

WPLYW PULSACJI CIŚNIENIA NA WŁASNOŚCI PRZEPLYWÓW W PEŁNI ROZWIĘTYCH

ARTUR S. BARTOSIK

Politechnika Świętokrzyska. Kielce

W pracy przedstawiono model matematyczny przepływów w pełni rozwiniętych, w których gradient ciśnienia w kierunku przepływu opisany jest okresową funkcją czasu. Przedstawiono sposób numerycznego rozwiązania układu równań różniczkowych wraz z określeniem warunków brzegowych i początkowych. Wyniki obliczeń numerycznych sprecyzowano w postaci wniosków i porównano z dostępnymi rezultatami badań eksperymentalnych.

Oznaczenia

- A_i — Współczynnik ogólnego równania różnicowego dla $i = N, P, S$, Ns/m^4 ,
 A_M — wartość średnia gradientu ciśnienia, N/m^3 ,
 A_U — bezwymiarowa amplituda prędkości,
 A_P — amplituda gradientu ciśnienia, N/m^3 ,
 C_i — stała modelu turbulencji, $i = 1, 2, \mu$.
 E — stała równania wyrażającego logarytmiczny profil prędkości,
 I — intensywność turbulencji,
 k — kinetyczna energia turbulencji, m^2/s^2 ,
 K_R — bezwymiarowa częstość pulsacji gradientu ciśnienia,
 L — skala turbulencji, m ,
 N — liczba pomiarów wielkości Φ ,
 P — ciśnienie statyczne, N/m^2 ,
 r — współrzędna układu cylindrycznego, m ,
 R — promień rury, m ,
 R^+ — bezwymiarowa odległość od ściany,
 Re — liczba Reynoldsa,
 S_Φ — człon źródłowy ogólnego równania transportu wielkości Φ ,
 t — czas, s ,
 T — okres pulsacji gradientu ciśnienia, s ,
 U — składowa wektora prędkości w kierunku x , m/s ,
 U^+ — prędkość bezwymiarowa,
 u', v' — składowe fluktuacyjne wektora prędkości w kierunku x i r , m/s ,

- V_i — wektor prędkości, m/s,
 V_P — objętość komórki elementarnej zawierającej punkt P , m^3 ,
 X_i — współrzędna układu kartezjańskiego, m,
 Γ_Φ — współczynnik transportu dyfuzyjnego dla zmiennej ogólnej Φ , Ns/m^2 ,
 δ_U — opóźnienie fazowe prędkości względem gradientu ciśnienia, deg,
 δ_τ — opóźnienie fazowe naprężenia stycznego na ścianie względem gradientu ciśnienia, deg,
 Δ — różnica,
 ε — prędkość dysypacji kinetycznej energii turbulencji, m^2/s^3 ,
 Θ — kąt fazowy, rad,
 μ — współczynnik lepkości dynamicznej, Ns/m^2 ,
 ν — współczynnik lepkości kinematycznej, m^2/s ,
 ρ — gęstość, kg/m^3 ,
 $\sigma_k, \sigma_\varepsilon$ — stałe modelu turbulencji,
 τ — naprężenie styczne, N/m^2 ,
 φ — składowa fluktuacyjna zmiennej Φ , $\varphi = u', v', p', \rho'$,
 Φ — ogólne znaczenie zmiennej zależnej, $\Phi = V_i, P, \rho$,
 χ — stała Kármána,
 ω — częstość pulsacji gradientu ciśnienia, rad/s.

Indeksy

- D — w pełni rozwinięty przepływ ustalony,
 i — 1, 2, 3,
 kr — wartość krytyczna,
 max — wartość maksymalna w okresie pulsacji T ,
 M — wartość uśredniona po okresie pulsacji T ,
 N, P, S — punkty siatki różnicowej,
 o — w osi symetrii,
 P — składnik pulsacyjny,
 t — turbulentny,
 w — ściana,
 $\bar{\quad}$ — wielkość uśredniona grupowo,
 $\hat{\quad}$ — wartość średnia w przekroju poprzecznym rury,
 $'$ — składowa fluktuacyjna.

1. Wstęp

Turbulentne przepływy quasi — ustalone były i są przedmiotem wielu badań, zarówno eksperymentalnych, jak i teoretycznych. Dostępność rezultatów badań eksperymentalnych z zakresu przepływów quasi — ustalonych, stanowi zachętę do budowania bardziej adekwatnych modeli turbulencji. Wyniki obliczeń numerycznych zapewniają na ogół satysfak-

cjonującą dokładność w szerokim zakresie zastosowań. Znacznie gorzej przedstawia się to dla przepływów, w których wielkości uśrednione grupowo posiadają charakter niestacjonarny. Główną przyczyną hamująca rozwój modeli turbulencji tkwi w tym, że istnieje znikoma ilość wyników badań eksperymentalnych, zwłaszcza gdy chodzi o pomiary w warstwie przyściennej. Szczególnego rodzaju trudności pomiarowe, występują również w sytuacjach, gdy w pewnym przedziale czasu pojawia się zmiana kierunku przepływu. Przeprowadzenie badań dla takich przepływów wymaga starannego zaplanowania eksperymentu oraz użycia specjalistycznej aparatury pomiarowej.

Przepływy turbulентne, w których parametry uśrednione w czasie wykazują przebieg niestacjonarny o charakterze okresowym, mają duże znaczenie praktyczne ze względu na ich powszechne występowanie w przyrodzie oraz w maszynach i urządzeniach technicznych. Przykładami mogą być przepływy w kanałach dołotowych i wylotowych silników spalinowych, przepływy w pewnych typach wymienników ciepła, zjawisko falowania w kotłach energetycznych, jak również system krążenia krwi w organizmach żywych. Zjawiska te są na tyle złożone, że często wymagają uwzględnienia szeregu czynników jak np. lepkość, ściśliwość płynu, przewodność cieplna, trójwymiarowy charakter zjawiska, drgania, rozszerzalność naczyń przepływowych, itp. Rozwiązanie zagadnienia spełniającego wymienione warunki, za pomocą równań mechaniki płynów, jest zadaniem złożonym i posiadającym przeszkody przede wszystkim natury technicznej. Zastosowanie teorii turbulencji wraz z numerycznym rozwiązaniem układu równań, wymaga długiego czasu obliczeń. Przykładowo, uwzględnienie w modelu dodatkowego wymiaru, powoduje wydłużenie czasu obliczeń o ok. rząd wielkości. Z tego względu, poniżej przedstawiono model matematyczny, posiadający szereg ograniczeń, w wyniku których staje się możliwe efektywne jego wykorzystanie do obliczeń numerycznych na maszynie Odra-1305. Zbudowany model matematyczny opisuje w pełni rozwinięte przepływy laminarne i turbulентne, w których gradient ciśnienia opisany jest okresową funkcją czasu.

Za cel badań teoretycznych przepływu niestacjonarnego o charakterze okresowym, przyjęto:

1. Sprawdzenie przydatności wybranego modelu turbulencji do opisu przepływów niestacjonarnych o charakterze okresowym.
2. Określenie jakościowe i ilościowe wpływu pulsacji gradientu ciśnienia na własności hydrodynamiczne przepływów laminarnych i turbulентnych.

