

## DWUWYMIAROWY MODEL ODDZIAŁYWANIA OBRACAJĄCEGO SIĘ CYLINDRA Z WARSTWĄ CIECZY NEWTONOWSKIEJ

STANISŁAW TOKARZEWSKI

*IPPT PAN, Warszawa*

CZESŁAW M. RODKIEWICZ

J. S. KENNEDY

*University of Alberta, Edmonton*

Sformułowano prosty model wzajemnego oddziaływania częściowo zanurzonego, obracającego się cylindra z warstwą cieczy newtonowskiej zalegającej dno naczynia otwartego. W ramach tego modelu uzyskano wzory analityczne określające rozkład ciśnienia pod cylindrem, siłę nośną cylindra oraz moment obrotowy oddziałujący na cylinder. Rozkłady ciśnień pod cylindrem oraz położenia punktów wpływu i wypływu, obliczone teoretycznie, poddane zostały weryfikacji eksperymentalnej. Uzyskano stosunkowo dobrą zgodność wyników teoretycznych z doświadczalnymi.

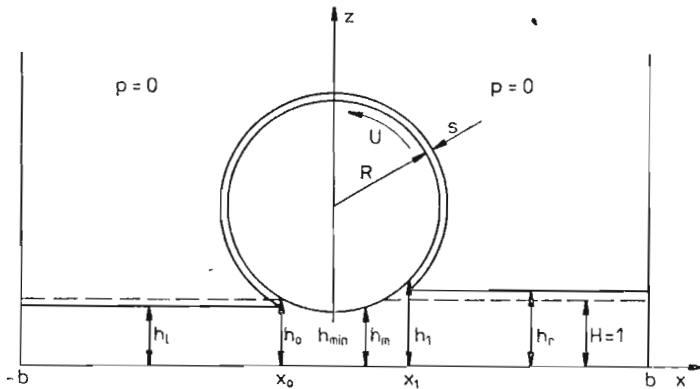
### 1. Wstęp

Częściowo zanurzony w cienkiej warstwie cieczy sztywny cylinder obracający się ze stałą prędkością nad płaszczyzną był przedmiotem rozważań wielu autorów, między innymi Martina (5), Purdaya (8), Floberga (4) oraz Wanga, Kennedy'ego i Rodkiewicza (9). Autorzy ci analizowali wzajemne oddziaływanie cieczy z obracającym się cylindrem, przy założeniu nieskończonej płaszczyzny i małej szczeliny. Założenia te pozwoliły pominąć siły grawitacji, a także nie brać pod uwagę wydatku cieczy zagarnianej przez górną powierzchnię cylindra. W przypadku naczynia o skończonych wymiarach wydatek transportowany górną powierzchnią cylindra oraz siły ciężkości mają istotny wpływ na przebieg zjawiska i nie mogą być pominięte. Stąd wyniki uzyskane przez autorów (5), (8), (4), (9) nie dają się bezpośrednio rozciągnąć na przypadek cylindra obracającego się w naczyniu otwartym. A zatem, aby opisać oddziaływanie warstwy cieczy z obracającym się w naczyniu cylindrem, należy zbudować model teoretyczny uwzględniający siły grawitacji i transport cieczy górą. Stanowi to główny cel niniejszej pracy. Niektóre wyniki uzyskane w ramach proponowanego modelu poddane zostały weryfikacji eksperymentalnej. Przykładem

praktycznych zastosowań przeprowadzonych rozważań może być między innymi łożysko ślizgowe zanurzone w kąpeli olejowej pracujące bez dostarczania z zewnątrz cieczy smarującej.

## 2. Sformułowanie problemu

Niech będzie dane nieskończenie długie naczynie otwarte o szerokości  $2b'$  (rys. 1). Niech na dnie tego naczynia znajduje się warstwa nieściśliwej cieczy newtonowskiej o średniej wysokości  $H'$ . Rozważmy sztywny cylinder o promieniu  $R'$  obracający się z pręd-



Rys. 1. Cylinder obracający się w naczyniu otwartym.

kością obwodową  $U'$ . Cylinder ten jest częściowo zanurzony w cieczy (rys. 1). Minimalna szczelina między powierzchnią obracającego się cylindra i dnem naczynia niech będzie równa  $h'_{min}$ . Do powierzchni obracającego się cylindra przylega cienka warstwa cieczy o średniej grubości  $s'$ . Niech  $h'_l$ ,  $h'_m$ ,  $h'_r$  określają wysokości poziomów cieczy znajdujących się odpowiednio po lewej stronie cylindra, pod cylindrem, po prawej stronie cylindra. Współrzędne  $x'_0$ ,  $x'_1$  oznaczają odpowiednio położenie punktu wpływu cieczy pod cylinder oraz punktu wypływu cieczy spod cylindra. Przez  $S'_l$ ,  $S'_m$ ,  $S'_r$  oznaczmy objętości cieczy znajdującej się odpowiednio pod poziomami  $h'_l$ ,  $h'_m$ ,  $h'_r$  (rys. 1). Rozważania prowadzić będziemy w oparciu o następujące podstawowe założenia:

$$\frac{H'}{R'} \ll 1, \quad \frac{h'_{min}}{x'_1 - x'_0} \ll 1, \quad \frac{s'}{R'} \ll 1. \quad (2.1)$$

Celem niniejszej pracy jest sformułowanie prostego modelu opisującego wzajemne oddziaływanie obracającego się cylindra z warstwą cieczy newtonowskiej zalegającej dno naczynia otwartego.

### 3. Podstawowe równania

Równania Naviera-Stokesa zapisane w następującej formie:

$$\begin{aligned} \varrho' \frac{du'}{dt'} &= -\frac{\partial p'}{\partial x'} + \frac{2}{3} \eta' \frac{\partial^2 u'}{\partial x'^2} + \frac{2}{3} \eta' \frac{\partial}{\partial x'} \left( \frac{\partial u'}{\partial x'} - \frac{\partial v'}{\partial z'} \right) + \eta' \frac{\partial}{\partial z'} \left( \frac{\partial u'}{\partial z'} + \frac{\partial v'}{\partial x'} \right), \\ \varrho' \frac{dv'}{dt'} &= \varrho' g - \frac{\partial p'}{\partial z'} + \frac{2}{3} \eta' \frac{\partial}{\partial z'} \left( \frac{\partial v'}{\partial z} - \frac{\partial u'}{\partial x'} \right) + \frac{2}{3} \eta' \frac{\partial^2 v'}{\partial z'^2} + \eta' \frac{\partial}{\partial x'} \left( \frac{\partial v'}{\partial x'} + \frac{\partial u'}{\partial z'} \right), \end{aligned} \quad (3.1)$$

opisują dwuwymiarowy przepływ nieściśliwej cieczy newtonowskiej. Dla warstwy spełniającej założenia (2.1) siły bezwładności są pomijalne w porównaniu z siłami lepkości i siłami ciśnień. Po zaniedbaniu efektów bezwładności równania (3.1) przyjmują postać:

$$\begin{aligned} \frac{\partial p'}{\partial x'} &= \frac{2}{3} \eta' \frac{\partial^2 u'}{\partial x'^2} + \frac{2}{3} \eta' \frac{\partial}{\partial x'} \left( \frac{\partial u'}{\partial x'} - \frac{\partial v'}{\partial z'} \right) + \eta' \frac{\partial}{\partial z'} \left( \frac{\partial u'}{\partial z'} + \frac{\partial v'}{\partial x'} \right), \\ \frac{\partial p'}{\partial z'} &= -\varrho' g + \frac{2}{3} \eta' \frac{\partial}{\partial z'} \left( \frac{\partial v'}{\partial z'} - \frac{\partial u'}{\partial x'} \right) + \frac{2}{3} \eta' \frac{\partial^2 v'}{\partial z'^2} + \eta' \frac{\partial}{\partial x'} \left( \frac{\partial v'}{\partial x'} + \frac{\partial u'}{\partial z'} \right). \end{aligned} \quad (3.2)$$

