

STATECZNOŚĆ OSIOWO ŚCISKANYCH CYLINDRYCZNYCH POWŁOK DWUWARSTWOWYCH

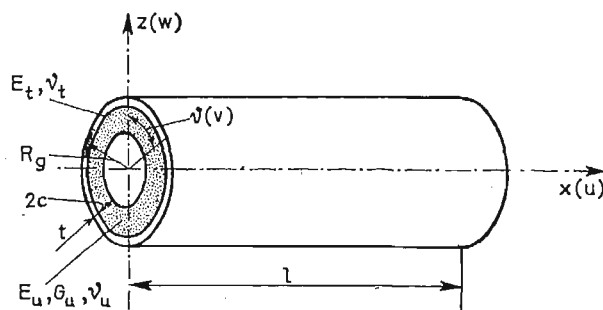
FRANCISZEK ROMANÓW
STEFAN DZIELENDZIAK

Politechnika Wroclawska

1. Wstęp

Dotychczasowe metody obliczania obciążeń krytycznych powłok dwuwarstwowych pokrywają się ze znanymi metodami dotyczącymi konstrukcji przekładkowych. Ogólnie można je podzielić na dwie grupy. Pierwsza z nich dotyczy konstrukcji cienkich, dla których zakłada się nieodkształcalność rdzenia w kierunku poprzecznym. Oznacza to, że moduł Younga w tym kierunku jest nieskończenie duży a przemieszczenie poprzeczne rdzenia jest równe przemieszczeniu okładziny [1, 2]. Druga grupa to prace, w których moduł rdzenia w kierunku poprzecznym jest skończony a przemieszczenia są nieliniowymi funkcjami. Zagadnienie stateczności cylindrycznych powłok dwuwarstwowych w tym ujęciu analizowano w pracach [3, 7]. W pierwszej z nich wykorzystano równania równowagi okładziny uzupełnione o siły wynikające z oddziaływania rdzenia na okładzinę. W drugiej autorzy posłużyli się modelem zbliżonym do sprężystego podłoża typu Winklera, wprowadzając tzw. współczynnik podłoża, uwzględniający jedynie składową promieniową reakcji rdzenia na okładzinę. Otrzymany w ten sposób warunek wyboczenia nie uwzględnia wpływu grubości rdzenia na wielkość obciążeń krytycznych.

Niniejsze opracowanie zawiera analizę trójosiowego stanu przemieszczeń w wypełniaczu powłoki dwuwarstwowej. Rozpatrywany cylinder warstwowy (rys. 1) składa się



Rys. 1. Cylinder dwuwarstwowy

z cienkiej powłoki zewnętrznej (okładziny) i sprężystego wypełniacza (rdzenia). Okładzina spełnia założenia dwuwymiarowej teorii powłok, rdzeń (pełny lub rurowy) założenia teorii trójwymiarowej.

Założono, że obciążenie zewnętrzne przyłożone jest jedynie do okładziny, moduł Younga rdzenia jest znacznie mniejszy od modułu okładziny ($E_u \ll E_l$) oraz, że podczas odkształcenia nie ma ruchu względnego pomiędzy obydwiema warstwami. Dopuszczono możliwość niesprężystego wybożenia okładziny. Zastosowano związki fizyczne teorii małych odkształceń sprężysto-plastycznych Henck'y-Iljuszyna pomijając efekt odciążenia części przekroju i przesunięcia osi obojętnej. Przyjęto warunek nieściśliwości ($\nu_l = 0,5$).

Dla tak określonego modelu wyznaczono funkcje przemieszczeń w rdzeniu. Z zasady prac wirtualnych wyprowadzono równania równowagi i zespół naturalnych warunków brzegowych. W oparciu o otrzymane rozwiązanie analityczne obliczono obciążenia krytyczne dla osiowo ściskanego cylindra z pełnym rdzeniem. Rozpatrzono stosunkowo prosty przypadek wybożenia osiowo-symetrycznego. Rozwiązanie teoretyczne porównano z wynikami badań doświadczalnych.

