MECHANIKA
TEORETYCZNA
I STOSOWANA
3, 27, (1989)

OPTYMALNE KSZTAŁTOWANIE ELEMENTÓW NOŚNYCH MASZYN Z UWZGLĘDNIENIEM WARUNKÓW LOKALNEJ SZTYWNOŚCI

ANTONI JAKUBOWICZ
JÓZEF KAPŁANEK
GABRIEL WRÓBEL

Politechnika Śląska, Gliwice

Praca zawiera podstawy teoretyczne oraz przykład zastosowania metody optymalnego kształtowania ustrojów nośnych przy warunku pobocznym lokalnej sztywności. Zadanie optymalizacji może być sformułowane jako zadanie minimalizacji masy ustroju przy zachowaniu stałej energii sprężystego odkształcenia postaciowego lub zadanie minimalizacji energii odkształcenia sprężystego przy zachowaniu stałej masy. Warunek poboczny stanowi ograniczenie wartości bezwzględnych lub względnych przemieszczeń wybranych punktów obszaru ustroju w warunkach odkształcenia sprężystego.

1. Wstęp

W dotychczasowych pracach poświęconych zastosowaniu twierdzenia Wasiutyńskiego o wyrównanym potencjale sprężystym [1, 2] i metody elementów skończonych do optymalnego kształtowania ustrojów nośnych [3, 4, 5, 6, 7] przedstawiony zakres opracowań teoretycznych, jak też szczegółowych rozwiązań technicznych zawężony był do przypadków, w których warunki ograniczające narzucały określone wartości energii odkształcenia lub masy ustroju oraz wybranych parametrów geometrycznych jego obszaru. Z tego punktu widzenia zawarta w pracy [5] oraz w niniejszym artykule propozycja autorów rozszerzenia zakresu zastosowań metody oraz opracowanych na jej podstawie procedur numerycznych do kształtowania ustrojów z uwzględnieniem warunków pobocznych dotyczących wartości wybranych przemieszczeń uogólnionych optymalizowanego ustroju w warunkach deformacji stanowi istotne rozwinięcie stosowanej metody, zarówno pod względem teoretycznym, jak też pod względem jej użyteczności technicznej.

2. Podstawy teoretyczne procedury optymalnego kształtowania ustrojów nośnych z uwzględnieniem warunku lokalnej sztywności

Zagadnienie doboru optymalnego kształtu ustroju nośnego sformułowane w pracach [1, 2, 3] zostało ujęte następująco:

Znaleźć w obszarze Ω ciała obciążonego siłami zewnętrznymi o danym rozkładzie $P_i(r)$, $i = 1, 2, \ldots, w$ (w — liczba współrzędnych sił uogólnionych stosowna do typu układu sprężystego — np. dla tarczy i płyty $w = 3$, dla układu przestrzennego $w = 6$) rozkład gęstości masy $\varrho(r)$, dla którego całka:

$$U = \int_{\Omega} u(r) d\Omega, \tag{1}$$

gdzie $u(r)$ jest funkcją gęstości energii odkształcenia ciała, przyjmuje wartość minimalną, przy jednoczesnym spełnieniu warunku:

$$M = \int_{\Omega} \varrho(r) d\Omega = \text{const}. \tag{2}$$

Zadanie to z punktu widzenia rachunku wariacyjnego stanowi tzw. zadanie izoperymetryczne, dla którego równoważnym jest zadanie poszukiwania minimum funkcjonału [4]:

$$F = \int_{\Omega} [u(r) + \lambda \varrho(r)] d\Omega, \tag{3}$$

gdzie λ jest mnożnikiem Lagrange'a.
Zastosowanie MES do modelowania optymalizowanego ustroju prowadzi do przedstawienia gęstości energii odkształcenia u i gęstości masy ϱ jako funkcji wektora gęstości (grubości, pól przekrojów) w poszczególnych elementach skończonych modelu:

$$u = u(v, r), \qquad \varrho = \varrho(v, r). \tag{4}$$

Wobec znacznej liczby K parametrów v_k, $k = 1, 2, \ldots, K$ zadanie minimalizacji funkcjonału (2) metodami rachunku wariacyjnego jest praktycznie nierozwiązalne — choćby ze względu na trudność w określeniu funkcyjnej postaci wielkości $u(v, r)$. Wskazany sposób rozwiązania zadania optymalizacyjnego bazuje na twierdzeniu Wasiutyńskiego przyjętym za podstawę procedury numerycznego poszukiwania optymalnego rozkładu gęstości masy jako takiego, któremu odpowiada wyrównany potencjał odkształcenia w obszarze ciała.