2. Przegląd literatury

Przeprowadzone dotychczas badania przepływów niestacjonarnych o charakterze okresowym (pulsacyjnych) w większości dotyczą przepływów laminarnych. Badaczami, którzy zapoczątkowali analizę teoretyczną przepływów pulsacyjnych byli Grace (1928) i Sexl (1930). Jednak rozważania ich dotyczyły ogólnych problemów i nie zawierały wyników obliczeń. W późniejszych latach prace w tym kierunku kontynuowało kilku innych badaczy, z których na uwagę zasługują prace Goldsteina i Rosenheada [1] oraz Schuha [2]. Schuh [2] przedstawił analityczną metodę określenia profilu prędkości i współczynnika tarcia powierzchniowego w warstwie granicznej formującej się przy opływie powierzchni

płaskiej. Niestacjonarny charakter przepływu laminarnego symulował przez założenie jednostajnie przyspieszonego ruchu. Do opisu wzrostu warstwy granicznej sformułował model matematyczny, zakładający istnienie zerowego gradientu ciśnienia. Dopiero Uchida (1956) był pierwszym badaczem, który na drodze teoretycznej rozwiązał równanie pędu dla w pełni rozwiniętego przepływu laminarnego, w którym gradient ciśnienia zmieniał się okresowo w czasie. Uchida [3] przyjął, że gradient ciśnienia opisuje następująca funkcja:

$$-\frac{\partial P}{\partial x} = A_M + A_P \cos(\omega t).$$

Równanie zachowania pędu rozwiązał przy założeniu, że $A_P/A_M \leq 1$. Prędkość podzielił umownie na dwa składniki, z których pierwszy odpowiada średniej wartości gradientu ciśnienia (U_M), natomiast drugi składnikowi pulsacyjnemu (U_P). W analizie Uchidy występuje charakterystyczny parametr określony jako:

$$K_R = \sqrt{\frac{\omega}{\nu}} R, \quad (1)$$

który nazwał bezwymiarową częstością pulsacji, przedstawiający stosunek czasu dyfuzji do okresu pulsacji. Na podstawie obliczeń, wykazał znaczący wpływ parametru K_R na pulsacyjny składnik prędkości U_P . Z rozważań teoretycznych Uchidy wynikają następujące wnioski:

1. Całkowita średnia masa przepływającego płynu w przepływie pulsacyjnym jest identyczna jak dla przepływu, w którym gradient ciśnienia posiada wartość stałą, równą wartości średniej w przepływie pulsacyjnym.
2. Dla $K_R \ll 1$, profil U_P w przekroju poprzecznym rury w dowolnej chwili czasu jest paraboliczny.
3. Dla $K_R \gg 1$, maksimum profilu U_P zlokalizowane jest w sąsiedztwie ściany, a nie w osi symetrii.
4. Istnieje opóźnienie fazowe prędkości względem gradientu ciśnienia, którego maksymalna wartość wynosi 90° . Opóźnienie to osiąga wartość maksymalną w osi symetrii.

W następnych latach badania teoretyczne laminarnego przepływu pulsacyjnego, kontynuowało wiele innych badaczy, w tym między innymi Hershey i Song [4], Harris, Peev i Wilkinson [5], Denison, Stevenson i Fox [6].

Wprowadzenie pulsacji w przepływie laminarnym, może przyczynić się do utraty stabilności przepływu. Spowodować to może przejście do przepływu laminarno-turbulentnego lub turbulentnego. Wśród dostępnych na ten temat wyników badań eksperymentalnych na uwagę zasługuje praca Turguta [7]. Pojawienie się turbulencji w laminarnym przepływie pulsacyjnym uzależnił od liczby Reynoldsa, bezwymiarowej częstości pulsacji i amplitudy prędkości. W oparciu o wyniki badań eksperymentalnych, sporządził wykres zależności krytycznej liczby Reynoldsa od parametrów: K_R i A_U . W rozpatrywanym zakresie parametrów, tj. $A_U = 0-1$ i $K_R = 0-10$, wartość krytycznej liczby Reynoldsa okazała się większa dla przepływu pulsacyjnego niż dla stacjonarnego przepływu Poiseuille'a. W przypadku skrajnym, tzn. przy dużej częstotliwości pulsacji i małej amplitudzie prędkości, wartość Re_{kr} niewiele różniła się od Re_{kr} dla przepływu bez pulsacji. Turgut również badał krytyczną liczbę Reynoldsa dla pulsacji nieharmonicznych. Z badań tych wynika, że jest ona mniejsza od wartości w przepływie z pulsacją harmoniczną.

Znacznie mniej danych literaturowych można znaleźć na temat turbulentnych przepływów pulsacyjnych. Pierwszym badaczem tych zjawisk był Schultz-Grunow (1940), który przeprowadził systematyczne badania przepływów w zakresie parametrów: $47000 < Re < 77000$, $\omega = 0-2,5$ i dla dużych wartości amplitudy gradientu ciśnienia. Schultz-Grunow [8] zaobserwował, że dla dużych amplitud pulsacji, w części cyklu pulsacji występuje zmiana kierunku przepływu. Ważnym stwierdzeniem było również to, że współczynnik strat tarcia uśredniony po okresie pulsacji jest większy od współczynnika strat tarcia w przepływie, w którym gradient ciśnienia posiada stałą wartość i równą wartości średniej w przepływie pulsacyjnym.

Innymi badaczami zjawisk turbulentnych przepływów pulsacyjnych byli między innymi: Gerrard [9], Baird i in. [10], Brown i in. [11], Lu [12] oraz Tu i Ramaprian [13], [14].

W prezentowanej pracy wykorzystano wyniki badań eksperymentalnych S. Lu [12], z których część przedstawiono i omówiono w dalszej części pracy.

Do chwili obecnej brak jest w literaturze opracowania, w którym dokonano oceny wpływu parametrów pulsacyjnych na własności hydrodynamiczne przepływu przy wykorzystaniu modelu turbulencji $k-\epsilon$ dla wysokich turbulentnych liczb Reynoldsa.

3. Sformułowanie problemu

Wyznaczenie ruchu płynu na drodze teoretycznej sprowadza się do rozwiązania układu równań różniczkowych mechaniki płynów z odpowiednimi warunkami brzegowymi i początkowymi. Równaniami tymi dla przepływu izotermicznego są równania Naviera-Stokesa oraz równanie ciągłości strugi. Trudności związane z rozwiązaniem tych równań stanowią jedną z przyczyn wprowadzenia reguł uśredniania ruchu turbulentnego względem czasu. Wśród wielu metod definiowania uśrednionych parametrów przepływu turbulentnego, charakteryzującego się okresową zmiennością w czasie, wygodnie jest zastosować uśrednianie grupowe [15], polegające na uśrednieniu dużej grupy punktów posiadających tę samą fazę. Uśrednianie konwencjonalne wymaga sprecyzowania warunku na czas, po którym będzie dokonywana operacja uśredniania, który to czas powinien być duży w porównaniu z okresem zmienności fluktuacji φ , a mały w porównaniu z zakresem zmienności funkcji uśrednionej $\bar{\Phi}$. W przepływach charakteryzujących się zmienną częstością pulsacji, stanowi to znaczną trudność. Zastosowanie uśredniania grupowego — równanie 3 — eliminuje tę trudność. Stosując uśrednianie grupowe, ogólną zmienną zależną Φ zależną od położenia, kąta fazowego i czasu, można zapisać w postaci sumy wartości średniej $\bar{\Phi}$ i składowej fluktuacyjnej φ' :

$$\Phi(X_i, \Theta, t) = \bar{\Phi}(X_i, \Theta) + \varphi'(X_i, \Theta, t), \quad (2)$$

której uśrednienie daje:

$$\bar{\varphi}' = 0.$$

Wartość ogólnej zmiennej zależnej Φ uśrednionej grupowo, definiuje się jako:

$$\bar{\Phi}(X_i, \Theta) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \Phi(X_i, \Theta, t+nT). \quad (3)$$

Zastosowanie reguł uśredniania, pozwala otrzymać równanie ciągłości oraz równania zachowania pędu dla uśrednionego ruchu turbulentnego w postaci:

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial X_i} (\bar{\rho} V_i) = 0, \quad (4)$$

$$\frac{\partial (\bar{\rho} \bar{V}_i)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial X_j} (\bar{\rho} \bar{V}_i \bar{V}_j) = \frac{\partial}{\partial X_j} \left(\mu \frac{\partial \bar{V}_i}{\partial X_j} - \bar{\rho} \overline{v'_i v'_j} \right) - \frac{\partial \bar{P}}{\partial X_i}. \quad (5)$$

Równanie uśrednionego ruchu turbulentnego (5), w porównaniu z równaniami Naviera-Stokesa, posiada dodatkowe człony wyrażające naprężenia turbulentne. Układ równań (4)–(5) nie jest układem zamkniętym, gdyż istnieje brak ośmiu równań uzupełniających, w tym sześciu równań określających składowe tensora naprężeń turbulentnych.