2. Przemieszczenia

2.1. Przemieszczenia okładziny. Zgodnie z przyjętymi założeniami stan przemieszczeń okładziny jest zgodny z hipotezą prostych normalnych Kirchhoffa-Love'a. Przemieszczenia w kierunkach x , ϑ , z , dowolnego punktu okładziny, oddalonego o $z - R_g$ od powierzchni środkowej mają postać:

$$\begin{aligned} u_g &= u - (z - R_g)w_{,x}, \\ v_g &= v - (z - R_g)(w_{,\vartheta} - v) \frac{1}{R_g}, \\ w_g &= w. \end{aligned} \quad (1)$$

2.2. Trójosiowy stan przemieszczeń rdzenia. Rdzeń konstrukcji znajduje się w trójosiowym stanie przemieszczenia. W ogólnym przypadku przemieszczenia rdzenia w kierunku osiowym, obwodowym i promieniowym są funkcjami trzech zmiennych x , ϑ , z i nie są znane:

$$\begin{aligned} U_u &= U_u(x, \vartheta, z), \\ V_u &= V_u(x, \vartheta, z), \\ W_u &= W_u(x, \vartheta, z). \end{aligned} \quad (2)$$

Mamy więc do czynienia z trójwymiarowym zadaniem teorii sprężystości. Przedstawienie przemieszczeń składowych (2) jako iloczynów przemieszczeń okładziny w punktach styku obydwu warstw (tj. dla $z = R_g - \frac{t}{2}$) i pewnych nieliniowych funkcji zmiennej t pozwala na rozdzielenie zmiennych a w rezultacie na sprowadzenie zadania trójwymiarowego do dwuwymiarowego:

$$\begin{aligned}
 U_u &= u_\theta \left(z = R_\theta - \frac{t}{2} \right) \cdot \delta(z), \\
 V_u &= v_\theta \left(z = R_\theta - \frac{t}{2} \right) \cdot \varkappa(z), \\
 W_u &= w_\theta \left(z = R_\theta - \frac{t}{2} \right) \cdot \varphi(z).
 \end{aligned}
 \tag{3}$$

Nieznane funkcje $\delta(z)$, $\varkappa(z)$, $\varphi(z)$ można wyznaczyć z warunków równowagi wewnętrznej elementarnego wycinka rdzenia:

$$\begin{aligned}
 \nabla^2 U_u + \frac{1}{1-2\nu_u} \Theta_{,x} &= 0, \\
 \nabla^2 V_u + \frac{1}{1-2\nu_u} \frac{1}{z} \Theta_{,\theta} + \frac{2}{z^2} W_{u,\theta} - \frac{V_u}{z^2} &= 0, \\
 \nabla^2 W_u + \frac{1}{1-2\nu_u} \Theta_{,z} - \frac{2}{z^2} V_{u,\theta} - \frac{W_u}{z^2} &= 0,
 \end{aligned}
 \tag{4}$$

gdzie:

$$\begin{aligned}
 \nabla^2 &= (\dots)_{,xx} + \frac{1}{z^2} (\dots)_{,\theta\theta} + (\dots)_{,zz} + \frac{1}{z} (\dots)_{,z}, \\
 \Theta &= U_{u,x} + \frac{1}{z} V_{u,\theta} + \frac{1}{z} W_u + W_{u,z}.
 \end{aligned}$$

Podstawiając równania (3) do (4) otrzymujemy warunki równowagi wewnętrznej rdzenia w postaci:

$$\begin{aligned}
 (a_1 \delta)_{,zz} + \frac{1}{z} (a_1 \delta)_{,z} + (1+c^*)(a_1 \delta)_{,xx} + \frac{1}{z^2} (a_1 \delta)_{,\theta\theta} + \\
 + c^* \frac{1}{z} (b_1 \varkappa)_{,x\theta} + c^* \frac{1}{z} (w \cdot \varphi)_{,x} + c^* (w \cdot \varphi)_{,xz} &= 0, \\
 (b_1 \varkappa)_{,zz} + \frac{1}{z} (b_1 \varkappa)_{,z} + (b_1 \varkappa)_{,xx} + (1+c^*) \frac{1}{z^2} (b_1 \varkappa)_{,\theta\theta} + \\
 - (b_1 \varkappa) \frac{1}{z^2} + c^* \frac{1}{z} (a_1 \delta)_{,x\theta} + c^* \frac{1}{z} (w \cdot \varphi)_{,\theta z} + \\
 + \frac{1}{z^2} (2+c^*) (w \cdot \varphi)_{,\theta} &= 0, \\
 (w \cdot \varphi)_{,zz} (1+c^*) + \frac{1}{z} (w \cdot \varphi)_{,z} \cdot (1+c^*) + (w \cdot \varphi)_{,xx} + \\
 + \frac{1}{z^2} (w \cdot \varphi)_{,\theta\theta} - \frac{1}{z^2} (w \cdot \varphi) + c^* (a_1 \delta)_{,xz} + c^* \frac{1}{z} (b_1 \varkappa)_{,\theta z} + \\
 - \frac{1}{z^2} (2+c^*) (b_1 \varkappa)_{,\theta} &= 0,
 \end{aligned}
 \tag{5}$$

gdzie:

$$a_1 = u + \frac{t}{2} w_{,x},$$

$$b_1 = v + \frac{t}{2} (w_{,\vartheta} - v) \frac{1}{R_g}.$$

Są to równania różniczkowe drugiego rzędu o pochodnych cząstkowych zmiennych x, ϑ, z . Rozwiązanie powyższych równań ze względu na funkcje $\delta = \delta(z)$, $\kappa = \kappa(z)$, $\varphi = \varphi(z)$ staje się możliwe dopiero po przyjęciu postaci funkcji u, v, w zmiennych x i ϑ . Funkcje te muszą być tak dobrane, aby spełniały warunki podparcia cylindrów na ich końcach. Do wyznaczenia stałych całkowania niezbędne są również warunki brzegowe jakie muszą spełniać funkcje $\delta(z)$, $\kappa(z)$, $\varphi(z)$. Z równości przemieszczeń okładziny i rdzenia na powierzchni ich połączenia, tj. dla $z = R_g - \frac{t}{2}$ wynikają związki:

$$\delta\left(R_g - \frac{t}{2}\right) = \kappa\left(R_g - \frac{t}{2}\right) = \varphi\left(R_g - \frac{t}{2}\right) = 1. \quad (6)$$

W dalszym ciągu założymy swobodne podparcie obciążonych brzegów powłoki. Odpowiada to następującym warunkom brzegowym dla $x = 0$ i $x = 1$: $w = 0$ — zerowe ugięcie; $w_{,xx} + \nu_t w_{,\vartheta\vartheta} \frac{1}{R_g^2} = 0$ — zerowy moment gnący. Powyższe warunki spełniają przemieszczenia okładzin w postaci:

$$\begin{aligned} u &= A \cdot \cos(\beta x) \cdot \sin(n\vartheta), \\ v &= B \cdot \sin(\beta x) \cdot \cos(n\vartheta), \\ w &= E \cdot \sin(\beta x) \cdot \sin(n\vartheta). \end{aligned} \quad (7)$$

Odpowiada to założeniu, że powierzchnia wybożenia cylindra składa się z m półfal w kierunku osiowym oraz $2n$ półfal w kierunku obwodowym.