Z założeń (2.1) wynika, że rozważamy przypadek, w którym grubość warstwy cieczy w stosunku do innych wymiarów, na przykład do promienia cylindra, jest niewielka. Obserwacja ta pozwala zaniedbać wszystkie pochodne względem współrzędnej  $x$ . Równania (3.2) przyjmują postać:

$$\frac{\partial p'}{\partial z'} = -\varrho' g + \eta' \frac{\partial^2 v'}{\partial z'^2}, \quad \frac{\partial p'}{\partial x'} = \eta' \frac{\partial^2 u}{\partial z'^2}. \quad (3.3)$$

W warstwie cieczy spełniającej założenia (2.1) prędkości poprzeczne  $v'$  są pomijalnie małe w stosunku do prędkości wzdłużnych  $u'$ . Eliminując w równaniach (3.3) prędkość  $v'$  dostajemy:

$$\frac{\partial p'}{\partial z'} = -\varrho' g, \quad \frac{\partial p'}{\partial x'} = \eta' \frac{\partial^2 u}{\partial z'^2}. \quad (3.4)$$

Scalkowanie wyrażenia (3.4<sub>1</sub>) prowadzi do wyniku:

$$p' = \varrho' g (h'(x) - z') + P'(x), \quad (3.5)$$

gdzie  $P'(x)$  jest funkcją ciśnienia postawioną na powierzchni cieczy  $h'(x)$ . Podstawienie (3.5) do (3.4<sub>2</sub>) daje ostatecznie równanie równowagi następujące:

$$\frac{\partial}{\partial x} (h + p) = \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}, \quad (3.6)$$

gdzie:

$$x = \frac{x'}{H'}, \quad z = \frac{z'}{H'}, \quad p = \frac{p'}{\varrho' g H'}, \quad u = \frac{u' \cdot \eta'}{\varrho' g H'^2}, \quad h = \frac{h'}{H'}, \quad (3.7)$$

są zmiennymi bezwymiarowymi obowiązującymi w dalszej części pracy. Równania (3.6) i (3.7) opisują przepływ cieczy w naczyniu otwartym generowany przez obracający się cylinder. Należy zauważyć, że przy  $\partial h / \partial x = 0$  równanie (3.6) przyjmie postać równania Reynoldsa powszechnie używanego do opisu procesów smarowania (1). Wyraz  $\partial h / \partial x$

określa wpływ grawitacji na przepływ cieczy. Należy również zauważyć, że dzięki wprowadzeniu zmiennych bezwymiarowych w postaci (3.7) w równaniu (3.6) nie występują liczby podobieństwa.

#### 4. Obszary na zewnątrz cylindra

Do równań (3.6) dołączamy następujące warunki brzegowe (rys. 1):

$$z_i = 0, \quad u_i = 0; \quad z_i = h_i, \quad \partial u_i / \partial z_i = 0, \quad i = l, r, \quad (4.1)$$

obowiązujące w obszarach  $(-b, x_0)$  i  $(x_1, b)$ . Oznaczają one, że prędkość na dnie naczynia, a także naprężenia styczne na swobodnych powierzchniach cieczy równają się zero. Proste całkowanie równań (3.6) i (4.1) prowadzi do następującego wyniku:

$$u_i = \left( \frac{z_i^2}{2} - z_i h_i \right) \frac{\partial}{\partial x_i} (p_i + h_i), \quad i = l, r. \quad (4.2)$$

Zakładamy, że ciśnienie nad powierzchnią swobodną cieczy równa się zero:

$$P_i = 0, \quad i = l, r. \quad (4.3)$$

Jednocześnie wydatek cieczy płynącej w obszarach „l” i „r” także równa się zero (rys. 1):

$$Q_i = 0, \quad i = l, r. \quad (4.4)$$

Dodatkowo rozkład prędkości (4.2) musi spełniać całkowite równanie ciągłości następujące:

$$Q_i = \int_0^{h_i} u_i dz, \quad i = l, r. \quad (4.5)$$

Na podstawie (4.2) - (4.5) otrzymujemy natychmiast:

$$Q_i = -\frac{1}{3} h_i^3 \frac{\partial h_i}{\partial x_i}, \quad i = l, r. \quad (4.6)$$

Rozwiązanie równań (4.4) - (4.6) wynosi:

$$h_i = \text{const}, \quad i = l, r. \quad (4.7)$$

Podstawiając (4.3), (4.7) do (4.2) dostajemy:

$$u_i = 0. \quad (4.8)$$

Otrzymane rozwiązania wskazują, że w obszarach cieczy leżących poza bezpośrednim sąsiedztwem punktów wpływu  $x_0$  i wypływu  $x_1$  nie występuje przepływ. Ciecz znajduje się w stanie spoczynku. Poza tym rozwiązanie (4.7) sugeruje, że minimalna szczelina  $h_{min}$  określa w przybliżeniu najmniejszy poziom, na jaki może opaść na skutek obrotów cylindra ciecz w naczyniu. Stąd do dalszych rozważań zakładamy, że następujące równości:

$$h_r, h_l \geq h_{min}, \quad (4.9)$$

są zawsze spełnione niezależnie od obrotów cylindra.