W niniejszej pracy pokazana zostanie możliwość wykorzystania analogicznej procedury optymalizacyjnej do zadania optymalnego kształtowania ustroju nośnego przy nałożonych warunkach pobocznych dotyczących lokalnej sztywności kształtowanego ustroju. Przez wymóg lokalnej sztywności rozumiany będzie warunek ograniczający przemieszczenie uogólnione δ_i wybranego punktu kształtowanego obszaru:

$$\delta_i \leqslant \delta_0. \tag{5}$$

Wobec tego, że przemieszczenie δ_i można wyrazić za pomocą energii odkształcenia ciała w sposób następujący:

$$\delta_i = \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial P_i} d\Omega, \tag{6}$$

warunek (5) przyjmuje w granicznym przypadku postać:

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial P_i} d\Omega = \delta_0, \tag{7}$$

gdzie P_i jest siłą uogólnioną odpowiadającą przemieszczeniu δ_i — jeżeli taka siła w układzie nie występuje P_i oznacza siłę wprowadzoną o wartości zero.

Biorąc pod uwagę zadanie minimalizacji funkcjonału (1) przy ograniczeniach (2) oraz (7) jest ono równoważne zadaniu minimalizacji funkcjonału:

$$K = \int_{\Omega} [u(r) + P^* \frac{\partial u(r)}{\partial P_i} + \lambda \varrho(r)] d\Omega, \tag{8}$$

w którym λ i P^* to mnożniki Lagrange'a.

Wyrażając energię odkształcenia sprężystego ciała w postaci jednorodnej kwadratowej funkcji obciążeń funkcjonałowi K nadamy postać:

$$K = \frac{1}{2} \sum_{j,k} \delta_{jk} P_j P_k + P^* \sum_{k} \delta_{ik} P_k + \lambda \int_{\Omega} \varrho(r) d\Omega, \tag{9}$$

a przekształcając otrzymamy kolejno:

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{2} \sum_{j,k} \delta_{jk} P_j P_k + \frac{1}{2} \sum_{k} P^* \delta_{ik} P_k + \frac{1}{2} \sum_{k} P^* \delta_{ik} P_k + \lambda \int_{\Omega} \varrho(r) d\Omega, \\ K &= \frac{1}{2} \sum_{j,k} \delta_{jk} P_j P_k + \frac{1}{2} \sum_{k} P_k \delta_{ik} P^* + \frac{1}{2} \sum_{k} P^* \delta_{ki} P_k + \lambda \int_{\Omega} \varrho(r) d\Omega. \end{aligned} \tag{9'}$$

Pierwsze trzy człony znajdujące się po prawej stronie wyrażenia (9') można interpretować — jak to wynika z ich postaci — jako energię odkształcenia analizowanego układu pod działaniem układu sił zewnętrznych P_j uzupełnionego o siłę P^* odpowiadającą przemieszczeniu uogólnionemu δ_i, na które nałożone zostało ograniczenie (5). Siła P^* jest zatem fizykalną interpretacją mnożnika Lagrange'a z zastępczego zadania minimalizacji funkcjonału (6). Dzięki takiej interpretacji zadanie minimalizacji funkcjonału (9') można traktować jako zadanie minimalizacji potencjału odkształcenia sprężystego układu zastępczego — z dołączoną siłą uogólnioną P^* odpowiadającą ograniczonej współrzędnej — przy zachowaniu warunku stałej masy układu.

Jest to zatem zadanie analogiczne do rozwiązywanego uprzednio za pomocą procedury opartej na twierdzeniu Wasiutyńskiego.

Do rozwiązania zadania optymalizacji kształtu ciała przy ograniczeniu przemieszczenia wybranego punktu można wykorzystać tę samą procedurę jak dla układu bez ograniczeń. Wartość wprowadzonej do układu siły P^* ustala się z warunku (7) — przyjmuje się najmniejszą z wartości prowadzących do spełnienia tego warunku przez przemieszczenie δ_i w układzie ukształtowanym po odjęciu siły P^*.