Podstawiając wyrażenia (7) do równań (5) i wprowadzając oznaczenia $\Delta = r\delta(z)$, $\mathcal{K} = p\kappa(z)$, $\Phi = E\varphi(z)$ otrzymujemy układ równań jedynie ze względu na funkcje Δ , \mathcal{K} , Φ zmiennej z . Całkami ogólnymi tego układu są funkcje:

$$\begin{aligned} \Delta &= c_1 \beta I_n(\beta z) + c_2 \beta K_n(\beta z) + c_3 \beta z I_{n+1}(\beta z) + c_4 \beta z K_{n+1}(\beta z) + \\ &\quad + c_5 \beta z I_{n-1}(\beta z) + c_6 \beta z K_{n-1}(\beta z), \\ \mathcal{K} &= c_1 \frac{n}{z} I_n(\beta z) + c_2 \frac{n}{z} K_n(\beta z) + c_3 (n+2\alpha) I_{n+1}(\beta z) + \\ &\quad + c_4 (n+2\alpha) K_{n+1}(\beta z) + c_5 (n-2\alpha) I_{n-1}(\beta z) + c_6 (n-2\alpha) K_{n-1}(\beta z), \\ \Phi &= c_1 I'_n(\beta z) + c_2 K'_n(\beta z) + c_3 [z I'_{n+1}(\beta z) - (2\alpha-1) I_{n+1}(\beta z)] + \\ &\quad + c_4 [z K'_{n+1}(\beta z) - (2\alpha-1) K_{n+1}(\beta z)] + c_5 [z I'_{n-1}(\beta z) + \\ &\quad - (2\alpha-1) I_{n-1}(\beta z)] + c_6 [z K'_{n-1}(\beta z) - (2\alpha-1) K_{n-1}(\beta z)], \end{aligned} \quad (8)$$

gdzie: $\alpha = 2(1-\nu_u)$.

$I_n(\beta z)$, $K_n(\beta z)$ są odpowiednio zmodyfikowaną f -cją Bessela pierwszego rodzaju i f -cją Mac Donalda rzędu n , przy czym:

$$I_n'(\beta z) = \frac{d}{dz} I_n(\beta z), \text{ itd.}$$

Stałe całkowania c_1, \dots, c_6 należy wyznaczyć z warunków brzegowych. Trzy z nich określone są warunkami równości przemieszczeń rdzenia i okładziny dla $z = R + c$ (6). Pozostałe warunki dla przypadku rdzenia pełnego ($R = c$) wynikają z nieokreśloności funkcji $K_n(\beta z)$ i z $K_n(\beta z)$ dla $z \rightarrow 0$, stąd $c_2 = c_4 = c_6 = 0$. W przypadku rdzenia rurowego na jego swobodnej powierzchni ($z = R - c$) zerują się naprężenia

$$\sigma_z = \tau_{z\theta} = \tau_{zx} = 0.$$

Poniżej, jako przykład, rozpatrzony zostanie stosunkowo prosty przypadek osiowosymetrycznego wyboczenia cylindra z pełnym rdzeniem. Dla tego przypadku można przyjąć:

$$u = u(x); w = w(x); v = 0. \tag{9}$$

Przyjmując dalej $n = 0$ dostajemy z (8):

$$\begin{aligned} \Delta &= c_1 I_0(\beta z) + c_3 z I_1(\beta z), \\ \mathcal{K} &= 0, \\ \Phi &= c_1 I_1(\beta z) + c_3 \left[z I_0(\beta z) - 2 \frac{1+c^*}{\beta c^*} I_1(\beta z) \right], \end{aligned} \tag{10}$$

gdzie:

$$\begin{aligned} c_1 &= [r - c_3 2c I_1(2\beta c)] \frac{1}{I_0(2\beta c)}, \\ c_3 &= \frac{EI_0(2\beta c) - r I_1(2\beta c)}{2c [I_0^2(2\beta c) - I_1^2(2\beta c)] - \frac{2(1+c^*)}{c^*} I_0(2\beta c) I_1(2\beta c)}. \end{aligned}$$