### 5. Poziomy cieczy w naczyniu otwartym

Wstępnie założymy, że pokazane na rys. 1 współrzędne  $x_0$ ,  $x_1$  określają położenie punktów wpływu i wypływu cieczy. Z prostych rozważań geometrycznych wynikają następujące związki między współrzędnymi  $x_0$ ,  $x_1$ , a parametrami  $h_l$ ,  $h_r$ ,  $R$ ,  $h_{min}$ ,  $s$ :

$$x_0 = -\sqrt{(2R-h+h_{min}+s)(h_l-h_{min}+s)}, \quad x_1 = \sqrt{(2R-h_r+h_{min}+s)(h_r-h_{min}+s)}. \quad (5.1)$$

Z bilansu ilości cieczy zajmującej obszary pod powierzchniami  $h_l$ ,  $h_m$ ,  $h_r$  odpowiednio wynika (rys. 1):

$$S_l(h_l) = h_l(b+x_0),$$

$$S_m(h_l, h_r) = h_{min}(x_1-x_0) + \sum_{i=0}^1 \left\{ \frac{(-1)^i}{4} \left[ 2 \arcsin \frac{x_i}{R} - \sin \left( 2 \arcsin \frac{x_i}{R} \right) \right] \right\} \cdot R^2, \quad (5.2)$$

$$S_r(h_r) = h(b-x_1).$$

Stąd całkowita ilość cieczy w naczyniu równa się:

$$S(h_l, h_r) = S_l(h_l) + S_m(h_l, h_r) + S_r(h_r). \quad (5.3)$$

Obracający cylinder nie zmienia objętości cieczy. Stąd możemy napisać:

$$S(h_l, h_r) = S(1, 1), \quad (5.4)$$

gdzie  $S(1, 1)$  oznacza ilość cieczy w naczyniu obliczoną dla przypadku, gdy cylinder nie obraca się. Równania (5.1) - (5.4) określają ogólny związek między poziomami cieczy  $h_l$ ,  $h_r$ . Związek ten jest dosyć skomplikowany. W celu jego uproszczenia ograniczymy rozważania do bardzo długiego naczynia. Dla przypadku  $b \rightarrow \infty$  równanie (5.3) redukuje się do postaci:

$$h_l + h_r = 2. \quad (5.5)$$

Dla szerokiego naczynia otwartego suma wysokości lewego i prawego poziomu cieczy nie zależy od obrotów cylindra i wynosi 2. Zaniedbując  $h_l$ ,  $h_r$ ,  $h_{min}$  i  $s$  w stosunku do  $R$  i wykorzystując równość (5.5) otrzymujemy na podstawie (5.1) następujące zredukowane związki:

$$\gamma_0 = \arctg - \sqrt{\frac{2(1-h_{min}+s)}{h_{min}}} - \text{tg}^2 \gamma_1, \quad \gamma_i = \arctg \frac{x_i}{\sqrt{2Rh_{min}}} \quad i = 0, 1, \quad (5.6)$$

określający zależność między współrzędnymi  $x_0$ ,  $x_1$ .

### 6. Podstawowe definicje i określenia

Wszystkie dalsze badania prowadzić będziemy przy założeniu, że cylinder obraca się wyłącznie w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara. Założenie to nie będzie podkreślane w tekście. Jest oczywiste, że poziomy  $h_l$ ,  $h_r$  pokazane na rys. 1 zmieniają swą wysokość w zależności od obrotów cylindra. Istnieje jednak górna granica niezależna od

obrotów, której nie mogą przekroczyć. Granica ta wynikająca ze związków (4.9) i (5.5) równa się  $2-h_{min}$ , co oznacza, że dla dowolnej prędkości cylindra spełnione są następujące nierówności:

$$h_{min} \leq h_l \leq 2-h_{min}, \quad i = l, r. \quad (6.1)$$

A zatem pod wpływem obrotów cylindra mogą zaistnieć w naczyniu trzy następujące sytuacje:

$$h_l < 2-h_{min}, \quad h_r < 2-h_{min}, \quad (6.2)$$

$$h_l = 2-h_{min}, \quad h_r = h_{min}, \quad (6.3)$$

$$h_l = h_{min}, \quad h_r = 2-h_{min}, \quad (6.4)$$

które wyróżnimy nazywając odpowiednio fazą początkowego oddziaływania, fazą słabego oddziaływania, fazą silnego oddziaływania cylindra z warstwą cieczy. Pełniejsze uzasadnienie przyjętych definicji wyniknie w dalszej części pracy. Wygodnie jest dla prowadzenia dalszych rozważań, minimalne prędkości obwodowe cylindra utrzymujące poziomy cieczy na wysokościach maksymalnych (6.3<sub>1</sub>) bądź (6.4<sub>2</sub>) oznaczyć i nazwać następująco:

$$U_p \text{ — prędkości przejściowe.} \quad (6.5)$$

Kolejna definicja dotyczyć będzie szczeliny między cylindrem a dnem naczynia. Dla danych obrotów cylindra, minimalną szczelinę, przy której poziomy cieczy w naczyniu  $h_l$ ,  $h_r$  są jednakowe:

$$h_r = h_l = 1, \quad (6.6)$$

oznaczymy i nazwiemy następująco:

$$h_{min}^0 \text{ — szczelina charakterystyczna.} \quad (6.7)$$

Porównując wydatki cieczy pod cylindrem i nad cylindrem w warunkach szczeliny charakterystycznej, większej od charakterystycznej i mniejszej od charakterystycznej oraz korzystając z definicji (6.5) i (6.7) oddziaływania cylindra z cieczą wyróżnione zależnościami (6.2) - (6.4) można określić w zależności od prędkości obwodowej cylindra i szczeliny charakterystycznej następująco:

$$\begin{aligned} U \leq U_p, h_{min} \geq h_{min}^0 &\text{ — faza początkowego oddziaływania,} \\ U > U_p, h_{min} > h_{min}^0 &\text{ — faza słabego oddziaływania,} \\ U > U_p, h_{min} < h_{min}^0 &\text{ — faza silnego oddziaływania,} \end{aligned} \quad (6.8)$$

gdzie  $U$ ,  $U_p$ ,  $h_{min}$ ,  $h_{min}^0$  oznaczają odpowiednio prędkość obwodową cylindra, obwodową prędkość przejściową, minimalną szczelinę, szczelinę charakterystyczną w warunkach prędkości przejściowej. W dalszej części pracy korzystać będziemy z następujących związków:

$$\gamma_0 = -\arctg \sqrt{\frac{2(1-h_{min})+s}{h_{min}}}, \quad \gamma_1 = \arctg \sqrt{\frac{s}{h_{min}}}, \quad (6.9)$$

$$\gamma_0 = -\arctg \sqrt{\frac{s}{h_{min}}}, \quad \gamma_1 = \arctg \sqrt{\frac{2(1-h_{min})+s}{h_{min}}}, \quad (6.10)$$

określających maksymalne i minimalne położenia punktów wpływu i wypływu cieczy:

$$x_0 = \sqrt{2Rh_{min}} \cdot \operatorname{tg} \gamma_0, \quad x_1 = \sqrt{2Rh_{min}} \cdot \operatorname{tg} \gamma_1. \quad (6.11)$$

Zależności (6.11) otrzymane zostały na podstawie równości (7.6).