Do rozważań przyjęto izotermiczny przepływ laminarny i turbulentny newtonowskiego płynu. Zbudowany model matematyczny posiada następujące założenia:

1. Ośrodkiem przepływu jest prostoliniowy przewód hydraulicznie gładki o stałym przekroju poprzecznym.
2. Przepływającym medium jest nieściśliwa ciecz.
3. Z uwagi na ośrodek, przepływ uważa się za osiowoosymetryczny i bez zawirowań obwodowych ($\bar{V} = \bar{W} = 0$).
4. Gradient ciśnienia w kierunku przepływu opisany jest harmoniczną funkcją czasu, nałożoną na stałą wartość gradientu ciśnienia,

$$-\frac{\partial \bar{P}}{\partial X} = A_M + A_P \sin(\omega t). \quad (6)$$

5. Do opisu matematycznego przyjęty jest cylindryczny układ współrzędnych zorientowany w ten sposób, że oś X pokrywa się z osią symetrii przewodu.

W wyniku przyjętych założeń z równania (4) wynika, że:

$$\frac{\partial \bar{U}}{\partial X} = 0, \quad (7)$$

co odpowiada warunkowi w pełni rozwiniętego przepływu. Natomiast równanie (5) zapisać można w następującej postaci:

$$\bar{\rho} \frac{\partial \bar{U}}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \left(\mu \frac{\partial \bar{U}}{\partial r} - \bar{\rho} \overline{u'v'} \right) \right] + A_M + A_P \sin(\omega t). \quad (8)$$

Korelację składowych fluktuacyjnych prędkości $-\bar{\rho} \overline{u'v'}$, aproksymowano przez analogię do hipotezy Boussinesque'a jako,

$$-\bar{\rho} \overline{u'v'} = \mu_t \frac{\partial \bar{U}}{\partial r}. \quad (9)$$

Zgodnie z zasadami uśredniania oraz zgodnie z przyjętymi założeniami, turbulentne naprężenie styczne definiuje się jako:

$$\begin{aligned} -\overline{u'v'}(r, \theta) &= -\overline{[U(r, \theta, t) - \bar{U}(r, \theta)][V(r, \theta, t) - \bar{V}(r, \theta)]} \\ &= -\overline{[U(r, \theta, t) - \bar{U}(r, \theta)]V(r, \theta, t)}. \end{aligned} \quad (10)$$

Rozwiązanie równania (8) wymaga określenia współczynnika lepkości turbulentnej. W modelu turbulencji $k-\varepsilon$, który wybrano do określenia μ_t przyjęto, że wielkość ta jest funkcją następujących zmiennych zależnych:

$$\mu_t = f(\bar{q}, k, \varepsilon). \quad (11)$$

Związek między tymi wielkościami określa się w oparciu o analizę wymiarową jako:

$$\mu_t = C_\mu \frac{\bar{q} k^2}{\varepsilon}. \quad (12)$$

4. Model turbulencji $k-\varepsilon$ w zastosowaniu do przepływów pulsacyjnych

W celu uzupełnienia równania (8) o równania umożliwiające określenie współczynnika lepkości turbulentnej, wybrano wersję modelu turbulencji $k-\varepsilon$ dla wysokich turbulentnych liczb Reynoldsa [16]. W badanym zakresie zmian parametrów przepływowych, model ten spośród trzech rozważanych modeli turbulencji, tj. $k-L$ oraz $k-\varepsilon$ dla niskich i wysokich turbulentnych liczb Reynoldsa, wykazuje satysfakcjonującą zgodność z wynikami badań eksperymentalnych. Należy jednak zaznaczyć, że różnica między wynikami dostarczonymi przez oba modele $k-\varepsilon$ nie była zasadnicza. Natomiast model $k-L$, dla dużych amplitud gradientu ciśnienia nie spełniał stawianych oczekiwań.

Turbulentna liczba Reynoldsa zdefiniowana jako,

$$\text{Re}_t = \frac{\bar{q} k^2}{\mu \varepsilon}, \quad (13)$$

określa stosunek lepkości turbulentnej do molekularnej.

Równania modelu turbulencji $k-\varepsilon$ uzyskuje się w wyniku odpowiednich przekształceń równań Naviera-Stokesa [17]. Uwzględniając założenia sformułowane w rozdziale 3, równania te przyjmują następującą postać:

— równanie kinetycznej energii turbulencji:

$$\bar{q} \frac{\partial k}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial r} \right] + \mu_t \left(\frac{\partial \bar{U}}{\partial r} \right)^2 - \bar{q} \varepsilon, \quad (14)$$

— równanie prędkości dysypacji kinetycznej energii turbulencji:

$$\bar{q} \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial r} \right] + C_1 \mu_t \frac{\varepsilon}{k} \left(\frac{\partial \bar{U}}{\partial r} \right)^2 - C_2 \bar{q} \frac{\varepsilon^2}{k}. \quad (15)$$

Równania (14) - (15) sformułowano dla przepływu w pełni turbulentnego, gdzie Re_t jest stosunkowo wysoka. Z tego względu równania te należy uzupełnić o związki pozwalające wyznaczyć parametry przepływu w pobliżu ściany.

W obliczeniach numerycznych zazwyczaj profil prędkości przyściennej dzieli się na dwa obszary, tj. dla $R^+ \leq 11,63$ oraz $R^+ > 11,63$, gdzie:

$$R^+ = \frac{R-r}{\nu} \sqrt{\frac{\tau_w}{\bar{q}}}. \quad (16)$$

Dla $R^+ \leq 11,63$ korzysta się z zależności $U^+ = R^+$, gdzie:

$$U^+ = \frac{\bar{U}_P}{\sqrt{\frac{\tau_w}{\bar{\rho}}}} \quad (17)$$

Naprężenie styczne wyznacza się z zależności:

$$\tau_w = \mu \frac{\bar{U}_P}{(R-r)_P} \quad (18)$$

gdzie P jest indeksem oznaczającym węzeł siatki różnicowej, zlokalizowany w sąsiedztwie ściany. Dla $R^+ > 11,63$ w pierwszym punkcie siatki różnicowej, uwzględnia się zależności wynikające z logarymicznego profilu prędkości. W ostatecznej postaci zależności te można zapisać jako:

$$\tau_w = \frac{\chi \bar{\rho} (C_\mu^{1/2} k_P)^{1/2}}{\ln(ER^+)} \bar{U}_P \quad (19)$$

$$k_P = \frac{\tau_w}{\bar{\rho} C_\mu^{1/2}} \quad (20)$$

$$\varepsilon_P = \frac{C_\mu^{3/4} k_P^{3/2}}{\chi (R-r)_P} \quad (21)$$

Układ równań różniczkowych typu parabolicznego, tj. (8), (14), (15), wraz ze związkami uzupełniającymi (9), (12) i (18) - (21), stanowi treść modelu matematycznego i wymaga określenia warunków brzegowych i początkowych. Dla przepływu laminarnego do rozwiązania pozostaje jedynie równanie (8), z pominięciem składowej naprężeń turbulentnych; $-\bar{\rho} \overline{u'v'}$.

Stałe modelu turbulencji: $\sigma_k = 1,0$; $\sigma_\varepsilon = 1,2174$; $C_1 = 1,44$; $C_2 = 1,92$; $C_\mu = 0,09$; $E = 9,14$. Stałe te zalecone zostały przez Laundera i Spaldinga [16] na podstawie weryfikacji modelu matematycznego z wynikami badań eksperymentalnych dla dwuwymiarowych przepływów quasi-ustalonych.

5. Warunki graniczne oraz sposób rozwiązania

Obliczenia numeryczne przeprowadzono dla przepływu laminarnego i turbulentnego wody w rurze. Promień rury podzielono na 40 punktów węzłowych, natomiast okres pulsacji na 120 przedziałów czasu. Gęstość i współczynnik dynamicznej lepkości zadano dla wody o temperaturze 300 K.

