a''} \right) \sin \psi'' d\Phi'' \right],\end{aligned}\quad (5)$$

gdzie:

- $a, b$  — amplitudy wektorów natężenia pola elektrycznego drgających wzdłuż kierunków naprężeń optycznie czynnych w przypadku prześwietlania normalnego,
- $a', b'$  — amplitudy jak wyżej w przypadku prześwietlania w kierunku  $\zeta_x$ ,
- $a'', b''$  — amplitudy jak wyżej w przypadku prześwietlania w kierunku  $\zeta_y$ ,
- $d\Phi, d\Phi', d\Phi''$  — elementarny obrót kierunków naprężeń optycznie czynnych na drodze  $dz, d\zeta_x, d\zeta_y$ ,
- $\lambda$  — długość fali światła użytego do badań,
- $C_\sigma$  — stała optyczna.

Łącząc (4) i (5) przy uwzględnieniu efektu sumowania dwójtomności wzdłuż drogi światła w modelu zapiszemy:

$$\begin{aligned}\int_A^B [(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2]^{\frac{1}{2}} dz &= \frac{\lambda}{2\pi C_\sigma} \int_A^B \left[ d\psi - \left( \frac{a}{b} - \frac{b}{a} \right) \sin \psi d\Phi \right], \\ \int_{A'}^{B'} [(\sigma_x - \sigma_y \cos^2 \beta_x)^2 + 4\tau_{xy}^2 \cos^2 \beta_x]^{\frac{1}{2}} d\zeta_x &= \int_{A'}^{B'} \left[ d\psi' - \left( \frac{a'}{b'} - \frac{b'}{a'} \right) \sin \psi' d\Phi' \right], \\ \int_{A''}^{B''} [(\sigma_x \cos^2 \beta_y - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2 \cos^2 \beta_y]^{\frac{1}{2}} d\zeta_y &= \int_{A''}^{B''} \left[ d\psi'' - \left( \frac{a''}{b''} - \frac{b''}{a''} \right) \sin \psi'' d\Phi'' \right],\end{aligned}\quad (6)$$

gdzie:

- $A, B; A', B'; A'', B''$  — punkty wejścia i wyjścia światła z modelu (granice całkowania) dla prześwietlania normalnego i dwóch prześwietleń skośnych.

Pomiary będziemy wykonywać w punktach w których  $\psi$ ,  $\psi'$ ,  $\psi''$  są wielokrotnościami liczby  $2\pi$  (izochromy). W punktach tych  $I = I_x = I_y = 0$  (3). Do lewych stron równań (6) zastosujemy twierdzenie o wartości średniej zakładając istnienie wartości średniej w punkcie przecięcia się dróg geometrycznych światła przy prześwietlaniu modelu w kierunku  $z$ ,  $\zeta_x$ ,  $\zeta_y$ . Wobec powyższego równania (6) zapiszemy:

$$\begin{aligned} [(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2]^{\frac{1}{2}}(B - A) &= \frac{\lambda}{2\pi C_\sigma} [\Psi(B) - \psi(A)], \\ [(\sigma_x - \sigma_y \cos^2 \beta_x)^2 + 4\tau_{xy}^2 \cos^2 \beta_x]^{\frac{1}{2}}(B' - A') &= \frac{\lambda}{2\pi C_\sigma} [\psi'(B') - \psi'(A')], \\ [(\sigma_x \cos^2 \beta_y - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2 \cos^2 \beta_y]^{\frac{1}{2}}(B'' - A'') &= \frac{\lambda}{2\pi C_\sigma} [\psi''(B'') - \psi''(A'')]. \end{aligned}$$

Skośne prześwietlanie modelu będziemy dokonywać dla  $\beta_x = \beta_y = \beta$ . Wobec tego  $B' - A' = B'' - A'' = \frac{9}{\cos \beta}$ . Różnica faz w punktach wejścia i wyjścia z modelu przyjmuje wartość:

$$\begin{aligned} \psi(A) &= \psi(A') = \psi(A'') = 0, \\ \psi(B) &= 2\pi m, \\ \psi'(B') &= 2\pi m_x, \\ \psi''(B'') &= 2\pi m_y, \end{aligned} \quad (8)$$

gdzie:  
 $m, m_x, m_y$  — rzędy izochrom dla prześwietlania normalnego i dwóch prześwietlań skośnych.

Wobec powyższego układ równań:

$$\begin{aligned} [(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2]^{\frac{1}{2}} &= k \cdot m, \\ [(\sigma_x - \sigma_y \cos^2 \beta)^2 + 4\tau_{xy}^2 \cos^2 \beta] &= k \cdot m_x \cdot \cos \beta, \\ [(\sigma_x \cos^2 \beta - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2 \cos^2 \beta] &= k \cdot m_y \cdot \cos \beta, \end{aligned} \quad (9)$$

gdzie:

$$\beta = \arcsin \left( \frac{n_1}{n_2} \sin \alpha \right),$$

$n_2$  — współczynnik załamania materiału modelu,

$n_1$  — wsp. załamania powietrza,

$k = \frac{\lambda}{C_\sigma \cdot g}$  — elastoptyczna stała modelowa,

daje rozwiązanie płaskiego stanu naprężenia w punkcie przecięcia się dróg geometrycznych światła przy trzykrotnym prześwietlaniu modelu:

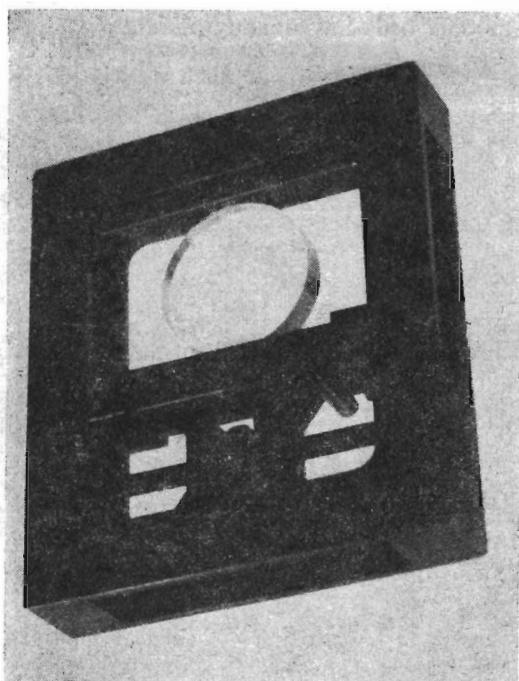
$$\begin{aligned} \sigma_x &= kk(\beta)[m_x^2 - m^2 + \cos^2 \beta(m_y^2 - m^2)]^{\frac{1}{2}}, \\ \sigma_y &= kk(\beta)[m_y^2 - m^2 + \cos^2 \beta(m_x^2 - m^2)]^{\frac{1}{2}}, \\ \tau_{xy} &= \frac{k}{2} \left\{ m^2 - k^2(\beta) \left\{ (m_x^2 + m_y^2 - 2m^2)(1 + \cos^2 \beta) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - 2 \{ (m_x^2 - m^2)(m_y^2 - m^2)(1 + \cos^2 \beta) + \cos^2 \beta [(m_x^2 - m^2)^2 + (m_y^2 - m^2)^2] \} \right\}^{\frac{1}{2}} \right\}^{\frac{1}{2}}, \end{aligned} \quad (10)$$

gdzie:

$$k(\beta) = \frac{\cos \beta}{\sin^2 \beta (1 + \cos^2 \beta)^{\frac{1}{2}}}$$

### 3. Przykład zastosowania opisanej metody

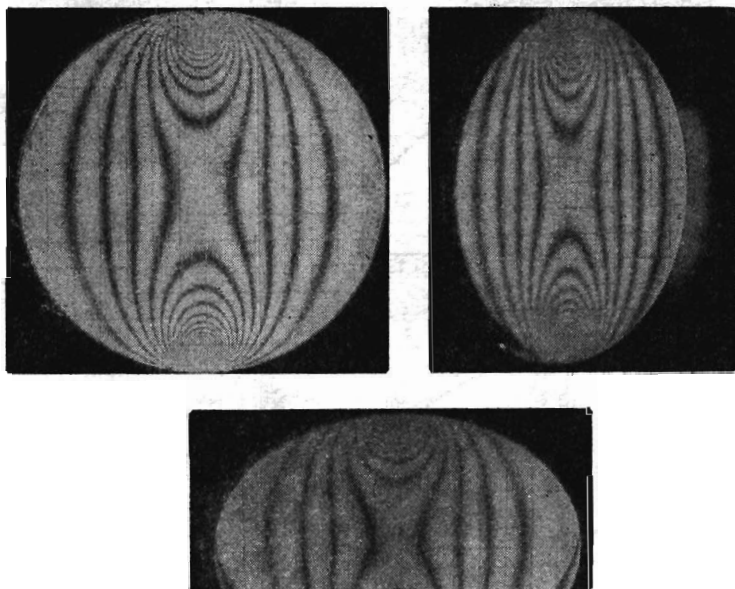
Badania elastoptyczne opisaną metodą przeprowadzono na krążku o średnicy  $D = 0,0703$  [m] i grubości  $g = 0,014$  [m] obciążonym dwiema siłami skupionymi  $P = 1500$  [N] wzdłuż średnicy.



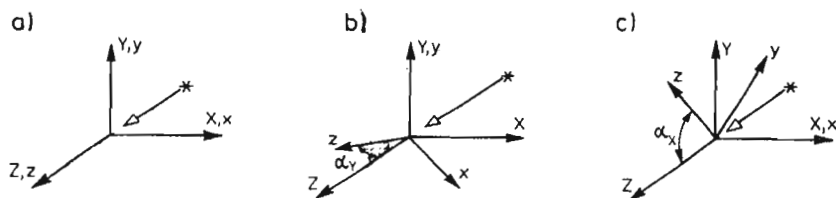
Rys. 2. Układ obciążający stosowany w pracy: 1 — rama, 2 — podstawa, 3 — belka przesuwna, 4 — śruba rzymska, 5 — pokrętło, 6 — model. Obrót pokrętłem 5 śruby rzymskiej 4 powoduje przesunięcie belki 3 i ściskanie modelu 6.

Pomiar przeprowadzono w klasycznym polaryskopie transmisyjnym. Model zamocowano w układzie obciążającym (rys. 2), który obracano w płaszczyźnie  $ZY$  i  $ZX$  o kąt  $\alpha_x = \alpha_y = 45^\circ$ . Rejestrowano izochromy w świetle spolaryzowanym kołowo, w ciemnym i jasnym polu widzenia (rys. 3).

Rys. 4 przedstawia wzajemne położenia modelu (układ  $xyz$ ) w polaryskopie (układ  $XYZ$ ) odpowiadające obrazom izochrom pokazanym na rys. 3. Wykresy zależności rzędu izochromy  $m$ ,  $m_x$ ,  $m_y$  dla wybranej współrzędnej poziomej  $x_1$  przebiegającej w odległości  $y = 0,01$  [m] od średnicy poziomej modelu przedstawia rys. 5.



Rys. 3. Zdjęcia efektów optycznych przy prześwietlaniu modelu w kierunku: a) normalnym, b) skośnym po obrocie modelu wokół osi Y, c) skośnym po obrocie modelu wokół osi X. Zdjęcia 3a, b, c odpowiadają rys. 4a, b, c.