3. Równania równowagi i obciążenia krytyczne

3.1. Energia potencjalna odkształcenia okładziny i praca sił zewnętrznych. W dalszym ciągu dopuścimy możliwość utraty stateczności przez okładzinę poza przedziałem sprężystości. Energię potencjalną odkształcenia okładziny obliczymy w oparciu o teorię małych odkształceń sprężysto-plastycznych Henck'y-Iljuszyna zakładając, że materiał okładziny jest nieściśliwy ($\nu_r = 0,5$) oraz przy pominięciu efektu odciążenia części przekroju i przesunięcia osi obojętnej [6]. Dla osiowo-symetrycznej formy wyboczenia cylindra ma ona postać:

$$U_\theta = \frac{1}{2} \int_0^l \int_0^{2\pi} \left\{ a_{11}^- [D_1(w,_{xx})^2 + B_1(u,_{xx})^2] + a_{22}^- B_1 \left(\frac{w}{R_\theta} \right)^2 + 2a_{12}^- B_1 u,_{xx} \frac{w}{R_\theta} \right\} R_\theta d\vartheta dx, \tag{11}$$

gdzie:

$$a_{11} = \varphi_k + \frac{1}{3} \varphi_c, \quad a_{12} = \frac{2}{3} \varphi_c, \quad a_{22} = \frac{4}{3} \varphi_c,$$

$$\varphi_c = \frac{E_c}{E_t}, \quad \varphi_k = \frac{E_k}{E_t}.$$

Dla wyboczenia czysto sprężystego:

$$a_{11} = a_{22} = \frac{1}{1-\nu_t^2}, \quad a_{12} = \frac{\nu_t}{1-\nu_t^2}.$$

Zakładając, że na krawędziach $x = 0$, $x = l$ działa stałe obciążenie osiowe N_x , praca sił zewnętrznych na okładzinie dana jest zależnością [5]:

$$L_z = \frac{1}{2} \int_0^l \int_0^{2\pi} R_\theta N_x(w, xx)^2 d\theta dx. \quad (12)$$

3.2. Energia sprężysta rdzenia. Zgodnie z wcześniejszymi założeniami rdzeń znajduje się w trójosiowym stanie odkształcenia. Energia sprężysta rdzenia dla osiowo-symetrycznej formy wyboczenia cylindra dana jest zależnością:

$$A_u = G_u \int_0^l \int_0^{2\pi} \int_0^{2c} \left[\left(1 + \frac{\nu_u}{1-2\nu_u} \right) (\varepsilon_{xu}^2 + \varepsilon_{zu}^2 + \varepsilon_{\theta u}^2) + \right. \\ \left. + \frac{2\nu_u}{1-2\nu_u} (\varepsilon_{xu} \varepsilon_{\theta u} + \varepsilon_{\theta u} \varepsilon_{zu} + \varepsilon_{zu} \varepsilon_{xu}) + \frac{1}{2} \gamma_{xzu}^2 + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \gamma_{\theta zu}^2 + \frac{1}{2} \gamma_{x\theta u}^2 \right] z dz, \quad (13)$$

gdzie:

$$\varepsilon_{xu} = U_{u,x}, \quad \varepsilon_{\theta u} = \frac{W_u}{z}, \quad \varepsilon_{zu} = W_{u,z},$$

$$\gamma_{xzu} = U_{u,z} + W_{u,x}, \quad \gamma_{x\theta} = 0, \quad \gamma_{\theta z} = 0.$$

3.3. Równania równowagi. Uwzględniając (11), (12), (13) możemy zapisać całkowity potencjał energetyczny cylindra jako:

$$\Pi = U_\theta + A_u - L_z. \quad (14)$$

Z warunku minimum potencjału:

$$\delta \Pi = 0 \quad (15)$$

znajdujemy dwa lokalne równania równowagi powłoki dwuwarstwowej:

$$2A_7 u - 2A_1 u_{,xx} + (A_9 - A_5) w_{,x} - A_3 w_{,xxx} = 0,$$

$$2A_4 w + 2(A_6 - A_8) w_{,xx} + 2A_2 w_{,xxxx} + (A_9 - A_5) u_{,x} + \\ + A_3 u_{,xxx} = N_x w_{,xx}, \quad (16)$$

oraz zespół naturalnych warunków brzegowych dla $x = 0$ i $x = l$:

$$\begin{aligned} 2A_1 u_{,x} + A_3 w_{,xx} + w A_5 &= 0, \\ A_9 u - A_3 u_{,xx} + 2(A_8 - A_6) w_{,x} - 2A_2 w_{,xxx} + N_x w_{,x} &= 0, \\ 2A_2 w_{,xx} + A_3 u_{,x} + A_6 w &= 0, \end{aligned} \quad (17)$$

gdzie:

A_1, \dots, A_9 są stałymi.