Do obliczeń przyjęto następujące warunki brzegowe:

— ściana rury ($r = R$): $\bar{U} = 0$; k i ε w pobliżu ściany z zależności (20) i (21),

— oś symetrii ($r = 0$): $\frac{\partial \bar{U}}{\partial r} = 0$, $\frac{\partial k}{\partial r} = 0$, $\frac{\partial \varepsilon}{\partial r} = 0$.

Warunki początkowe realizowane są w dwóch etapach:

1. Dla przepływu bez pulsacji, $A_P = 0$:

- profil prędkości:
 - a) dla przepływu laminarnego zadany jest z prawa Hagen'a i Poiseuille'a.
 - b) dla przepływu turbulentnego zadany jest z prawa potęgowego ($n = 1/7$), w którym maksymalna wartość prędkości została z góry oszacowana,
- profil kinetycznej energii turbulencji:

na podstawie zadanej intensywności turbulencji, przyjmując, że $k = I\bar{U}^2$,
- profil prędkości dysypacji kinetycznej energii turbulencji:

zadany jest w oparciu o obliczoną według Nikuradsego skalę turbulencji oraz w oparciu o wyznaczoną wcześniej kinetyczną energię turbulencji, korzystając ze związku:

$$\varepsilon = C_\mu^{3/4} k^{3/2} / L.$$

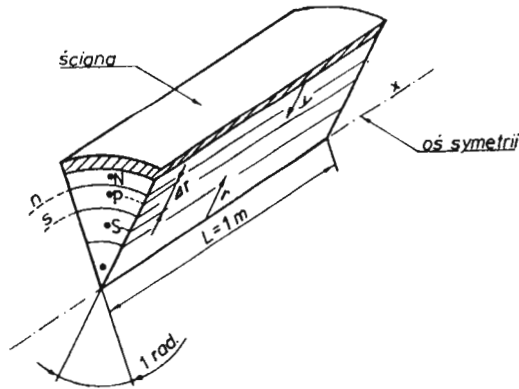
2. Dla przepływu pulsacyjnego:

Po zakończeniu obliczeń dla przepływu bez pulsacji, uzyskuje się profile U , k , ε oznaczone dalej indeksem D . Profile $U_D(r)$, $k_D(r)$, $\varepsilon_D(r)$ stanowią warunki początkowe do obliczeń przepływu pulsacyjnego.

Różniczkowe równania transportu dla U , k , ε mają podobną postać i mogą być przedstawione za pomocą ogólnej zmiennej zależnej Φ , jako:

$$\bar{\rho} \frac{\partial \Phi}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \Gamma_\Phi \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) + S_\Phi. \quad (22)$$

Dla zwiększenia efektywności obliczeń numerycznych wykorzystano nierównomierną siatkę różnicową (rys. 5.1) zagęszczoną w obszarze przyściennym.



Rys. 5.1. Siatka różnicowa

W oparciu o metodę objętości kontrolnej, uzyskano następujące ogólne równanie różnicowe transportu zmiennej zależnej Φ :

$$\begin{aligned} & \Phi_P^n \left[\frac{r_n}{V_P(r_N - r_P)} \frac{\Gamma_{\Phi_N}^n + \Gamma_{\Phi_P}^n}{2} + \frac{r_s}{V_P(r_P - r_S)} \frac{\Gamma_{\Phi_P}^n + \Gamma_{\Phi_S}^n}{2} + \frac{\bar{\rho}}{\Delta t} \right] = \\ & = \Phi_N^n \left[\frac{r_n}{V_P(r_N - r_P)} \frac{\Gamma_{\Phi_N}^n + \Gamma_{\Phi_P}^n}{2} \right] + \Phi_S^n \left[\frac{r_s}{V_P(r_P - r_S)} \frac{\Gamma_{\Phi_P}^n + \Gamma_{\Phi_S}^n}{2} \right] + \Phi_P^o \cdot \frac{\bar{\rho}}{\Delta t} + S_{\Phi_P}^n, \quad (23) \end{aligned}$$

gdzie indeksy górne n , o oznaczają nowy i stary poziom czasu.

Równanie (23) można zapisać w formie ogólnej jako,

$$A_P^n \Phi_P^n = \sum_{i=N,S} A_i^n \Phi_i^n + A_P^o \Phi_P^o + S_{\Phi_P}^n \quad (24)$$

Równanie (24) wyrażono schematem niejawnym, rozwiązywane jest dla każdej zmiennej zależnej U , k , ε z iteracjami na każdym poziomie czasowym do momentu uzyskania żądanej zbieżności, kontrolowanej za pomocą kryterium:

$$RES_P = \frac{\left| A_P \Phi_P^n - \sum_{i=N,S} A_i \Phi_i^n - A_P \Phi_P^o - S_{\Phi_P}^n \right|}{\hat{\rho} \bar{U} \Phi_P^o V_P} \leq 10^{-4} \quad (25)$$

Cykl obliczeniowy programu podzielony jest na trzy etapy:

1. Obliczenia dla stałej wartości gradientu ciśnienia: efektem końcowym obliczeń są profile $U_D(r)$, $k_D(r)$, $\varepsilon_D(r)$, $\mu_{tD}(r)$, $I_D(r)$.
2. Obliczenia dla przepływu pulsacyjnego, w którym gradient ciśnienia opisuje funkcja (6): obliczenia te realizowane są tak długo aż wystąpi powtarzalność rozwiązań w dwóch kolejnych okresach pulsacji. O powtarzalności rozwiązań decyduje kryterium:

$$\max_{r=0} \left| \frac{\Phi(r, \Theta) - \Phi(r, \Theta - T)}{\Phi(r, \Theta)} \right| \leq 10^{-3} \quad (26)$$

określające maksymalną różnicę $\Phi(r, \Theta)$, uzyskaną w odstępie czasu T . Powtarzalność rozwiązań uzyskuje się zazwyczaj po 3 - 20 okresach pulsacji, w zależności od zadanych wartości liczbowych parametrów A_M , A_P , ω i Re . Efektem obliczeń są profile $\bar{U}(r, \Theta)$, $k(r, \Theta)$, $\varepsilon(r, \Theta)$, $\mu_{tD}(r, \Theta)$ i $I(r, \Theta)$.

3. Po spełnieniu kryterium (26) prowadzone są obliczenia dla ostatniego okresu pulsacji. W tej fazie obliczeń przeprowadza się uśrednianie zmiennych zależnych po okresie T i porównuje się je z odpowiadającymi im wartościami Φ_D .

6. Wyniki obliczeń i weryfikacja modelu matematycznego

Wpływ pulsacji ciśnienia na własności hydrodynamiczne przepływu był przedmiotem częściowych opracowań zawartych w pracach [18], [19] i [20]. W opracowaniach tych wykorzystano model turbulencji $k-L$.

Jakościowy wpływ parametrów pulsacyjnych A_P , K_R na własności hydrodynamiczne, różni się dla przepływu laminarnego i turbulentnego. Z tego względu osobnego omówienia wymaga każdy z wymienionych przepływów.