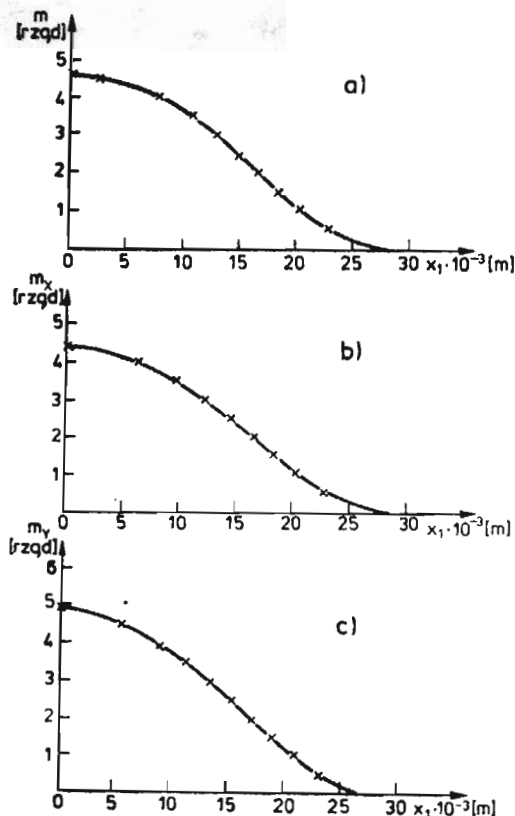
Rys. 4. Położenie modelu (układ  $x,y,z$ ) w polaryskopie (układ  $XYZ$ ), w przypadku prześwietlania: a) normalnego, b) skośnego, po obrocie modelu wokół osi Y, c) skośnego, po obrocie modelu wokół osi X. Rys. 4a, b, c odpowiadają rys. 3a, b, c.

Na podstawie otrzymanych wyników obliczono naprężenia  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\tau_{xy}$ , stosując wzory (10). Wyniki ujęto w formie wykresów (rys. 6). Na wykresach przedstawiono również rozwiązania teoretyczne badanego modelu [8].

#### 4. Analiza wyników i ocena błędów

Przedstawione na wykresach (rys. 6) wyniki badań doświadczalnych wykazują odstępstwa od rozwiązań teoretycznych.

Narzucenie z góry istnienia wartości średniej w środku odcinków  $\overline{A'B'}$  i  $\overline{A''B''}$  (rys. 7) może powodować różnice pomiędzy wartościami  $m_x$  i  $m_y$  odczytanymi w polaryskopie



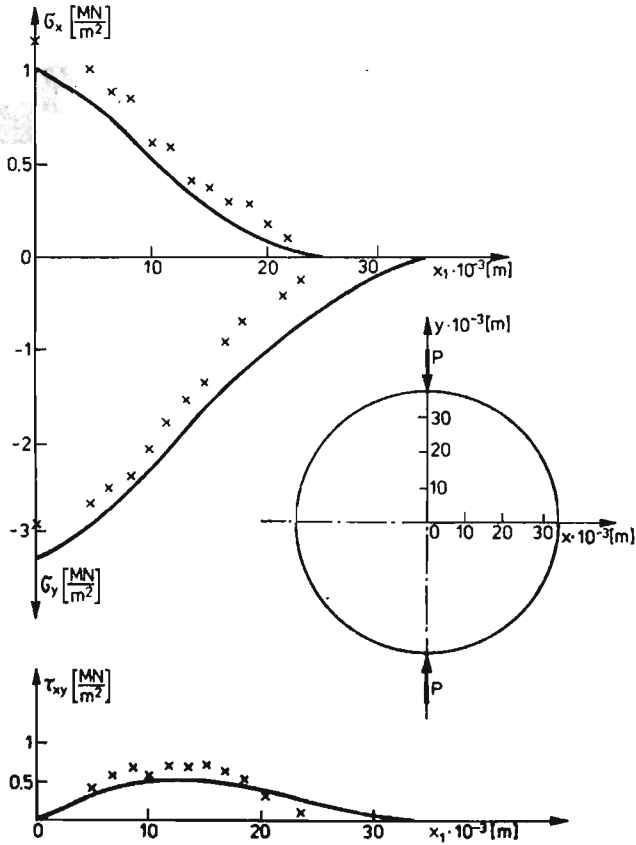
Rys. 5. Wyniki pomiaru — zależność rzędu izochromy od współrzędnej  $x_1$  dla prześwietlenia a) normalnego — w kierunku  $z$ , b) skośnego — w kierunku  $\zeta_x$ , c) skośnego — w kierunku  $\zeta_y$ .

a rzeczywistości istniejącymi w płaszczyźnie środkowej modelu, szczególnie przy nieliniowym i niesymetrycznym rozkładzie funkcji  $m(\zeta)$ . Charakter rozkładu funkcji  $m(\zeta)$  może powodować przesunięcie wartości średnich względem wartości rzeczywistych in plus lub in minus, co wpływa na wartości naprężeń liczonych wg wzorów (10).

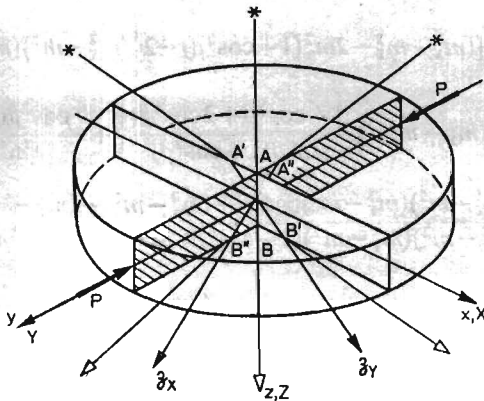
Błąd w odczycie rzędów izochrom oraz niedokładność ustawienia modelu do skośnego prześwietlenia uwzględnimy licząc błąd bezwzględny wyrażen:

$$\begin{aligned}
 n_x &= \frac{C_\sigma g}{\lambda} \sigma_x = \frac{\cos \beta}{\sin^2 \beta (1 + \cos^2 \beta)^{\frac{1}{2}}} [m_x^2 - m^2 + \cos^2 \beta (m_y^2 - m^2)]^{\frac{1}{2}}, \\
 n_y &= \frac{C_\sigma g}{\lambda} \sigma_y = \frac{\cos \beta}{\sin^2 \beta (1 + \cos^2 \beta)^{\frac{1}{2}}} [m_y^2 - m^2 + \cos^2 \beta (m_x^2 - m^2)]^{\frac{1}{2}}, \\
 n_{xy} &= \frac{C_\sigma g}{\lambda} \tau_{xy} = \frac{1}{2} \left\{ m^2 - \frac{\cos^2 \beta}{\sin^4 \beta (1 + \cos^2 \beta)} \left\{ (m_x^2 + m_y^2 - 2m^2)(1 + \cos^2 \beta) + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - 2 \{ (m_x^2 - m^2)(m_y^2 - m^2)(1 + \cos^4 \beta) + \cos^2 \beta [(m_x^2 - m^2)^2 + (m_y^2 - m^2)^2] \} \right\}^{\frac{1}{2}} \right\},
 \end{aligned} \tag{11}$$