## 7. Obszar pod cylindrem

Dla wygody zapisu obszar pod cylindrem  $(x_0, x_1)$  nie będzie wyróżniany indeksem „m” (rys. 1). Stąd warunki brzegowe towarzyszące równaniom (3.6) zapiszemy jak następuje (rys. 1):

$$z = 0, \quad u = 0; \quad z = h, \quad u = U. \quad (7.1)$$

Proste całkowanie równań (3.6) i (7.1) prowadzi do następującego rozkładu prędkości:

$$u = \frac{1}{2}(z^2 - z \cdot h) \frac{\partial}{\partial x} (P+h) + \frac{U \cdot z}{h}. \quad (7.2)$$

Profil prędkości (7.2) spełnia całkowite równanie ciągłości:

$$\int_0^h u dz = Q, \quad (7.3)$$

gdzie  $Q$  oznacza wydatek cieczy zarówno pod jak i nad obracającym się cylindrem. Związki (7.2) i (7.3) dają:

$$Q = -\frac{1}{12} h^3 \frac{\partial}{\partial x} (P+h) + \frac{1}{2} U \cdot h. \quad (7.4)$$

Linia kontaktu powierzchni cylindra z warstwą cieczy jest łukiem koła. Łuk ten można na podstawie założeń (2.1) zastąpić w przybliżeniu parabolą o równaniu:

$$h = R + h_{min} - \sqrt{R^2 - x^2} \approx h_{min}(1 + \operatorname{tg}^2 \gamma), \quad (7.5)$$

gdzie nowa zmienna:

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{x}{\sqrt{2Rh_{min}}}, \quad (7.6)$$

została wprowadzona do związku (7.5). Podstawiając (7.5) do (7.4) otrzymujemy:

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{6U \cos^4 \gamma}{h_{min}^2} - \frac{12 \cdot Q \cdot \cos^6 \gamma}{h_{min}^3} - \frac{x}{R}. \quad (7.7)$$

Zakładając znikanie ciśnienia w punkcie wpływu cieczy:

$$P(x_1) = P(\gamma_1) = 0, \quad (7.8)$$

rozwiązanie równania (7.7) przyjmie postać:

$$P(\gamma) = \left\{ \operatorname{tg}^2 \gamma_1 - \operatorname{tg}^2 \gamma + \frac{3 \sqrt{2Rh_{min}}}{h_{min}^3} \left[ U \cdot f_1(\gamma, \gamma_1) - \frac{Q}{h_{min}} \cdot f_2(\gamma, \gamma_1) \right] \right\} \cdot h_{min}, \quad (7.9)$$

$$f_1(\gamma, \gamma_1) = (\gamma - \gamma_1) + \frac{1}{2}(\sin 2\gamma - \sin 2\gamma_1),$$

$$f_2(\gamma, \gamma_1) = \frac{3}{2}(\gamma - \gamma_1) + (\sin 2\gamma - \sin 2\gamma_1) + \frac{1}{8}(\sin 4\gamma - \sin 4\gamma_1). \quad (7.10)$$

Następujące całki:

$$W = \sqrt{2Rh_{min}} \int_{\gamma_0}^{\gamma_1} P \frac{d\gamma}{\cos^2 \gamma}, \quad (7.11)$$

$$Z = \sqrt{2Rh_{min}} \int_{\gamma_0}^{\gamma_1} \left[ \frac{1}{2} h \frac{\partial}{\partial x} (P+h) + \frac{U}{h} \right] \frac{d\gamma}{\cos^2 \gamma}, \quad (7.12)$$

określają kolejno siłę nośną cylindra oraz moment obrotowy. Podstawiając do całek (7.11 - 7.12) odpowiednio związki (7.7) i (7.9) dostajemy:

$$W = \frac{6RU}{h_{min}} \left[ f_3(\gamma_0, \gamma_1) + \frac{Q}{U \cdot h_{min}} f_4(\gamma_0, \gamma_1) \right] + h_{min} \sqrt{2Rh_{min}} f_5(\gamma_0, \gamma_1), \quad (7.13)$$

$$f_3(\gamma_0, \gamma_1) = (\gamma_1 - \gamma_0) \cdot \operatorname{tg} \gamma_0 + \frac{1}{2} \sin 2\gamma_1 (\operatorname{tg} \gamma_0 - \operatorname{tg} \gamma_1),$$

$$f_4(\gamma_0, \gamma_1) = \frac{3}{2}(\gamma_0 - \gamma_1) \cdot \operatorname{tg} \gamma_0 + \left( \sin 2\gamma_1 + \frac{1}{8} \sin 4\gamma_1 \right) (\operatorname{tg} \gamma_1 - \operatorname{tg} \gamma_0) + \frac{1}{4}(\cos 2\gamma_1 - \cos 2\gamma_0),$$

$$f_5(\gamma_0, \gamma_1) = \frac{2}{3} \operatorname{tg}^3 \gamma_1 + \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 \gamma_0 - \operatorname{tg}^2 \gamma_1 \operatorname{tg} \gamma_0,$$

$$Z = \sqrt{2Rh_{min}} \left\{ \frac{4U}{h_{min}} (\gamma_1 - \gamma_0) + 3 \frac{Q}{U h_{min}} \cdot f_1(\gamma_0, \gamma_1) \right\}, \quad (7.14)$$

$$f_1(\gamma_0, \gamma_1) = (\gamma_0 - \gamma_1) + \frac{1}{2}(\sin 2\gamma_0 - \sin 2\gamma_1).$$

Otrzymane związki (7.9), (7.13) i (7.14) opisują oddziaływanie warstwy cieczy z nieskończonym cylindrem obracającym się w naczyniu otwartym (rys. 1). Oznaczają one odpowiednio: rozkład ciśnienia pod cylindrem, siłę nośną cylindra i moment obrotowy. Należy zauważyć, że wyrażenia (7.9), (7.13) i (7.14) zależą między innymi od położenia punktu wpływu  $\gamma_0$ , położenia punktu wypływu  $\gamma_1$  oraz wydatku cieczy pod i nad cylindrem  $Q$ . Wymienione parametry są nieznane. Wyznamy je w następnym punkcie pracy.

## 8. Wydatki, punkty wpływu, punkty wypływu

Wartości parametrów  $q$ ,  $\gamma_0$ ,  $\gamma_1$  wyznaczać będziemy w oparciu o następujące układy równań obowiązujące odpowiednio:

dla fazy początkowych oddziaływań cylindra z cieczą (6.8<sub>1</sub>):

$$Q = U \cdot s, \quad (8.1)$$



$$\operatorname{tg}^2 \gamma_1 - \operatorname{tg}^2 \gamma_0 + \frac{3 \cdot \sqrt{2Rh_{\min}}}{h_{\min}^3} \cdot U \cdot \left[ f_1(\gamma_0, \gamma_1) - \frac{s}{h_{\min}} f_2(\gamma_0, \gamma_1) \right] = 0, \quad (8.1_2)$$

$$\gamma_0 = -\operatorname{arctg} \sqrt{\frac{2(1-h_{\min}+s)}{h_{\min}} - \operatorname{tg}^2 \gamma_1}, \quad (8.1_3)$$

dla fazy słabych oddziaływań cylindra z cieczą (6.8<sub>2</sub>):

$$Q = U \cdot s, \quad (8.2_1)$$

$$\gamma_1 = \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{2(1-h_{\min}+s)}{h_{\min}}}, \quad (8.2_2)$$