6.1. W pełni rozwinięty pulsacyjny przepływ laminarny. Z przeprowadzonych badań wynika, że dla przepływu laminarnego, prędkość jest funkcją następujących parametrów:

$$U = f(r, \Theta, A_P, K_R) \quad (27)$$

Rozwiązanie analityczne Uchidy [3], potwierdzone w tej pracy przez wyniki obliczeń

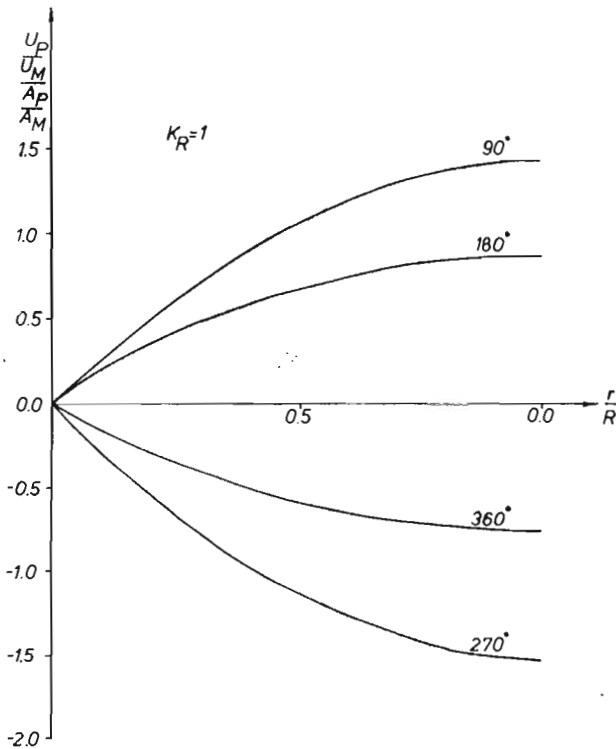
numerycznych, wskazuje na liniową zależność amplitudy prędkości A_U od A_P/A_M . Dlatego dzieląc bezwymiarową prędkość U_P/U_M , gdzie:

$$U_P = U - U_M, \quad (28)$$

przez bezwymiarową amplitudę gradientu ciśnienia A_P/A_M , uzyskuje się profil prędkości niezależny od A_P . W wyniku takiego podejścia można pominąć A_P w liście argumentów (27) otrzymując,

$$U = f(r, \theta, K_R). \quad (29)$$

Dla małych wartości parametru K_R , profil prędkości bezwymiarowej w całym okresie pulsacji jest podobny do profilu w przepływie bez pulsacji — rys. 6.1.

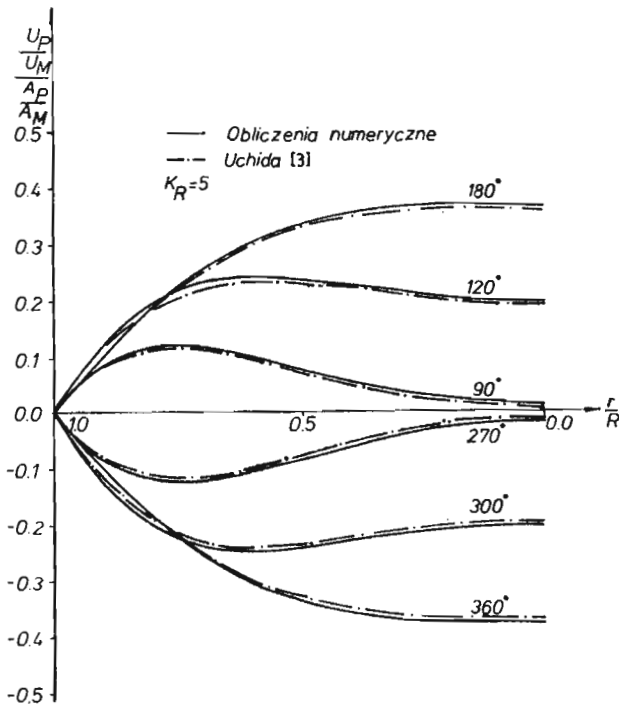


Rys. 6.1. Bezwymiarowy profil prędkości dla różnych faz cyklu pulsacji.

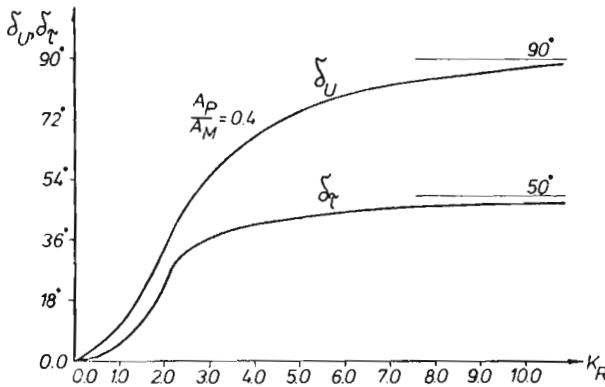
Wzrost parametru K_R powoduje, że w części cyklu pulsacji, maksimum prędkości przesuwa się z osi symetrii w kierunku ściany. Przedstawia to rysunek 6.2, na którym dla porównania naniesiono również wyniki rozwiązania analitycznego Uchidy.

Parametr K_R wpływa w istotny sposób na opóźnienie fazowe prędkości i naprężenia stycznego na ścianie, względem gradientu ciśnienia — rys. 6.3. Ze wzrostem K_R , opóźnienie to zbliża się asymptotycznie do wartości odpowiednio: 90° i 50° .

Stwierdzono również pojawienie się przesunięcia fazowego między prędkością w bliskim sąsiedztwie ściany, a prędkością w osi symetrii — rys. 6.4. Opóźnienie to zależne jest od



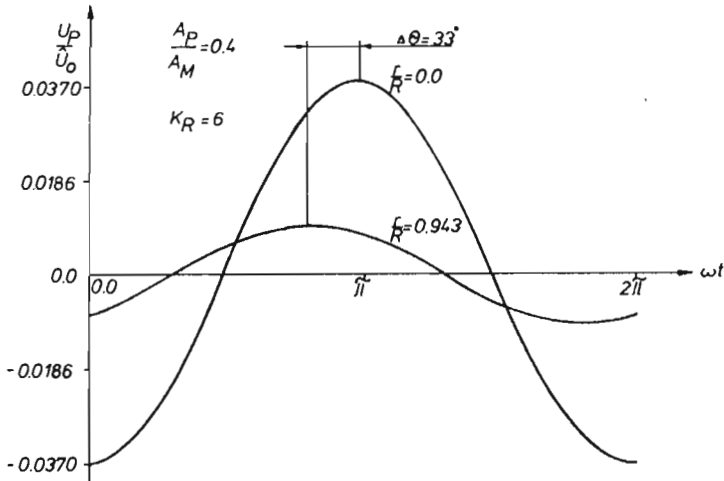
Rys. 6.2. Bezwymiarowy profil prędkości dla różnych faz cyklu pulsacji.



Rys. 6.3. Wpływ parametru K_R na opóźnienie fazowe prędkości i naprężenia stycznego na ścianie względem gradientu ciśnienia.

K_R i r/R . Największe opóźnienie fazowe w stosunku do gradientu ciśnienia posiada prędkość w osi symetrii.

6.2. W pełni rozwinięty pulsacyjny przepływ turbulentny. Obliczenia numeryczne dla przepływu turbulentnego, przeprowadzono dla wody w zakresie zmian parametrów: $Re = 20\,000 - 500\,000$, $K_R = 0 - 60$, $A_P/A_M = 0 - 20$.



Rys. 6.4. Opóźnienie fazowe prędkości w przekroju poprzecznym rury.

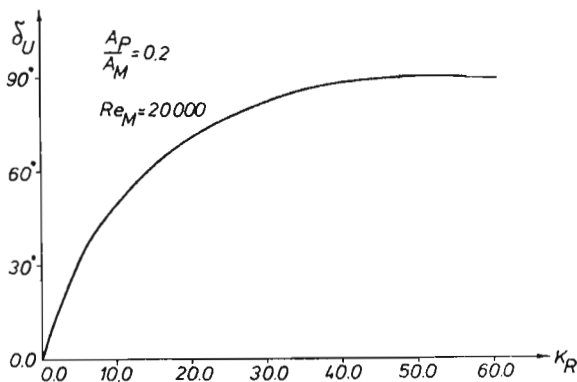
Dla pulsacyjnego przepływu turbulentnego, prędkość jest funkcją następujących wielkości:

$$\bar{u} = f(r, \theta, A_P, K_R, Re_M). \quad (30)$$

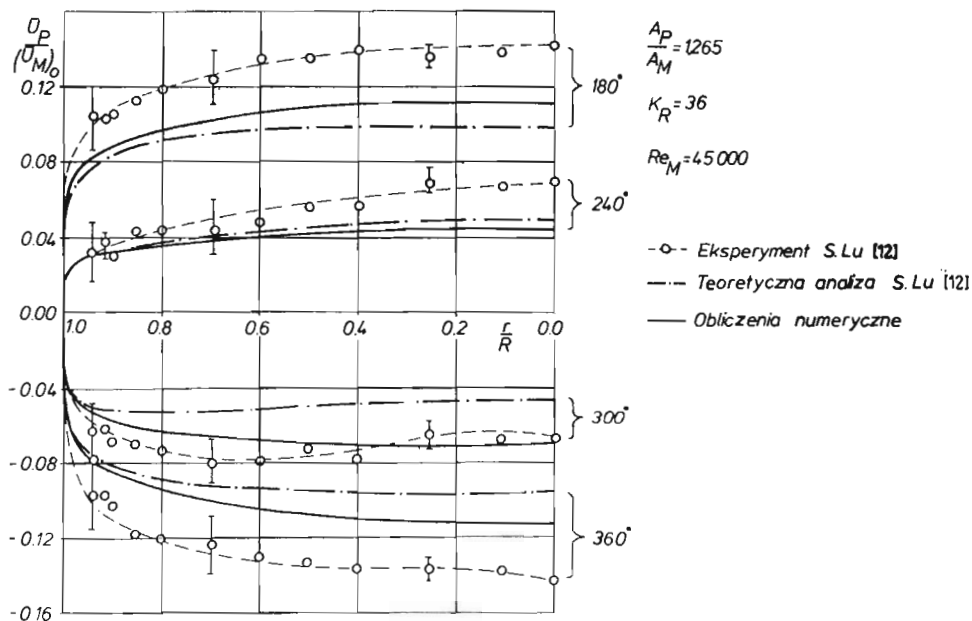
przy czym średnia liczba Reynoldsa, zdefiniowana jest jako,

$$Re_M = \frac{2\hat{u}_M R}{\nu}. \quad (31)$$

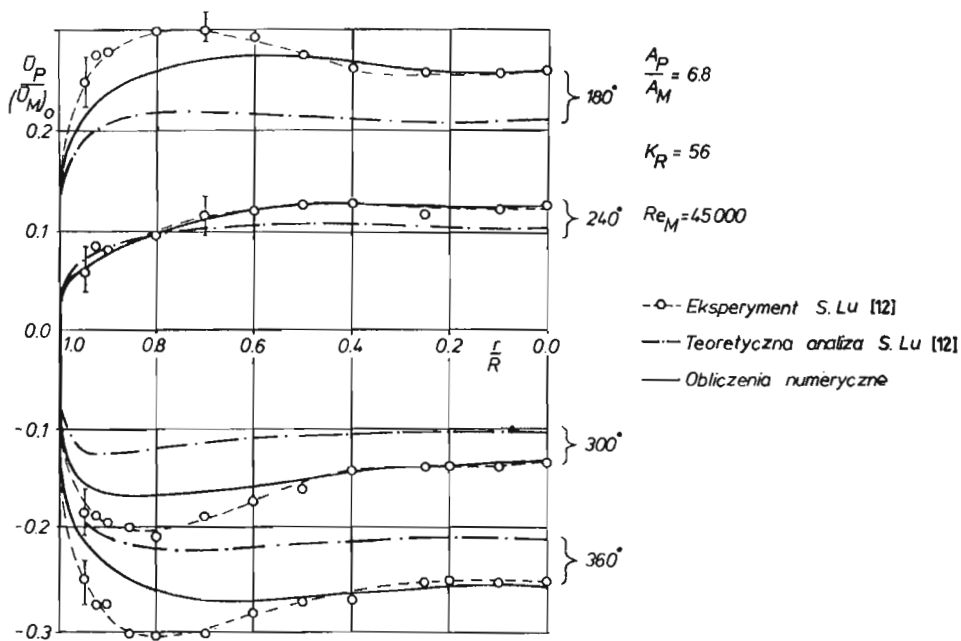
Podobnie jak w przepływie laminarnym, również w przepływie turbulentnym istnieje opóźnienie fazowe prędkości względem gradientu ciśnienia — rys. 6.5. Ze wzrostem K_R , opóźnienie to zbliża się asymptotycznie do 90° .

Rys. 6.5. Wpływ parametru K_R na opóźnienie fazowe prędkości względem gradientu ciśnienia.

Dla małych wartości parametru K_R , tj. dla $K_R < 40$, profil prędkości w przekroju poprzecznym przepływu jest w całym okresie pulsacji zbliżony do profilu w przepływie bez pulsacji. Ilustruje to rys. 6.6, na którym przedstawiono również wyniki badań eksperymentalnych i analitycznych S. Lu [12].



Rys. 6.6. Bezwymiarowy profil prędkości dla różnych faz cyklu pulsacji.



Rys. 6.7. Bezwymiarowy profil prędkości dla różnych faz cyklu pulsacji.

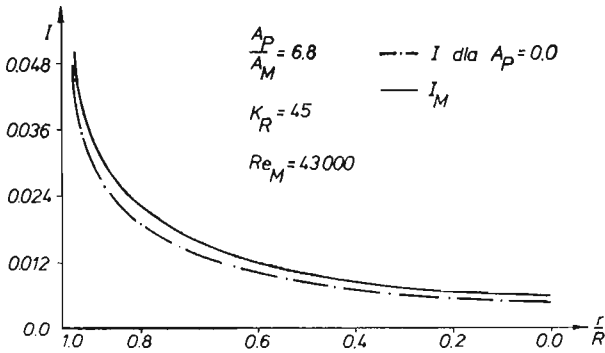
Wzrost parametru K_R , powoduje jakościową zmianę profilu prędkości. Objawia się to tym, że maksimum prędkości w części okresu pulsacji ulega przesunięciu z osi symetrii w kierunku ściany. Przedstawia to rys. 6.7, z którego wynika, że maksymalny błąd względny wynosi ok. 20%, natomiast średni błąd względny jest mniejszy od 10%.

Skala błędów zależy od parametrów przepływu ale na ogół w zakresie parametrów: $Re = 20\,000 - 80\,000$, $A_P/A_M = 0 - 6,8$ i $K_R = 0 - 56$ (jest to zakres zmian parametrów w badaniach eksperymentalnych S. Lu), średni błąd względny waha się od kilku do kilkunastu procent.

Istotnym parametrem z punktu widzenia praktyki inżynierskiej jest intensywność turbulencji

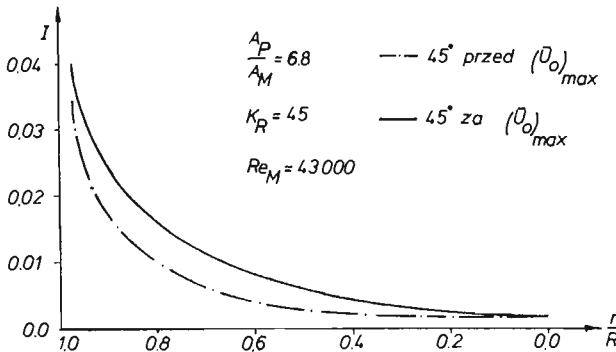
$$I = \frac{k}{\bar{U}^2}, \quad (32)$$

świadcząca o skuteczności mieszania się składników przepływającego płynu i wpływająca na proces wymiany ciepła. Na rys. 6.8 przedstawiono przebieg tej wielkości w przekroju



Rys. 6.8. Profil intensywności turbulencji dla przepływu z pulsacją i bez pulsacji.

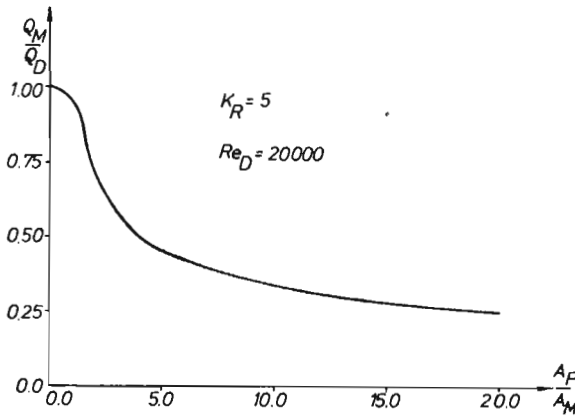
poprzecznym rury. W tym przypadku intensywność turbulencji uśredniona po okresie pulsacji jest większa o ponad 20% od intensywności turbulencji dla przepływu, w którym gradient ciśnienia posiada stałą wartość, równą wartości średniej w przepływie pulsacyjnym.