Powyższym wnioskom można nadać formę twierdzenia:

Twierdzenie 1. Ustrojem nośnym o danej masie M i określonym układzie obciążeń zewnętrznych, charakteryzującym się największą sztywnością (najmniejszą energią odkształcenia sprężystego), spełniającym warunek:

$$\delta_i \leqslant \delta_0,$$

gdzie δ_i jest współrzędną uogólnioną przemieszczenia ustalonego punktu ustroju, jest ustrój o największej sztywności poddany zastępczemu układowi obciążeń.
Zastępczy układ obciążeń jest to rzeczywisty układ obciążeń uzupełniony o siłę uogólnioną P^* odpowiadającą ograniczonemu przemieszczeniu o najmniejszej wartości, jaka prowadzi do spełnienia warunku lokalnej sztywności w ustroju optymalnym po odjęciu siły P^*.

W przypadku, gdy warunek lokalnej sztywności dotyczy względnego przemieszczenia pary punktów układu:

$$\delta_i - \delta_j \leqslant \delta_0, \tag{10}$$

korzystając z zależności (6) warunkowi (10) można nadać postać):

$$\int_\Omega \left(\frac{\partial u}{\partial P_i} - \frac{\partial u}{\partial P_j}\right) d\Omega \leqslant \delta_0. \tag{11}$$

Prowadzi to do zadania minimalizacji funkcjonału:

$$K = \int_\Omega [u(r) + P^* \left(\frac{\partial u(r)}{\partial P_i} - \frac{\partial u(r)}{\partial P_j}\right) + \lambda \varrho(r)] d\Omega, \tag{12}$$

w którym P^* i λ mają znaczenie jak w wyrażeniu (8). Podstawiając energię odkształcenia w postaci funkcji sił zewnętrznych otrzymamy:

$$K = \frac{1}{2} \sum_{k,l} \delta_{kl} P_k P_l + P^* \left(\sum_k \delta_{ik} P_k - \sum_j \delta_{jk} P_k\right) + \lambda \int_\Omega \varrho(r) d\Omega, \tag{13}$$

a po przekształceniach:

$$K = \frac{1}{2} \sum_{k,l} \delta_{kl} P_k P_l + \frac{1}{2} P^* \sum_k \delta_{ik} P_k + \frac{1}{2} \sum_k \delta_{kl} P^* P_k + \frac{1}{2} (-P^*) \sum_k \delta_{jk} P_k +$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_k \delta_{kj} (-P^*) P_k + \lambda \int_\Omega \varrho(r) d\Omega. \tag{13'}$$

Postać funkcjonału K pozwala na jego interpretację jako odnoszącego się do układu wolnego od warunku lokalnej sztywności w postaci (10) poddanego jednak zastępczemu układowi obciążeń. Układ ten stanowi rzeczywiste obciążenie kształtowanego ustroju uzupełnione o parę sił uogólnionych P^* oraz $(-P^*)$ przyłożonych w punktach, których przemieszczenie względne podlega ograniczeniu i stosowne do rodzaju tego przemieszczenia. Wartość tych sił będących fizykalną interpretacją mnożnika Lagrange'a z wyrażenia (12), można wyznaczyć z warunku (10) — jest to najmniejsza z wartości P^*, dla której warunek (10) jest spełniony w ukształtowanym ustroju pod obciążeniem rzeczywistym.

Twierdzenie 2. Ustrojem nośnym o danej masie M i określonym układzie obciążeń zewnętrznych, charakteryzującym się największą sztywnością, spełniającym warunek:

$$\delta_i - \delta_j \leqslant \delta_0,$$

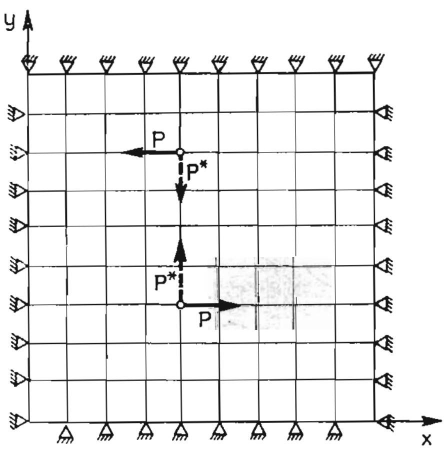
jest ustrój o największej sztywności poddany zastępczemu układowi obciążeń.