$$\operatorname{tg}^2 \gamma_1 - \operatorname{tg}^2 \gamma_0 + \frac{3 \sqrt{2Rh_{\min}}}{h_{\min}^3} U \left[ f_1(\gamma_0, \gamma_1) - \frac{s}{h_{\min}} f_2(\gamma_0, \gamma_1) \right] = 0, \quad (8.2_3)$$

dla fazy silnych oddziaływań cylindra z cieczą (6.8<sub>3</sub>):

$$Q = \frac{\operatorname{tg}^2 \gamma_1 - \operatorname{tg}^2 \gamma_0}{f_2(\gamma_0, \gamma_1)} \cdot \frac{h_{\min}^4}{3 \sqrt{2Rh_{\min}}} + U \cdot h_{\min} \cdot \frac{f_1(\gamma_0, \gamma_1)}{f_2(\gamma_0, \gamma_1)}, \quad (8.3_1)$$

$$\gamma_0 = -\operatorname{arctg} \sqrt{\frac{2(1-h_{\min}+s)}{h_{\min}}}, \quad (8.3_2)$$

$$\gamma_1 = \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{s}{h_{\min}}}. \quad (8.3_3)$$

Otrzymane układy równań (8.1) - (8.3) są konsekwencją następujących założeń wprowadzanych kolejno:

dla fazy początkowych oddziaływań —

- 1) wydatek cieczy nad cylindrem jest proporcjonalny do prędkości obwodowej cylindra.
- 2) ciśnienie w punkcie wpływu cieczy pod cylinder równa się zero (7.9).
- 3) dla punktów wpływu i wypływu cieczy obowiązuje wzór (5.6).

dla fazy słabych oddziaływań —

- 1) wydatek cieczy nad cylindrem jest proporcjonalny do prędkości obwodowej cylindra.
- 2) położenie punktu wypływu cieczy określa wzór (6.10<sub>2</sub>).
- 3) ciśnienie w punkcie wpływu pod cylinder równa się zero (7.9).

dla fazy silnych oddziaływań —

- 1) ciśnienie w punkcie wpływu cieczy równa się zero (7.9).
- 2) położenie punktu wpływu cieczy określa wzór (6.9<sub>1</sub>).
- 3) położenie punktu wypływu cieczy określa wzór (6.9<sub>2</sub>). Współczynnik proporcjonalności  $s$  występujący w związkach (8.1<sub>1</sub>) i (8.2<sub>1</sub>) ma określony sens fizyczny. Oznacza średnią grubość warstwy cieczy zagarnianej przez górną powierzchnię obracającego się cylindra. Parametr  $s$ , w ramach rozważanego modelu, należy wyznaczyć eksperymentalnie.

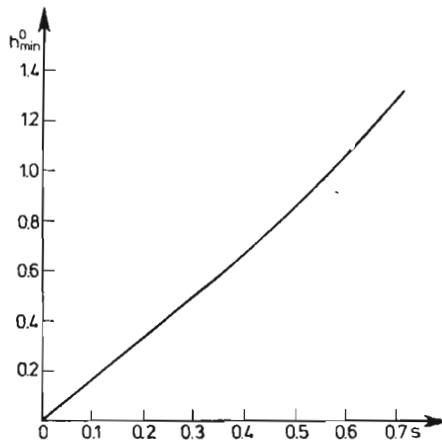
### 9. Szczelina charakterystyczna, prędkość przejściowa

Pełny opis wzajemnego oddziaływania cylindra z warstwą cieczy w naczyniu wymaga wyznaczenia szczeliny charakterystycznej  $h_{min}^0$  (6.7) oraz prędkości przejściowej  $U_p$  (6.5). Następujący układ równań:

$$f_1(\gamma_0, \gamma_1) - \frac{s}{h_{min}^0} f_2(\gamma_0, \gamma_1) = 0, \quad (9.1)$$

$$-\gamma_0 = \gamma_1 = \arctg \sqrt{\frac{1 - h_{min}^0 + s}{h_{min}^0}}, \quad (9.2)$$

określa szczelinę charakterystyczną  $h_{min}^0$  w funkcji grubości warstwy cieczy  $s$ . Układ równań (9.1) otrzymaliśmy stosując do związków (8.1) definicję (6.7). Dla szczeliny charakterystycznej (9.1) równanie (8.1<sub>2</sub>) spełnione jest tożsamościowo niezależnie od prędkości obwodowej cylindra  $U$ . A zatem w ramach rozważanego modelu szczelina charakterystycz-



Rys. 2. Szczelina charakterystyczna w funkcji grubości warstwy przylegającej do cylindra.

na nie zależy od obrotów cylindra. Wykres szczeliny charakterystycznej  $h_{min}^0$  w zależności od  $s$  przedstawia rys. 2.

Prędkość przejściową  $U_p$  (6.5) określa równanie (8.1<sub>2</sub>) zapisane następująco:

$$U = \frac{h_{min}^2 \cdot \sqrt{h_{min}}}{3 \cdot \sqrt{2R}} \cdot \frac{\operatorname{tg}^2 \gamma_0 - \operatorname{tg}^2 \gamma_1}{f_1(\gamma_0, \gamma_1) - \frac{s}{h_{min}} f_2(\gamma_0, \gamma_1)}. \quad (9.2)$$

W przypadku, gdy aktualna szczelina pod cylindrem jest większa (mniejsza) od szczeliny charakterystycznej:

$$h_{min} > h_{min}^0 (h_{min} < h_{min}^0), \quad (9.3)$$

wówczas do równania (9.2) podstawiamy:

$$\gamma_0 = -\operatorname{arctg} \sqrt{\frac{s}{h_{min}}}, \quad \gamma_1 = \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{2(1-h_{min})+s}{h_{min}}}, \quad (9.4)$$

$$\left( \gamma_0 = -\operatorname{arctg} \sqrt{\frac{2(1-h_{min})+s}{h_{min}}}, \quad \gamma_1 = \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{s}{h_{min}}} \right).$$

w celu uzyskania poszukiwanej prędkości przejściowej  $U_p$ . Wzory (9.4) określają maksymalne i minimalne położenie punktów wpływu  $\gamma_0$  i wypływu  $\gamma_1$  cieczy (por. (6.9) - (6.10)). Podstawienie (9.4) do zależności (9.2) jest zgodne z definicją prędkości przejściowej  $U_p$  (6.5).