Rys. 6.9. Profil intensywności turbulencji dla cyklu przyspieszania i opóźnienia przepływu.

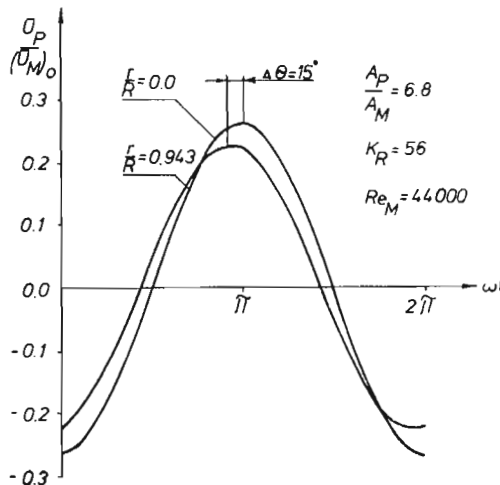
Obliczenia numeryczne wskazują również na fakt, że intensywność turbulencji jest znacznie większa podczas cyklu opóźniania przepływu niż podczas cyklu przyspieszania, co ilustruje rys. 6.9.

Wprowadzenie pulsacji do przepływu powoduje, że wzrasta proces dysypacji energii, objawia się to wyraźnym spadkiem natężenia przepływu. Decydujący wpływ na spadek wartości natężenia przepływu posiada amplituda gradientu ciśnienia — rys. 6.10.



Rys. 6.10. Wpływ A_P/A_M na natężenie przepływu uśrednione po okresie pulsacji.

Podobnie jak w przepływie laminarnym, również w przepływie turbulentnym istnieje przesunięcie fazowe prędkości w przekroju poprzecznym rury. Wartość przesunięcia zależy od parametrów K_R i r/R . Uzyskane maksymalne przesunięcie fazowe prędkości jest identyczne z tym jakie uzyskał w badaniach eksperymentalnych Lu [12]. Przedstawia to rysunek 6.11.



Rys. 6.11. Przesunięcie fazowe prędkości w przekroju poprzecznym rury.

7. Wnioski

Przeprowadzone obliczenia numeryczne, pozwalają sprecyzować szereg wniosków natury ogólnej.

W pełni rozwinięty pulsacyjny przepływ laminarny

1. Parametrami charakterystycznymi przepływu są: r , Θ , K_R .
2. Dla małych wartości parametru K_R , tj. dla $K_R < 5$, profil prędkości jest paraboliczny w całym okresie pulsacji.
3. Dla dużych wartości parametru K_R , tj. dla $K_R \geq 5$, w części okresu pulsacji maksimum profilu prędkości istnieje w sąsiedztwie ściany a nie w osi symetrii. Jednocześnie profil prędkości w sąsiedztwie osi symetrii jest jednolity. Tendencja ta jest wyraźnie widoczna dla dużych wartości parametru K_R .
4. Istnieje opóźnienie fazowe naprężenia stycznego na ścianie i prędkości, względem gradientu ciśnienia. Maksymalna wartość opóźnienia fazowego wynosi odpowiednio 50° i 90° .
5. Występuje przesunięcie fazowe między prędkością w osi symetrii a prędkością w pobliżu ściany. Przesunięcie to zależy w głównej mierze od parametru K_R oraz od r/R , a jego maksymalna wartość nie przekracza 45° .

W pełni rozwinięty pulsacyjny przepływ turbulentny

1. Dla małych wartości A_P/A_M , parametrami charakterystycznymi przepływu są: r , Θ , K_R , Re_M .
2. Dla dużych wartości A_P/A_M , tj. dla $A_P/A_M > 1$, parametrami charakterystycznymi przepływu są: r , Θ , A_P , K_R , Re_M .
3. Dla małych wartości parametru K_R , tj. dla $K_R < 40$, opóźnienie fazowe prędkości względem gradientu ciśnienia jest stałe w całym przekroju poprzecznym przepływu.
4. Dla dużych wartości parametru K_R , tj. dla $K_R \geq 40$, opóźnienie fazowe prędkości względem gradientu ciśnienia zmienia się w przekroju poprzecznym przepływu, osiągając maksymalną wartość w osi symetrii przepływu, wynoszącą 90° .
5. Dla małych wartości parametru K_R , profil prędkości jest zgodny z profilem przepływu turbulentnego bez pulsacji.
6. Ze wzrostem K_R , maksimum profilu prędkości przesuwa się z osi symetrii w kierunku ściany z jednoczesnym występowaniem obszaru jednolitej prędkości w sąsiedztwie osi symetrii.
7. Intensywność turbulencji jest większa podczas cyklu opóźniania przepływu niż podczas cyklu przyspieszania.
8. Parametr A_P/A_M wpływa w decydującej mierze na wartości zmiennych zależnych uśrednione po okresie pulsacji T .
9. Wpływ parametru K_R na wartość wielkości uśrednionych po okresie pulsacji T jest niewielki.
10. Wprowadzenie pulsacji do przepływu zwiększa straty tarcia, powodując tym samym większe nakłady energetyczne na transport płynu.

8. Zakończenie

Przedstawiony model matematyczny w pełni rozwiniętego przepływu pulsacyjnego, stanowi układ trzech równań różniczkowych typu parabolicznego. Z uwagi na jednowymiarowość równań, możliwe jest rozwiązanie dwóch rodzajów przepływu, tj. w pełni rozwinięty laminarny przepływ pulsacyjny lub w pełni rozwinięty turbulentny przepływ pulsacyjny. Uwzględnienie strefy przejścia przepływu z laminarnego w turbulentny nie jest możliwe. Głównym powodem przyjęcia założeń upoważniających do uzyskania jednowymiarowych równań były obawy o czas trwania obliczeń numerycznych. Okazuje się, że dla prezentowanego modelu matematycznego, przeciętny czas trwania obliczeń na maszynie Odra-1305, wynosi ok. 160 minut. Uwzględnienie dodatkowo jednego wymiaru, zwykle powoduje wydłużenie czasu obliczeń o ok. rząd wielkości. W takim przypadku przetestowanie programu obliczeniowego oraz przeprowadzenie studiów numerycznych byłoby niezmiernie czasochłonne i kosztowne.

Autorzy badań eksperymentalnych turbulentnych przepływów pulsacyjnych zwykle posługują się parametrem bezwymiarowej częstości pulsacji K_R , który to parametr przedstawia stosunek czasu dyfuzji do okresu pulsacji. O ile zdefiniowanie tego parametru dla laminarnego przepływu pulsacyjnego — równanie (1) — nie budzi zastrzeżeń, o tyle dla przepływu turbulentnego definicja ta jest problematyczna. Próbę zdefiniowania parametru K_R dla przepływu turbulentnego podjął m.in. Ramaprian i Tu [14]. Przez analogię do definicji K_R w przepływie laminarnym, autorzy zaproponowali w miejsce współczynnika lepkości kinematycznej, wstawić współczynnik lepkości turbulentnej. Jednak w analizie jakościowej zjawisk zachodzących w przepływie pulsacyjnym, zakładają niezależną od czasu dystrybucję v_t . Ponieważ wartość współczynnika v_t uśredniona po okresie pulsacji T , zależy silnie od amplitudy gradientu ciśnienia [20], dlatego definicja ta nie wydaje się być ścisła. Z tego względu sugeruje się, aby dla turbulentnego przepływu pulsacyjnego, parametr K_R zdefiniować w oparciu o współczynnik turbulentnej lepkości, uśrednionej w przekroju poprzecznym przepływu i uśrednionej po okresie pulsacji T , tj.

$$(K_R)_t = \sqrt{\frac{\omega}{(\hat{v}_t)_M}} R. \quad (33)$$

Sposób zdefiniowania $(K_R)_t$ za pomocą zależności (33) ma szczególne uzasadnienie dla dużych amplitud pulsacji. Jednak należy zdać sobie sprawę z faktu, że wymaga to ze strony eksperymentatorów, określenia współczynnika turbulentnej lepkości oraz uśrednienia jego wartości w przekroju poprzecznym przepływu i po okresie pulsacji T .