Rys. 6. Rozwiązania płaskiego stanu naprężenia dla  $y = 10 \cdot 10^{-3}$  m — — teoretyczne, x — doświadczalne



Rys. 7. Przestrzenne rozmieszczenie kierunków prześwietlania modelu.

według wzorów:

$$\begin{aligned}\Delta n_x &= \frac{\partial n_x}{\partial m_x} \Delta m_x + \frac{\partial n_x}{\partial m_y} \Delta m_y + \frac{\partial n_x}{\partial m} \Delta m + \frac{\partial n_x}{\partial \beta} \Delta \beta, \\ \Delta n_y &= \frac{\partial n_y}{\partial m_x} \Delta m_x + \frac{\partial n_y}{\partial m_y} \Delta m_y + \frac{\partial n_y}{\partial m} \Delta m + \frac{\partial n_y}{\partial \beta} \Delta \beta, \\ \Delta n_{xy} &= \frac{\partial n_{xy}}{\partial m_x} \Delta m_x + \frac{\partial n_{xy}}{\partial m_y} \Delta m_y + \frac{\partial n_{xy}}{\partial m} \Delta m + \frac{\partial n_{xy}}{\partial \beta} \Delta \beta.\end{aligned}\quad (12)$$

Po wykonaniu działań otrzymujemy:

$$\begin{aligned}\Delta n_x &= n_x \left[ \frac{m_x \Delta m_x + m_y \Delta m_y \cos^2 \beta - m(1 + \cos^2 \beta) \Delta m - \frac{1}{2} (m_y^2 - m^2) \sin 2\beta \Delta \beta}{m_x^2 - m^2 + \cos^2 \beta (m_y^2 - m^2)} + \right. \\ &\quad \left. + \left( \frac{1}{2} \frac{\sin 2\beta}{1 + \cos^2 \beta} - \operatorname{tg} \beta - 2 \operatorname{ctg} \beta \right) \Delta \beta \right], \\ \Delta n_y &= n_y \left[ \frac{m_y \Delta m_y + m_x \Delta m_x \cos^2 \beta - m(1 + \cos^2 \beta) \Delta m - \frac{1}{2} (m_x^2 - m^2) \sin 2\beta \Delta \beta}{m_y^2 - m^2 + \cos^2 \beta (m_x^2 - m^2)} + \right. \\ &\quad \left. + \left( \frac{1}{2} \frac{\sin 2\beta}{1 + \cos^2 \beta} - \operatorname{tg} \beta - 2 \operatorname{ctg} \beta \right) \Delta \beta \right], \\ \Delta n_{xy} &= \frac{\cos^2 \beta}{n_{xy} \sin^4 \beta} \left\{ (2m \Delta m - m_x \Delta m_x - m_y \Delta m_y) + \right.\end{aligned}\quad (13)$$

$$\begin{aligned}& (1 + \cos^4 \beta) [(m_x^2 - m^2)(m_y \Delta m_y - m \Delta m) + (m_y^2 - m^2)(m_x \Delta m_x - m \Delta m)] + \\ & + \frac{2 \cos^2 \beta [(m_x^2 - m^2)(m_x \Delta m_x - m \Delta m) + (m_y^2 - m^2)(m_y \Delta m_y - m \Delta m)]}{(1 + \cos^2 \beta) \{ (m_x^2 - m^2)(m_y^2 - m^2)(1 + \cos^4 \beta) + \cos^2 \beta [(m_x^2 - m^2)^2 + (m_y^2 - m^2)^2] \}^{\frac{1}{2}}} + \\ & + \frac{m \Delta m}{n_{xy}} + \frac{\Delta \beta \sin 2\beta}{2 n_{xy}} \left\{ [(m_x^2 + m_y^2 - 2m^2)(1 + \cos^2 \beta) - 2 \{ (m_x^2 - m^2)(m_y^2 - m^2)(1 + \cos^4 \beta) + \right. \\ & + \left. \cos^2 \beta [(m_x^2 - m^2)^2 + (m_y^2 - m^2)^2] \} \frac{1 + \cos^2 \beta + 2 \cos^4 \beta}{\sin^6 \beta (1 + \cos^2 \beta)} \right\} + \frac{\cos^2 \beta (m_x^2 + m_y^2 - 2m^2)}{\sin^4 \beta (1 + \cos^2 \beta)} - \\ & - \frac{\cos^2 \beta [2(m_x^2 - m^2)(m_y^2 - m^2) \cos^2 \beta + (m_x^2 - m^2) + (m_y^2 - m^2)^2]}{\sin^4 \beta (1 + \cos^2 \beta) \{ (m_x^2 - m^2)(m_y^2 - m^2)(1 + \cos^4 \beta) + \cos^2 \beta [(m_x^2 - m^2)^2 + (m_y^2 - m^2)^2] \}^{\frac{1}{2}}}\end{aligned}$$

Przykładowo policzono  $\Delta n_x$ ,  $\Delta n_y$  dla punktu o współrzędnych  $x_1 = 0$ ,  $y = 0,01$  [m];  $\Delta n_x = 14\%$   $n_x$ ,  $\Delta n_y = 7\%$   $n_y$  oraz  $\Delta n_{xy}$  dla punktu o współrzędnych  $x_1 = 0,01$  [m],  $y = 0,01$  [m]:  $\Delta n_{xy} = 2\%$   $n_{xy}$  na podstawie danych uzyskanych przez pomiar rzędów izochromy z dokładnością  $\Delta m = \Delta m_x = \Delta m_y = 0,01$  [rząd] ustawiając model do skośnego prześwietlania z dokładnością  $\Delta \beta = 1$  [°].