Zastępczy układ obciążeń stanowi w tym przypadku rzeczywisty układ obciążeń uzupełniony o parę sił uogólnionych P^*, $(-P^*)$ odpowiadających przemieszczeniom, których różnica podlega ograniczeniu i o wartości, jaka prowadzi do spełnienia warunku lokalnej sztywności w ustroju optymalnym po odjęciu sił P^*.

W przypadku większej liczby warunków ograniczających postaci (5) lub (10) zachodzi możliwość rozszerzenia przedstawionej interpretacji postępowania optymalizacyjnego przez stosowanie w procedurze kształtowania zastępczych układów obciążenia zawierających odpowlednie siły uogólnione, których wartości możliwe są do wyznaczenia z warunków ograniczających, jakie ma spełniać kształtowany ustrój nośny. Opisany sposób postępowania optymalizacyjnego mający za podstawę twierdzenia 1 i 2 oraz procedurę kształtowania opartą na twierdzeniu Wasiutyńskiego swą ogólnością obejmuje dowolne typy ustrojów sprężystych — prętowe, tarczowe, płytowe, płaskie i przestrzenne.

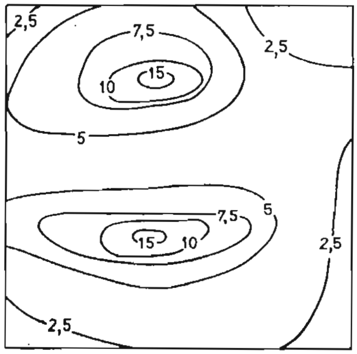
3. Przykład

Kształtowaniu na największą sztywność poddano ściankę stalowej obudowy jednostopniowej przekładni zębatej o zębach prostych w zakresie odkształceń sprężystych. Ścianka o wymiarach 900×900 mm ma założoną początkowo stałą grubość wynoszącą 5 mm. Ściankę zamodelowano siatką elementów skończonych rozpiętą na 100 węzłach. Brzegi takiej płaskiej tarczy zamocowane zostały w kierunkach osi x i y (rys. 1). Jako obciążenie przyjęto siłę międzyzębną przeniesioną na ściankę w miejscu łożyskowania wałków. W odpowiednich węzłach ścianki obudowy założono przeciwnie zwrócone siły o wartościach $P = 9.5$ kN. Kształtowanie odbywa się iteracyjnie przy założeniu stałej



Rys. 1. Siatka elementów skończonych ścianki przekładni zębatej wraz z obciążeniem rzeczywistym P i dodatkowym P^*

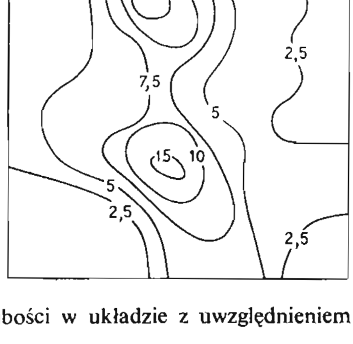
masy tworzywa przez przenoszenie małych objętości tworzywa z elementów o potencjale niższym od średniego do elementów o potencjałach sprężystych wyższych. W pierwszym etapie kształtowania był to jedyny układ sił działających na tarczę. W wyniku kształtowania na największą sztywność uzyskano po 20-tu iteracjach rozkład grubości ścianki pokazany na rys. 2.



Rys. 2. Izolinie grubości w układzie bez uwzględnienia lokalnej sztywności

Całkowita energia sprężysta układu zmalała z wartości początkowej $U_0 = 8210$ kNmm do $U_{k1} = 4980$ kNmm. Przemieszczenie względne w kierunku osi y węzłów, które odpowiadają łożyskowaniu wałków przekładni wynosi $\Delta w_1 = 0{,}81$ mm. Ze względu na prawidłową pracę przekładni założono, że maksymalne przemieszczenie tych węzłów nie może być większe niż 0,2 mm. Ponieważ w ukształtowanej ściance przemieszczenie to jest większe niż kryterialne w układzie pomiędzy analizowanymi węzłami założono dodatkowe siły P^*.