Mimo pewnych różnic w zdefiniowaniu $(K_R)_t$ za pomocą zależności (33) i tej zaproponowanej przez Ramapriana i Tu [14], zarówno jedna jak i druga definicja pozwala scharakteryzować w sposób jakościowo podobny zjawiska występujące w przepływie pulsacyjnym.

Stosując odmienne definicje w przepływie laminarnym i turbulentnym, podobne zmiany jakościowe zmiennej zależnej Φ , występują dla mniejszej wartości parametru K_R w przepływie turbulentnym niż w przepływie laminarnym. Odpowiada to oczekiwaniom, gdyż w przepływie turbulentnym ze względu na makroskopowy charakter wymiany pędu, stosunek czasu dyfuzji do okresu pulsacji jest znacznie mniejszy od wartości jaką przyjmuje w przepływie laminarnym. Innymi słowy, czas dyfuzji zaburzeń generowanych przy

ścianie w kierunku osi symetrii jest mniejszy w przepływie turbulentnym niż w przepływie laminarnym.

Przeprowadzone porównanie wyników obliczeń numerycznych z wynikami badań eksperymentalnych S. Lu [12], z których część zamieszczono w prezentowanej pracy, pozwala stwierdzić, że model turbulencji $k-\varepsilon$ (podobnie jak modele turbulencji: Laundner-Sharma i Chien [21]) odzwierciedla w sposób jakościowy przebieg zjawisk w izotermicznym przepływie pulsacyjnym. Również wyniki ilościowe typują ten model do opisu przepływów niestacjonarnych o charakterze okresowym.

Literatura

1. S. GOLDSTEIN, L. ROSENHEAD, *Boundary Layer Growth*, Proc. Cambr. Phil. Soc. vol. 32, p. 392, 1936.
2. H. SCHUH, *Calculation of Unsteady Boundary Layers in Two Dimensional Laminar Flow*, Zeitschr. f. Flugwiss. vol. 1, pp. 122 - 131, 1953.
3. S. UCHIDA, *The Pulsating Viscous Flow Superposed on the Steady Laminar Motion of Incompressible Fluid in Circular Pipe*, Zeitschr. für Angewandte Mathematik und Mechanik, vol. VII, pp. 403 - 422, 1956.
4. D. HERSHEY, G. SONG, *Friction Factors and Pressure Drop for Sinusoidal Laminar Flow of Water and Blood in Rigid Tubes*, AIChEJ, vol. 13, No 3, pp. 491 - 496, May 1967.
5. J. HARRIS, G. PEEV, W. L. WILKINSON, *Velocity Profiles in Laminar Oscillatory Flow in a Tubes*, J. of Physics, vol. 12, E, Ser. 2, pp. 913 - 916, 1969.
6. E. B. DENISON, W. H. STEVENSON, R. W. FOX, *Pulsating Laminar Flow Measurements with Directory Sensitive Laser Velocimeter*, AIChEJ, vol. 17, pp. 781 - 786, 1971.
7. T. SARPKEYA, *Experimental Determination of the Critical Reynolds Number of Pulsating Poiseuille Flow*, J. of Basic Engineering, vol. 88, No 3, pp. 589 - 598, Sept. 1966.
8. F. SCHULTZ-GRUNOW, *Pulsierender Durchfluss durch Rohre*, Forschung auf dem Gebiete des Ingenieurwesens, vol. 11, 170 - 187, Juli/August 1940.
9. J. H. GERRARD, *An Experimental Investigation of Pulsating Turbulent Water Flow in a Tubes*, J. of Fluid Mech. vol. 46, part 1, pp. 43 - 64, 1971.
10. M. H. BAIRD, G. F. ROUND, J. N. CARDENAS, *Friction Factors in Pulsed Turbulent Flow*, Can. of Chem. Eng. vol. 49, p. 220, 1971.
11. F. T. BROWN, D. L. MARGOLIS, R. P. SHAH, *Small amplitude Frequency Behaviour of Fluid Lines with Turbulent Flow*, Trans. of the ASME, ser. D, vol. 91, No 4, pp. 678 - 692, Dec. 1969.
12. S. Z. LU, *Pulsating Turbulent Water Flow in a Tube*, Ph. D. Thesis, Cklarkson College of Technology, 1973.
13. S. W. TU, B. R. RAMAPRIAN, *Fully Developed Periodic Turbulent Pipe Flow, Part 1 — Main Experimental Results and Comparison with Predictions*, J. of Fluid Mech., vol. 137, pp. 31 - 58, 1983.
14. B. R. RAMAPRIAN, S. W. TU, *Fully developed periodic turbulent pipe flow. Part 2, The detailed structure of the flow*, J. of Fluid Mech., vol. 137, pp. 59 - 81, 1983.
15. A. P. WATKINS, *Flow and Heat Transfer in Piston/Cylinder Assemblies*, Ph. D. Thesis, University of London, 1977.
16. B. E. LAUNDER, D. B. SPALDING, *Mathematical Models of Turbulence*, Academic Press, London 1972.
17. A. S. BARTOSIK, R. SOBOCIŃSKI, A. J. WANIK, *Modelling of Pulsating Turbulent Fluid Flow*, Proceedings of the IASTED Inter. Symp. on Computers and their Applications for Development, Ed. G. Messina, M. H. Hamza, Acta Press, Calgary, Canada, 1986.
18. A. BARTOSIK, A. WANIK, *Wpływ Parametrów Oscylacyjnych na Własności Przepływu Turbulentnego Wywołanego Periodycznie Zmieniającym się Gradientem Ciśnienia*, V Krajowa Konf. Mech. Cieczy i Gazów, Zeszyty Naukowe Politechniki Poznańskiej, Z. 22, s. 15 - 21, 1982.

19. R. SOBOCIŃSKI, A. BARTOSIK, *Badania Symulacyjne w Pełni Rozwiniętych Przepływów Oscylacyjnych*, Konf. IPPT-PAN, Dynamiczne Zagadnienia w Ośrodkach Ciągłych, Cedzyna 1982.
20. A. BARTOSIK, R. SOBOCIŃSKI, A. WANIK, *Wpływ liczby Reynoldsa na Zachowanie się Przepływu Turbulentnego Wywołanego Zmiennym Gradientem Ciśnienia*, Archiwum Energetyki, tom XIV, Nr 1, s. 5 - 16, 1985.
21. A. S. BARTOSIK, R. SOBOCIŃSKI, A. J. WANIK, *Prediction of Fully Developed Pulsating Flow with the Aid of Low-Reynolds Number Turbulence Models*, Proceedings of the 5th Inter. Conf. on Numerical Methods in Laminar and Turbulent Flow, Canada — Montreal, 6th - 10th, July 1987, vol. 5, Part 1, pp. 521 - 532, Ed. C. Taylor, W. G. Habashi, M. M. Hafez, Pineridge Press, Swansea, U. K.

Р е з ю м е

ВЛИЯНИЕ ПУЛЬСАЦИИ ДАВЛЕНИЯ НА СВОЙСТВА ПОЛНОСТЬЮ РАЗВИТЫХ ТЕЧЕНИЙ

В работе представлена математическая модель полностью развитых течений, в которых градиент давления в направлении развития описан периодической функцией времени. Представлен способ числового решения системы дифференциальных уравнений вместе с описанием береговых и начальных условий. Из результатов решений делано выводы, а также сравнено с известными результатами экспериментальных опытов.

S u m m a r y

THE EFFECT OF PRESSURE PULSATION ON THE PROPERTIES OF FULLY DEVELOPED FLOWS

The paper presents the mathematical model of fully developed flows with pressure gradient compatible with the direction of the flow and described by periodical function of time. The numerical solution of the set of differential equations as well as boundary and initial conditions were presented. The conclusions were drawn and the results of numerical solutions were compared with accessible experimental data.

Praca wpłynęła do Redakcji dnia 6 kwietnia 1987 roku.