Wyrażenia ze wzorów (13):

$$\begin{aligned}
 & \dots m_x \Delta m_x + m_y \Delta m_y \cos^2 \beta - m(1 + \cos^2 \beta) \Delta m \dots, \\
 & \dots m_y \Delta m_y + m_x \Delta m_x \cos^2 \beta - m(1 + \cos^2 \beta) \Delta m \dots, \\
 & \dots 2m \Delta m - m_x \Delta m_x - m \Delta m_y \dots, \\
 & \dots m_y \Delta m_y - m \Delta m \dots, \\
 & \dots m_x \Delta m_x - m \Delta m \dots,
 \end{aligned} \tag{14}$$

są o rząd wielkości mniejsze od pozostałych. Wobec tego policzony błąd zależy głównie od dokładności ustawienia modelu do skośnego prześwietlania.

### Dodatek I

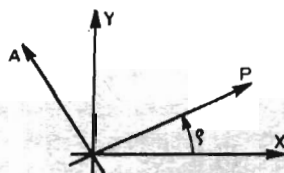
Falę świetlną wychodzącą ze źródła światła przedstawimy w postaci:

$$E = \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \end{bmatrix}, \tag{11}$$

gdzie:

$E_x, E_y$  — składowe wektora natężenia pola elektrycznego drgające wzdłuż osi  $X$  i  $Y$  (oś  $Z$  pokrywa się z kierunkiem rozchodzenia się fali świetlnej).

Polaryzator (analizator) którego geometrię wyznacza kąt  $\varrho$  (rys. 11) zmienia na wyjściu składowe wektora (11):



Rys. 11.

$$\begin{aligned}
 E'_x &= (E_x \cos \varrho + E_y \sin \varrho) \cos \varrho, \\
 E'_y &= (E_x \cos \varrho + E_y \sin \varrho) \sin \varrho.
 \end{aligned} \tag{21}$$

Macierz oddziaływania polaryzatora (analizatora) na falę świetlną ma postać:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \cos^2 \varrho & \sin \varrho \cos \varrho \\ \sin \varrho \cos \varrho & \sin^2 \varrho \end{bmatrix}, \tag{31}$$

$$\varrho = 0 \Rightarrow \mathbf{M}_p = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \varrho = 90^\circ \Rightarrow \mathbf{M}_a = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \tag{41}$$

gdzie:

$\mathbf{M}_p$  — macierz polaryzatora,  $\mathbf{M}_a$  — macierz analizatora.

Oddziaływanie modelu wykazującego dwójłomność wymuszoną przedstawimy jako superpozycję: obrotu płaszczyzny polaryzacji o kąt  $\gamma$  na wejściu do modelu względnego

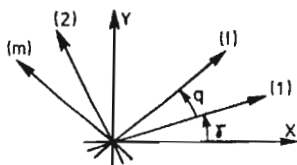
opóźnienia wektorów drgających wzdłuż kierunków naprężeń głównych, obrotu płaszczyzny polaryzacji o kąt  $(-\gamma)$  na wyjściu z modelu.

Na rys. 2I osie (1) i (2) to kierunki naprężeń optycznie czynnych. Zmianę składowych wektora  $E$  w wyniku obrotu płaszczyzny polaryzacji o kąt  $\gamma$  przedstawiają równania:

$$\begin{aligned} E_1 &= E_x \cos \gamma + E_y \sin \gamma, \\ E_2 &= -E_x \sin \gamma + E_y \cos \gamma, \end{aligned} \quad (5I)$$

gdzie:

$\gamma$  — parametr izokliny.



Rys. 2I.

Macierz opisująca skręcanie płaszczyzny polaryzacji o kąt  $\gamma$  ma postać:

$$\mathbf{R}(\gamma) = \begin{bmatrix} \cos \gamma & \sin \gamma \\ -\sin \gamma & \cos \gamma \end{bmatrix}. \quad (6I)$$

Macierz względnego opóźnienia wyprowadzamy w oparciu o składowe  $E_1$ ,  $E_2$ , (5I). Oznaczmy przez  $q$  kąt jaki tworzy „oś szybka” modelu z kierunkiem (1) (rys. 2I). Składowe wektora na wejściu zapiszemy:

$$\begin{aligned} E_l &= E_1 \cos q + E_2 \sin q, \\ E_m &= -E_1 \sin q + E_2 \cos q. \end{aligned} \quad (7I)$$

Składowe (7I) doznają względnego opóźnienia  $\psi$  na drodze geometrycznej światła przechodzącego przez model:

$$\begin{aligned} E'_l &= E_l e^{i \frac{\psi}{2}}, \\ E'_m &= E_m e^{-i \frac{\psi}{2}}. \end{aligned} \quad (8I)$$

Światło na wyjściu z modelu opiszemy równaniami:

$$\begin{aligned} E'_1 &= E'_l \cos q - E'_m \sin q, \\ E'_2 &= E'_l \sin q + E'_m \cos q. \end{aligned} \quad (9I)$$

Łącząc (7I), (8I), (9I) zapiszemy:

$$\begin{aligned} E'_1 &= E_1 \left( e^{i \frac{\psi}{2}} \cos^2 q + e^{-i \frac{\psi}{2}} \sin^2 q \right) + E_2 \sin q \cos q \left( e^{i \frac{\psi}{2}} - e^{-i \frac{\psi}{2}} \right), \\ E'_2 &= E_1 \sin q \cos q \left( e^{i \frac{\psi}{2}} - e^{-i \frac{\psi}{2}} \right) + E_2 \left( e^{i \frac{\psi}{2}} \sin^2 q + e^{-i \frac{\psi}{2}} \cos^2 q \right). \end{aligned} \quad (10I)$$