## 10. Wyznaczanie oddziaływania cylindra z warstwą cieczy w naczyniu

Punktem wyjścia do wyznaczania wzajemnych oddziaływań obracającego się cylindra z warstwą cieczy są następujące dane:

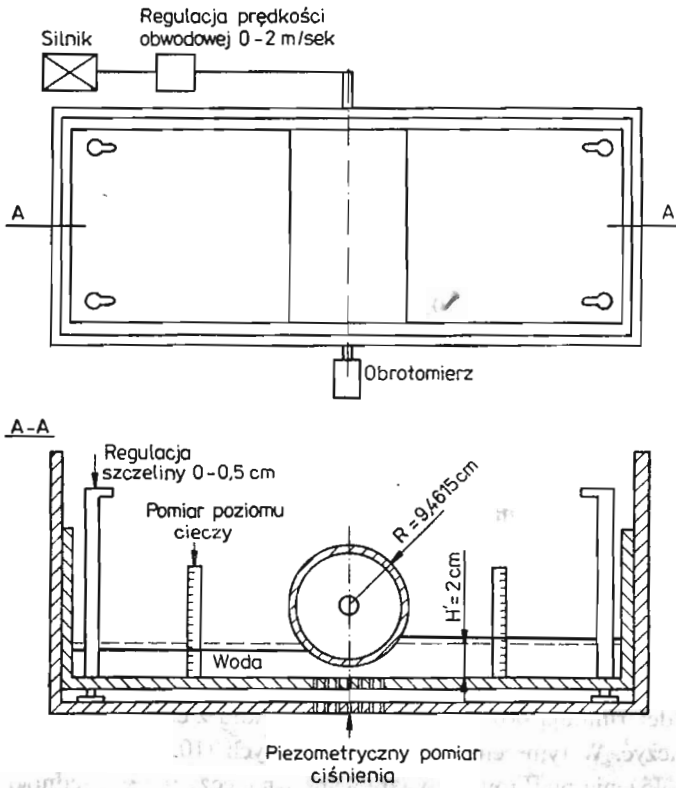
$$R, h_{min}, s, U, \quad (10.1)$$

oznaczające odpowiednio promień cylindra, minimalną szczelinę, grubość warstwy cieczy zagarnianej przez cylinder, prędkość obwodową cylindra. Warunki operacyjne (10.1) jednoznacznie determinują fazę oddziaływania cylindra z cieczą, którą w pierwszym kroku musimy wyznaczyć. W tym celu wychodząc z danych (10.1) określamy w oparciu o (9.4) maksymalne położenia punktów wpływu i wypływu cieczy  $\gamma_0, \gamma_1$ . Jednocześnie korzystając z rys. 2 badamy, czy aktualnie dana szczelina  $h_{min}$  (10.1) jest większa, czy mniejsza od szczeliny charakterystycznej  $h_{min}^0$ . Następnie zgodnie z nierównościami (9.3) obliczamy w oparciu o (9.2) prędkość przejściową  $U_p$  po to, by porównać ją z aktualnie daną prędkością  $U$  (10.1). Wynik porównania pozwala na mocy (6.8) zidentyfikować, określoną parametrami (10.1) fazę oddziaływania cylindra z cieczą, a następnie wybrać spośród związków (8.1), (8.2), (8.3) właściwy układ równań, który dołączony do zależności (7.9), (7.13) i (7.14) ostatecznie określi rozkład ciśnienia pod cylindrem, siłę nośną cylindra, moment obrotowy, a także położenie punktu wpływu i wypływu cieczy. Uzyskane wyniki teoretyczne zostały naniesione na rysunki 6 - 11.

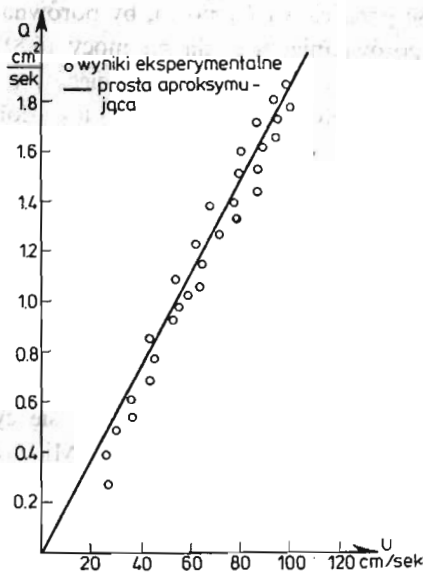
## 11. Eksperyment

Schemat eksperymentu oraz dane eksperymentalne pokazane są na rysunku 3. W celu zmierzenia średniego wydatku cieczy nad obracającym się cylindrem zatkało uszczelką gumową szczelinę między dnem naczynia, a cylindrem. Mierzono objętość wody transportowanej górną powierzchnią cylindra oraz czas transportu. Wyniki naniesiono na rys. 4. Wyznaczona z wykresu 4 średnia grubość warstwy cieczy przylegającej do wynurzonej powierzchni cylindra wyniosła w przybliżeniu:

$$s = 0.018 \text{ cm}. \quad (11.1)$$



Rys. 3. Schemat stanowiska eksperymentalnego.



Rys. 4. Średni wydatek cieczy transportowanej górną powierzchnią cylindra.

Przeprowadzono również eksperyment, w którym cienką warstwę cieczy zbierano z powierzchni obracającego się cylindra. Dla tego przypadku parametr  $s$  równał się:

$$s = 0 \text{ cm.} \quad (11.2)$$

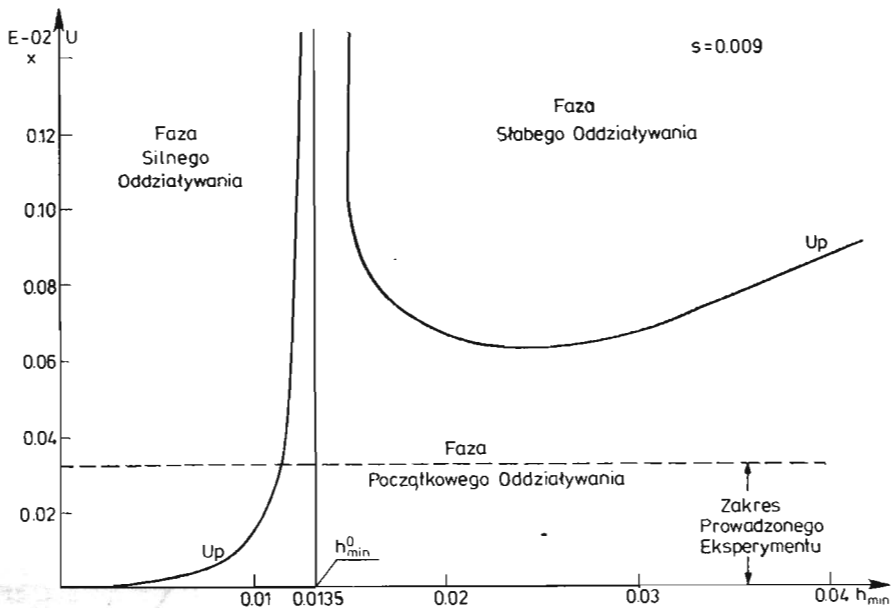
Doświadczenia przeprowadzono dla następujących parametrów wyjściowych:

$$H = 1, 2R = 9.4615. \quad (11.3)$$

określających średni poziom cieczy w naczyniu oraz średnicę cylindra. Wyniki eksperymentu zostały naniesione na rysunki 6 - 9.