Wielkość tych sił musi być iteracyjnie tak dobrana, aby spełnić kryterium lokalnej sztywności nieprzekroczenia dopuszczalnych przemieszczeń. W przykładzie warunek ten jest spełniony dla sił o wartości $P^* = 7{,}5$ kN. Na rysunku 3 pokazano za pomocą izolinii rozkład grubości w mm w ściance przekładni z uwzględnieniem warunku lokalnej sztywności. Przy takim rozkładzie tworzywa całkowita energia sprężysta jest nieco wyższa niż w układzie kształtowanym bez sił P^* i wynosi $U_{k2} = 5010$ kNmm, zaś analizowane prze-



Rys. 3. Izolinie grubości w układzie z uwzględnieniem lokalnej sztywności

mieszczenie węzłów wynosi $\Delta w_2 = 0{,}17$ mm. Na rysunkach pokazujących izolinie grubości ścianki w obu przykładach widoczne są istotne różnice. W pierwszym przypadku rozkład ten wskazuje na wzmocnienie ścianki w okolicy łożyskowania wałków na kierunku osi x, zaś w drugim na ewentualne zgrubienia (żebra) o kierunku osi y. Uzyskane wyniki mogą być wskazówką dla projektanta odnośnie kierunków i rozkładów użebrowań wzmacniających ściankę. Należy przy tym zwrócić uwagę na fakt, że uzyskąna postać konstrukcyjna jest optymalna w zakresie odkształceń sprężystych. W przypadku przekroczenia tego zakresu należy zwiększyć odpowiednio grubości bez zmiany kształtu.

Literatura

1. Z. WASIUTYŃSKI, *Pisma II*, PWN, Warszawa 1978.
2. M. BRANDT — praca zb., *Kryteria i metody optymalizacji konstrukcji*, PWN, Warszawa 1977.
3. A. JAKUBOWICZ, J. KAPŁANEK, G. WRÓBEL, *Zastosowanie MES do kształtowania ustrojów o największej sztywności*, VIII Konferencja Metody Komputerowe w Mechanice Konstrukcji, Warszawa 1987.
4. A. JAKUBOWICZ i inni, *Komputerowe generowanie postaci części maszyn optymalnych ze względu na wybrane kryteria optymalizacji*, Sprawozdanie z pracy NB-147/RMT-4/86, Politechnika Śl., Gliwice 1986.
5. A. JAKUBOWICZ, A. JOHN, J. KAPŁANEK, G. WRÓBEL, *Komputerowe generowanie postaci części maszyn optymalnych ze względu na wybrane kryteria optymalizacji*, Sprawozdanie z pracy NB-256/RMT-4/87, Politechnika Śl., Gliwice 1987.
6. J. KAPŁANEK, *Kształtowanie płaskich ustrojów nośnych o największej sztywności*, Mechanika Teoretyczna i Stosowana, Z. 2/3, 21, Warszawa 1983.
7. J. KAPŁANEK, *Kształtowanie płaskich ustrojów nośnych o największej sztywności*, Rozprawa doktorska Gliwice 1982.

Р е з ю м е

ОПТИМАЛЬНОЕ ФОРМИРОВАНИЕ УПРУГИХ СИСТЕМ ПРИ УСЛОВИИ ЛОКАЛЬНОЙ ЖЁСТКОСТИ

В работе обсуждены теоретические принципы и пример реализации метода оптимизации формы упругих систем при условии локальной жёсткости. Проблему оптимизации можно формулировать как задачу минимизации массы тела при постоянной энергии упругой деформации или как задачу минимизации энергии упругой деформации при постоянной массе. Условие локальной жёсткости представляеться как ограничение относительных перемещений некоторых пунктов системы при упругой деформации.

S u m m a r y

OPTIMAL FORMING LOAD-CARRYING ELEMENTS OF MACHINES WITH SIDE-CONDITION OF LOCAL RIGIDITY

The research contains theoretical basis and an example of the application of optimal forming the load-carrying structures method with the side-condition of local rigidity. The optimalization task may be formulated as that of the minimalization of the mass of the structure for the conservation of constant elastic strain energy or as minimalization of elastic strain energy for the conservation of constant mass. The side-condition is limiting absolute values or relative shifts of chosen points of the structure at elastic strain conditions.

Praca wpłynęła do Redakcji dnia 25 kwietnia 1988 roku.