Stąd otrzymujemy macierz:

$$\mathbf{T}_0 = \begin{bmatrix} e^{i \frac{\psi}{2}} \cos^2 q + e^{-i \frac{\psi}{2}} \sin^2 q & \sin q \cos q \left( e^{i \frac{\psi}{2}} - e^{-i \frac{\psi}{2}} \right) \\ \sin q \cos q \left( e^{i \frac{\psi}{2}} - e^{-i \frac{\psi}{2}} \right) & e^{i \frac{\psi}{2}} \sin^2 q + e^{-i \frac{\psi}{2}} \cos^2 q \end{bmatrix}. \quad (11I)$$

Istnienie względnego opóźnienia nie wpływa na kierunek drgań wektorów  $E_1$  i  $E_2$ . Wobec warunku  $q = 0$  macierz (11I) uprości się do postaci:

$$\mathbf{T}(\psi) = \begin{bmatrix} e^{i\frac{\psi}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{\psi}{2}} \end{bmatrix}. \quad (12I)$$

Współczynnik  $\psi$  oznacza różnicę faz składowych drgających w kierunkach naprężeń optycznie czynnych.

„Powrót” wektorów  $E_1$  i  $E_2$  do układu  $XY$  opisuje macierz skręcenia płaszczyzny polaryzacji o kąt  $(-\gamma)$ :

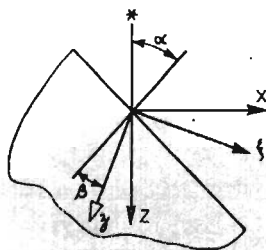
$$\mathbf{R}(-\gamma) = \begin{bmatrix} \cos\gamma & -\sin\gamma \\ \sin\gamma & \cos\gamma \end{bmatrix}. \quad (13I)$$

Łącząc macierze (6I), (12I) i (13I) otrzymujemy iloczyn macierzy opisujący oddziaływanie modelu elastoptycznego umieszczonego między skrzyżowanym polaryzatorem i analizatorem na falę świetlną:

$$\mathbf{R}(\gamma)\mathbf{T}(\psi)\mathbf{R}(-\gamma) = \begin{bmatrix} \cos\gamma & \sin\gamma \\ -\sin\gamma & \cos\gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{i\frac{\psi}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{\psi}{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\gamma & -\sin\gamma \\ \sin\gamma & \cos\gamma \end{bmatrix}. \quad (14I)$$

Macierz efektów polaryzacyjnych zachodzących przy załamaniu światła wyprowadzimy z pewnym przybliżeniem w oparciu o współczynniki załamania Fresnela.

Płaszczyzną padania będzie płaszczyzna, w której następuje obrót modelu do skośnego prześwietlenia (rys. 3I).



Rys. 3I.  $\alpha$  — kąt padania,  $\beta = \arcsin\left(\frac{n_1}{n_2} \sin\alpha\right)$  — kąt załamania,  $n_1$  — wsp. załamania powietrza,  $n_2$  — wsp. załamania materiału modelu.

Na podstawie wzorów Fresnela zapiszemy:

$$\begin{aligned} E_{\xi} &= E_X t_{11}, \\ E_{\eta} &= E_Y t_{1\perp}. \end{aligned} \quad (15I)$$

Macierz operacji ma postać:

$$\mathbf{P}_0 = \begin{bmatrix} t_{11} & 0 \\ 0 & t_{1\perp} \end{bmatrix}, \quad (17I)$$

gdzie:

$$t_{\parallel} = \frac{2 \cos \alpha \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta)} \text{ — współczynnik Fresnela składowej równoległej do płaszczyzny padania,}$$

$$t_{\perp} = \frac{2 \cos \alpha \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)} \text{ — współczynnik Fresnela składowej prostopadłej do płaszczyzny padania.}$$

Mając na uwadze pomiar względnej wartości natężenia światła, po podstawieniu wzorów na współczynniki  $t_{\parallel}$  i  $t_{\perp}$  zapiszemy:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha - \beta) \end{bmatrix}. \quad (18I)$$

#### Literatura

1. I. R. WOJNAR, *Uogólnione macierze Jonesa i ich zastosowanie w elastooptyce*, Referaty VII Sympozjum Doświadczalnych Badań w Mechanice Ciała Stałego, Warszawa 28-29 wrzesień 1976.
2. И. М. М. ГОРШКОВ, *Эллипсометрия*, Сов. радио, Москва 1974

#### Dodatek II

W układach  $xyz$ ,  $\xi_X \eta_X \zeta_X$ ,  $\xi_Y \eta_Y \zeta_Y$  liczymy różnicę ekstremalnych naprężeń normalnych w płaszczyznach prostopadłych do kierunków  $z$ ,  $\zeta_X$ ,  $\zeta_Y$ . Niech układem wyjściowym będzie układ  $\xi\eta\zeta$ . Dokonajmy transformacji naprężeń z układu wyjściowego do układu  $\xi_1 \eta_1 \zeta_1$ :

$$\sigma_{ij} = a_{ik} a_{jl} \sigma_{kl}, \quad (19I)$$

$\sigma_{ij}$  — naprężenia układu  $\xi_1 \eta_1 \zeta_1$ ,

$\sigma_{kl}$  — naprężenia układu  $\xi\eta\zeta$ ,

$a_{ik}$ ,  $a_{jl}$  — współczynniki transformacji (2II),

	$\xi$	$\eta$	$\zeta$
$\xi_1$	$\cos \chi_1$	$\sin \chi_1$	0
$\eta_1$	$-\sin \chi_1$	$\cos \chi_1$	0
$\zeta_1$	0	0	1

(20I)