## 12. Rezultaty

W ramach rozważanego modelu została wyznaczona teoretycznie i pokazana na rys. 2 szczelina charakterystyczna  $h_{min}^0$  w zależności od grubości warstwy przylegającej do górnej powierzchni obracającego się cylindra. Średni wydatek cieczy przenoszonej górami, mierzony eksperymentalnie dla różnych prędkości obrotowych cylindra pokazuje rys. 4. Dla niewielkich prędkości rzędu  $U < 20 \text{ cm/sek}$  zagarniana warstwa cieczy spływała z powrotem do naczynia. Nie była przenoszona na drugą stronę cylindra. Na rys. 5 naniesiono szczelinę

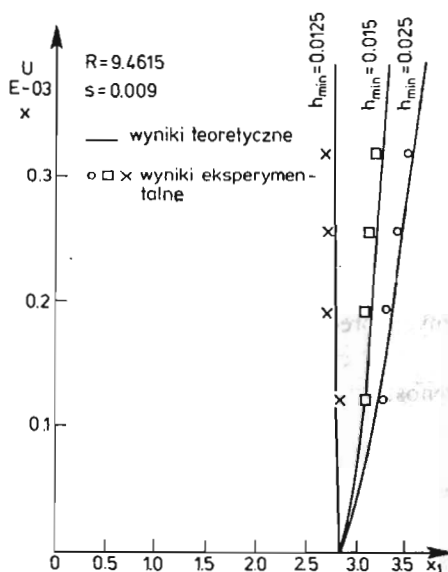


Rys. 5. Fazy oddziaływania obracającego się cylindra z warstwą cieczy.

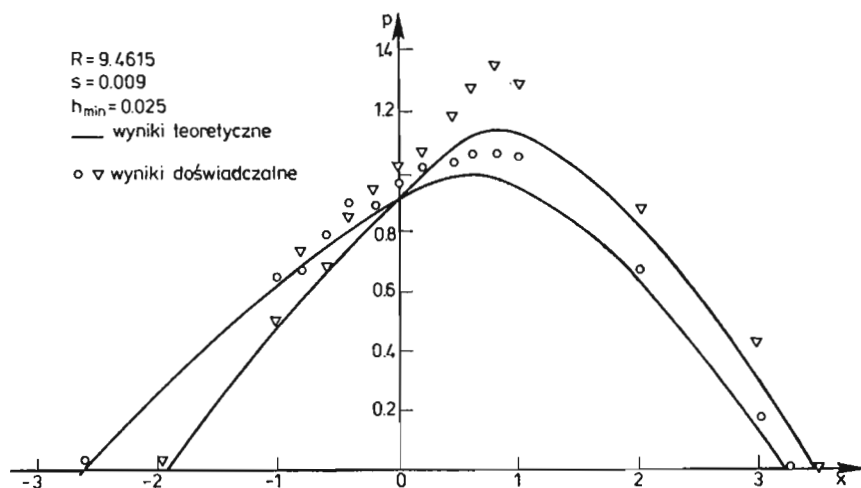
charakterystyczną  $h_{min}^0$  i prędkości przejściowe  $U_p$  obliczone teoretycznie dla warunków prowadzonego eksperymentu to znaczy dla  $2R = 9.4615$  i  $s = 0.009$ . W ten sposób otrzymaliśmy zakres parametrów  $U$ ,  $h_{min}$  określających poszczególne, wyróżnione w tej pracy, fazy oddziaływania obracającego się cylindra z warstwą cieczy. Na tle tych faz linią prze-

rywaną zaznaczono górny zakres prędkości  $U$ , jaką można było uzyskać w doświadczeniu. Nietrudno zauważyć, że w prowadzonym eksperymencie faza słabego oddziaływania cylindra z cieczą była niedostępna. Fazę tę można było uzyskać dopiero w warunkach całkowitego zgarniania cieczy z górnej powierzchni cylindra to znaczy dla  $s = 0$ .

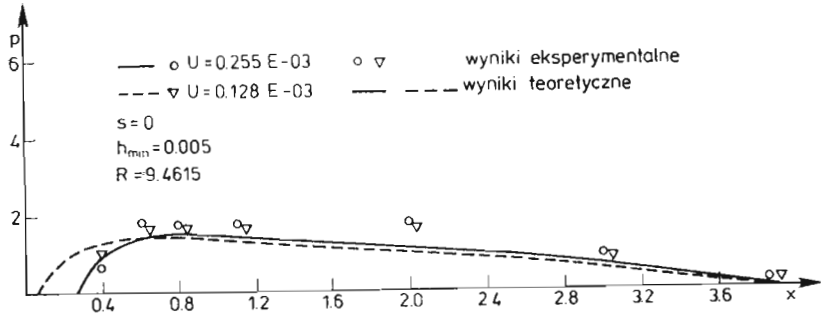
Na rysunkach 6, 7, 8, 9 przedstawiono wyniki, uzyskane teoretycznie i eksperymentalnie dotyczące: położenia punktu wypływu cieczy w zależności od prędkości obwodowe



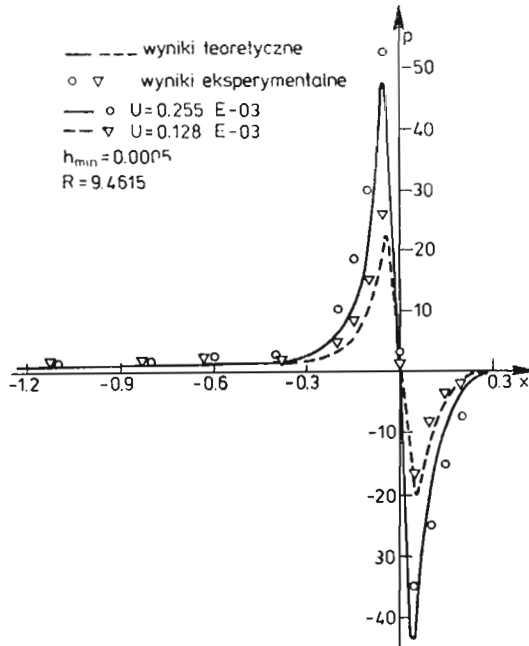
Rys. 6. Położenie punktu wpływu w zależności od prędkości obwodowej cylindra. Faza początkowego oddziaływania.



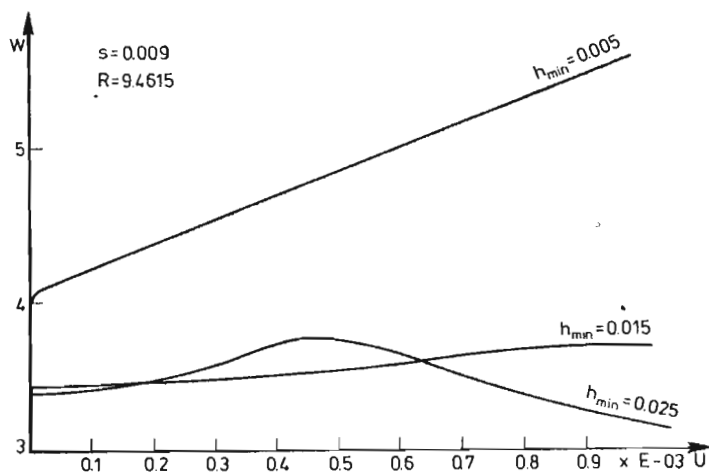
Rys. 7. Rozkład ciśnienia pod obracającym się cylindrem. Faza początkowego oddziaływania.