Podstawiając (2II) do (19I):

$$\sigma_{\xi_1} = \sigma_{\xi} \cos^2 \chi_1 + \sigma_{\eta} \sin^2 \chi_1 + \tau_{\xi\eta} \sin 2\chi_1, \quad (21I)$$

$$\sigma_{\eta_1} = \sigma_{\xi} \sin^2 \chi_1 + \sigma_{\eta} \cos^2 \chi_1 - \tau_{\xi\eta} \sin 2\chi_1,$$

oraz stosując warunki na ekstremum funkcji  $\frac{\partial \sigma_{\xi_1}}{\partial \chi_1} = 0$ ,  $\frac{\partial \sigma_{\eta_1}}{\partial \chi_1} = 0$  otrzymujemy zależność:

$$-\frac{\sigma_{\xi} - \sigma_{\eta}}{2} \sin 2\chi_1 - \tau_{\xi\eta} \cos 2\chi_1 = 0, \quad (22I)$$

pozwalającą obliczyć kąt  $\chi_1 = \chi$ :

$$\operatorname{tg} \chi = \frac{2\tau_{\xi\eta}}{\sigma_{\xi} - \sigma_{\eta}},$$

dla którego naprężenia normalne (3II) osiągają wartości ekstremalne. Po wyrugowaniu kąta  $\chi$ :

$$\sigma_1^{\xi} = \frac{1}{2} (\sigma_{\xi} + \sigma_{\eta}) + \frac{1}{2} [(\sigma_{\xi} - \sigma_{\eta})^2 + 4\tau_{\xi\eta}^2]^{\frac{1}{2}}, \tag{6II}$$

$$\sigma_2^{\xi} = \frac{1}{2} (\sigma_{\xi} + \sigma_{\eta}) - \frac{1}{2} [(\sigma_{\xi} - \sigma_{\eta})^2 + 4\tau_{\xi\eta}^2]^{\frac{1}{2}},$$

różnicę ekstremalnych naprężeń normalnych zapiszemy:

$$\sigma_1^{\xi} - \sigma_2^{\xi} = [(\sigma_{\xi} - \sigma_{\eta})^2 + 4\tau_{\xi\eta}^2]^{\frac{1}{2}}. \tag{7II}$$

Przystosowując wzór (7II) do układu  $xyz$ ,  $\xi_x \eta_x \zeta_x$ ,  $\xi_y \eta_y \zeta_y$  otrzymamy:

$$\sigma_1^x - \sigma_2^x = [(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2]^{\frac{1}{2}}, \tag{8II}$$

$$\sigma_1^{\xi_x} - \sigma_2^{\xi_x} = [(\sigma_{\xi_x} - \sigma_{\eta_x})^2 + 4\tau_{\xi_x \eta_x}^2]^{\frac{1}{2}},$$

$$\sigma_1^{\xi_y} - \sigma_2^{\xi_y} = [(\sigma_{\xi_y} - \sigma_{\eta_y})^2 + 4\tau_{\xi_y \eta_y}^2]^{\frac{1}{2}}.$$

Posługując się wzorem (III) oraz współczynnikami transformacji:

	x	y	z		x	y	z	
$\xi_x$	1	0	0	,	$\xi_y$	$\cos \beta_y$	0	$\sin \beta_y$
$\eta_x$	0	$\cos \beta_x$	$\sin \beta_x$		$\eta_y$	0	1	0
$\zeta_x$	0	$-\sin \beta_x$	$\cos \beta_x$		$\zeta_y$	$-\sin \beta_y$	0	$\cos \beta_y$

wyrazimy naprężenia układów  $\xi_x \eta_x \zeta_x$  i  $\xi_y \eta_y \zeta_y$  poprzez naprężenia układu  $xyz$ :

$$\begin{aligned} \sigma_{\xi_x} &= \sigma_x, & \sigma_{\xi_y} &= \sigma_x \cos^2 \beta_y, \\ \tau_{\xi_x \eta_x} &= \tau_{xy} \cos \beta_x, & \tau_{\xi_y \eta_y} &= \tau_{xy} \cos \beta_y, \\ \sigma_{\eta_x} &= \sigma_y \cos^2 \beta_x, & \sigma_{\eta_y} &= \sigma_y. \end{aligned} \tag{10II}$$

Wzory (10II) podstawione do (8II) dają zależności:

$$\begin{aligned} \sigma_1^x - \sigma_2^x &= [(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2]^{\frac{1}{2}}, \\ \sigma_1^{\xi_x} - \sigma_2^{\xi_x} &= [(\sigma_x - \sigma_y \cos^2 \beta_x)^2 + 4\tau_{xy}^2 \cos^2 \beta_x]^{\frac{1}{2}}, \\ \sigma_1^{\xi_y} - \sigma_2^{\xi_y} &= [(\sigma_x \cos^2 \beta_y - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2 \cos^2 \beta_y]^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \tag{11II}$$

Literatura

1. H. J. WALCZAK, *Wytrzymałość materiałów oraz podstawy teorii sprężystości i plastyczności*, Warszawa 1973 PWN.

## Dodatek III

Fale pola elektrycznego drgające wzdłuż kierunków naprężeń optycznie czynnych:

$$\begin{aligned} u &= a \cos \omega t, \\ v &= b \cos(\omega t + \psi), \end{aligned} \quad (1\text{III})$$

gdzie:

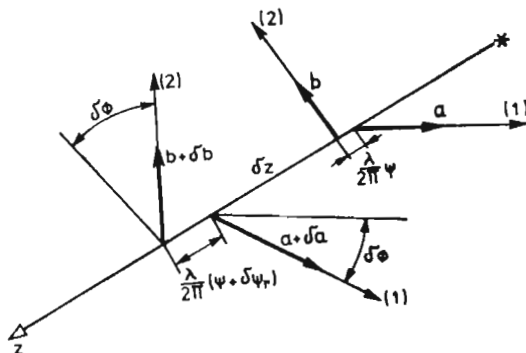
$\omega$  — prędkość kątowna,  
 $a, b$  — amplitudy,  
 $t$  — czas,

doznają względnego opóźnienia na elementarnej drodze geometrycznej światła w modelu  $\delta_z$  o wartość  $\delta\psi_r$ :

$$\begin{aligned} u &= a \cos nt, \\ v &= b \cos(nt + \psi + \delta\psi_r). \end{aligned} \quad (2\text{III})$$

Jeżeli dodatkowo następuje obrót kierunków naprężeń optycznie czynnych o wartość  $\delta\Phi$  (rys. 1III), ( $\lambda$  — długość fali światła użyta do badań), to w ogólności następuje zmiana amplitudy i fazy fal składowych o wartości  $\delta a, \delta b, \delta\psi_1, \delta\psi_2$ :

$$\begin{aligned} u &= (a + \delta a) \cos(nt + \delta\psi_1), \\ v &= (b + \delta b) \cos(nt + \psi + \delta\psi_2). \end{aligned} \quad (3\text{III})$$



Rys. 1III.

Wartości  $\delta a, \delta b$  oraz przyrost różnicy faz  $\delta\psi = \delta\psi_2 - \delta\psi_1$  liczymy łącząc (2III) i (3III). Ostatecznie w granicy poszukiwanych wyrażeń otrzymujemy (1III):

$$\begin{aligned} da &= b \cos \psi d\Phi, \\ db &= -a \cos \psi d\Phi, \\ d\psi &= d\psi_r + \left( \frac{a}{b} - \frac{b}{a} \right) \sin \psi d\Phi. \end{aligned} \quad (4\text{III})$$

Wykorzystując prawo Maxwella:

$$\begin{aligned} \kappa_1 &= \kappa_0 + C_1 \sigma_1 + C_2(\sigma_2 + \sigma_3), \\ \kappa_2 &= \kappa_0 + C_1 \sigma_2 + C_2(\sigma_1 + \sigma_3), \\ \kappa_3 &= \kappa_0 + C_1 \sigma_3 + C_2(\sigma_1 + \sigma_2), \end{aligned} \quad (5\text{III})$$



gdzie:

$\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3$  — współczynniki przenikalności dielektrycznej wzdłuż kierunków naprężeń optycznie czynnych,

$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  — naprężenia optycznie czynne,

$\kappa_0$  — współczynnik przenikalności dielektrycznej w ciele wolnym od naprężeń,

$C_1, C_2$  — stałe optyczne,

policzymy wartość  $\delta\psi_r$  ze wzoru:

$$\delta\psi_r = \frac{2\pi}{\lambda} (\sqrt{\kappa_1} - \sqrt{\kappa_2}) dz. \quad (6. III)$$

Łącząc trzecie równanie zależności (4III) oraz (5III) i (6III) otrzymujemy:

$$(\sigma_1 - \sigma_2) dz = \frac{\lambda}{2\pi C_\sigma} \left[ d\psi - \left( \frac{a}{b} - \frac{b}{a} \right) \sin \psi d\Phi \right], \quad (7. III)$$

gdzie:

$$C_\sigma = \frac{C_1 - C_2}{2\sqrt{\kappa_0}}.$$

#### Literatura

1. III. H. T. JESSOP, *The scattered light method of exploration of stresses in two and three — dimensional models*, Vol. 2, September 1951, British Journal of Applied Physics.

#### Literatura

1. J. STUPNICKI, *Optymalne metody badań w mechanice*, Mechanika Techniczna, Tom X, PWN Warszawa 1984.
2. J. KOMOROWSKI, J. STUPNICKI, *Źródła błędów w odczycie rzędu izochromy przy skośnym prześwietlaniu powierzchniowej warstwy optycznie czynnej*, Referaty VIII Sympozjum Doświadczalnych Badań w Mechanice Ciała Stałego, Warszawa 4-6 września 1978.
3. А. АЛЕКСАНДРОВ, М. АХМЕТЕЯНОВ, *Поляризационно-оптические методы механики деформируемого тела*, Изд. „Наука”, Москва 1973.
4. W. SZCZEPIŃSKI, *A photoelastic method for determining stresser by means of the isochromes only*, Arch. Mech. Stos. 1961, 5, 13, 578.
5. S. MAZURKIEWICZ, L. KUC, M. SIKOŃ, *Rozpraszanie światła przy skośnym prześwietlaniu w zastosowaniu do analizy naprężeń w szkle hartowanym*, Mechanika Teoretyczna i Stosowana 3, 17, 1979.
6. W. KARMOWSKI, S. MAZURKIEWICZ, *Wyznaczanie płaskiego pola naprężenia z obrazu izożyn uzyskiwanych metodą światła rozproszonego*, Mechanika Teoretyczna i Stosowana 1/2, 20, 1982.
7. D. C. DRUCKER, *Photoelastic Separation of Principal Stresser by Oblique Incidence*, Journal of Applied Mechanics, September.
8. J. T. PINDER, *Model Analysis of engineering structures (Manuscript 1973)*, Text for course Viv. E. 534, Fall 1973 and Fall 1974.
9. *Encyklopedia Fizyki*, PWN.

## Резюме

## МЕТОД НАКЛОННОГО ПРОСВЕЧИВАНИЯ В АНАЛИЗЕ ПЛОСКОГО НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ НА ОСНОВАНИИ ПОЛЕЙ ИЗОХРОМ

В работе предлагается фотоупругий метод решения плоского состояния напряжений на основании полей изохром полученных просвечиванием модели по трем направлениям. Теоретический анализ закончивается приведением эффективных формул по расчетам напряжений. Для проверки теоретических рассуждений приведен эксперимент на диске нагруженном двумя сосредоточенными силами вдоль вертикального диаметра. Результаты эксперимента подтвердили теоретический анализ.

Указывается на возможность развития метода.

## Summary

## OBLIQUE INCIDENCE METHOD IN THE ANALYSIS OF PLANE STRESS STATE ON THE BASIS OF ISOCHROMATIC PATTERNS

A photoelastic method to solve the plane stress problem on the basis of isochromatic patterns obtained by means of observation of the model in 3 different directions is suggested. The theoretical analysis was performed and the effective formulas for calculating stresses were obtained. To confirm the theoretical analysis an experiment on a circular disk loaded with 2 concentrated forces along the diameter was conducted. The results of the experiment confirmed theoretical calculations. Possibilities of the development of this method are shown.

*Praca wpłynęła do Redakcji dnia 25 czerwca 1987 roku*