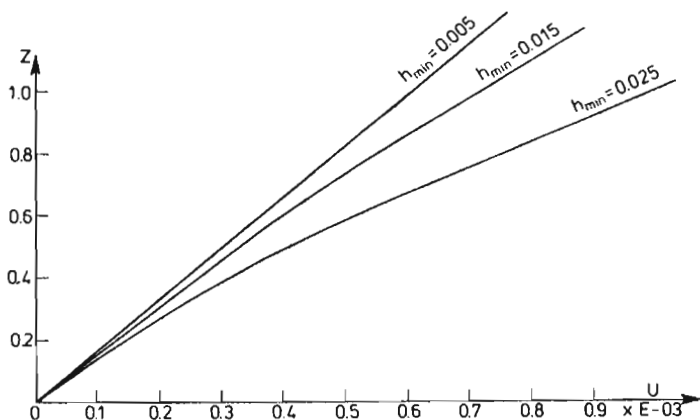
Rys. 8. Rozkład ciśnienia pod obracającym się cylindrem. Faza słabego oddziaływania.



Rys. 9. Rozkład ciśnienia pod cylindrem. Faza silnego oddziaływania.



Rys. 10. Siła nośna cylindra w zależności od prędkości obwodowej.



Rys. 11. Moment obrotowy w zależności od prędkości obrotowej.

cylindra oraz rozkładu ciśnień w warunkach początkowego, słabego i silnego oddziaływania cylindra z cieczą. Przykłady numerycznych obliczeń sił nośnych cylindra oraz momentów obrotowych pokazane są na rys. 10, 11. Z porównania wykresów 6 - 9 wynika zadowalająca zgodność wyników teoretycznych z eksperymentalnymi.

## 12. Wnioski

Wyniki teoretyczne i eksperymentalne uzyskane w ramach rozważanego w pracy modelu prowadzą do najważniejszych, następujących wniosków: 1) szczelina charakterystyczna zależy jedynie od grubości warstwy cieczy zagarnianej przez obracający się cylinder (rys. 3); 2) transport cieczy górną powierzchnią cylindra odbywający się w warunkach



szczeliny charakterystycznej lub większej od charakterystycznej jest w przybliżeniu proporcjonalny do prędkości obwodowej cylindra (rys. 4); 3) niezależnie od wielkości obrotów cylindra istnieją granice, których poziomy cieczy w naczyniu otwartym nie mogą przekroczyć (6.1); 4) w warunkach szczeliny większej od charakterystycznej oddziaływanie cylindra z cieczą jest słabe, rzędu ciśnienia hydrostatycznego (rys. 8); 5) w warunkach szczeliny mniejszej od charakterystycznej pojawiają się w bezpośrednim sąsiedztwie szczeliny minimalnej skoki ciśnień sprawiające, że oddziaływanie cylindra z cieczą jest silne (rys. 9); 6) w fazie początkowego i słabego oddziaływania siły grawitacji wpływają na położenie punktów wpływu i wypływu cieczy i nie można je pomijać (rys. 6), wydatek cieczy pod cylindrem dostosowuje się do wydatku nad cylindrem ( $8.1_1$ ), ( $8.2_1$ ); 7) w fazie silnego oddziaływania siły grawitacji są nieistotne i można je zaniedbać (rys. 9), wydatek cieczy nad cylindrem dostosowuje się do wydatku cieczy pod cylindrem.

#### 14. Końcowe uwagi

Zaletą rozważanego modelu oddziaływania warstwy jednorodnej cieczy newtonowskiej zalegającej dno naczynia otwartego z obracającym się sztywnym cylindrem jest jego prostota. Położenie punktów wpływu i wypływu cieczy, rozkład ciśnień pod cylindrem, siła nośna cylindra i moment obrotowy oddziaływujący na cylinder otrzymane zostały w stosunkowo prostej formie analitycznej. Natomiast niewątpliwą wadą proponowanego modelu jest niemożność ustalenia dokładnego zakresu stosowalności uzyskanych formuł. Warto również zaznaczyć, że wyniki tej pracy dotyczące fazy silnych oddziaływań dają się bez żadnych trudności zastosować do opisu procesu smarowania łożyska ślizgowego pracującego bez dostarczania cieczy smarującej z zewnątrz.

#### Literatura

1. A. CAMERON, *The principles of lubrication*, Logmans Green and Co LTD, 1966.
2. D. DOWSON, *Elastohydrodynamics lubrication*, Pergamon Press 1977.
3. D. DOWSON, *The inlet boundary condition*, Proc of the 1st Leed—Lyon Symposium 1974.
4. L. FLOBERG, *Lubrication of two cylindrical surfaces*, Transactions of Chalmers University of Technology, 234 No 14 Institute of Machine Elements, 1967.
5. H. M. MARTIN, *Lubrication of gear teeth*, Engineering, Lond., 102, 1916.
6. J. J. O'CONNOR, *Standart Handbook of Lubrication Engineering*, McGRAW-HILL 1968.
7. O. PINKUS, *Theory of Hydrodynamics Lubrication*, McGRAW-HILL 1961.
8. H. F. P. PURDAY, *Streamline Flow*, Constable, London 1949.
9. K. K. Y. WONG, J. S. KENNEDY, CZ. M. RODKIEWICZ, *On the localization of inlet boundary for hydrodynamically lubricated infinite cylinder rotating over a flat surface*, ASME Journ. of Trib., vol 107, No 3, April 1985.

#### Резюме

#### ДВУХМЕРНАЯ МОДЕЛЬ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ВРАЩАЮЩЕГОСЯ ЦИЛИНДРА СО СЛОЕМ НЬУТОНОВСКОЙ ЖИДКОСТИ

Предложена простая модель взаимодействия частично погруженного, вращающегося цилиндра со слоем ньютоновской жидкости над дном открытого сосуда. Эта модель даёт аналитические соотношения для определения давления под цилиндром, подъёмной силы и углового момента

действующих на цилиндр. Распределения давлений под цилиндром и местоположения притока и оттока жидкости, рассчитаны теоретически, были сравнены с экспериментом и получено достаточно хорошие совпадение.

### S u m m a r y

#### TWO DIMENSIONAL MODEL OF ROTATING CYLINDER AND NEWTONIAN FLUID LAYER INTERACTION

Two dimensional model describing mutual interaction between partly submerged, rotating cylinder and a layer of newtonian fluid occupying the bottom of an open tank is formulated. Basing on this model pressure distribution the lift force and torque acting on cylinder are obtained. Pressure distribution and outlet position, calculated theoretically, have been verified experimentally. A good agreement between the theory and experiment has been obtained.

*Praca wpłynęła do Redakcji dnia 3 lutego 1988 roku.*

---