Przyjmując dalej dla $n = 0$ przemieszczenia okładziny w postaci (7), otrzymujemy poszukiwane rozwiązanie:

$$\begin{aligned} N_{xkr} &= -\frac{1}{\beta^2} \left\{ \frac{A}{E} [(A_9 - A_5)\beta + \beta^3 A_3] + 2A_4 - 2\beta^2(A_6 - A_8) + 2\beta^4 A_2 \right\}, \\ \frac{A}{E} &= \frac{\frac{B_1}{G_u} \beta \left(a_{\bar{1}2} + \frac{t}{2} \beta^2 a_{\bar{1}1} R_g \right) + \frac{D_1}{G_u} \beta^3 a_{\bar{1}1}}{\beta^2 a_{\bar{1}1} \frac{B_1}{G_u} R_g - 4(1 + \nu_u) \frac{I_1^2 \cdot 2c}{d}} + \\ &= \frac{\frac{2\beta}{d} 4c^2 \left[I_0^2 - I_1^2 - \frac{I_1 I_0}{\beta c} (1 - \nu_u) \right]}{\beta^2 a_{\bar{1}1} \frac{B_1}{G_u} R_g - 4(1 + \nu_u) \frac{I_1^2 \cdot 2c}{d}} - \frac{t}{2} \beta, \end{aligned} \quad (18)$$

gdzie: $d = 2c (I_0^2 - I_1^2) - \frac{2(1 + \nu_u)}{\beta c} I_0 I_1$,

$$I_0 = I_0(2\beta c), I_1 = I_1(2\beta c),$$

$$A_1 = \frac{1}{R_g} \left(1 + \frac{\nu_u}{1 - 2\nu_u} \right) G_u X_1 + \frac{1}{2} B_1 a_{\bar{1}1},$$

$$A_2 = \frac{1}{R_g} \left(1 + \frac{\nu_u}{1 - 2\nu_u} \right) G_u \frac{t^2}{4} X_1 + \frac{1}{2} D_1 a_{\bar{1}1},$$

$$A_3 = \frac{1}{R_g} t \left(1 + \frac{\nu_u}{1 - 2\nu_u} \right) G_u X_1,$$

$$A_4 = \frac{1}{R_g} \left(1 + \frac{\nu_u}{1 - 2\nu_u} \right) G_u (X_2 + X_7) + \frac{1}{R_g} \frac{2\nu_u}{1 - 2\nu_u} G_u X_8 + \frac{1}{2} a_{\bar{2}2} \frac{1}{R^2} B_1,$$

$$A_5 = \frac{1}{R_g} \frac{2\nu_u}{1 - 2\nu_u} G_u (X_3 + X_9) + a_{\bar{1}2} B_1 \frac{1}{R_g},$$

$$A_6 = \frac{2\nu_u}{1 - 2\nu_u} \frac{1}{R_g} \frac{t}{2} G_u (X_3 + X_9),$$

$$A_7 = \frac{1}{2R_g} G_u X_5,$$

$$A_8 = \frac{1}{2R_g} G_u \left(X_4 + \frac{t^2}{4} X_5 + t X_6 \right),$$

$$A_9 = \frac{1}{2R_g} G_u(2X_6 + tX_5),$$

$$X_1 = \int_0^{2c} z \delta^2(z) dz, \quad X_2 = \int_0^{2c} z [\varphi(z), z]^2 dz,$$

$$X_3 = \int_0^{2c} z \delta(z) \varphi(z), z dz, \quad X_4 = \int_0^{2c} z [\varphi^2(z)] dz,$$

$$X_5 = \int_0^{2c} z [\delta(z), z]^2 dz, \quad X_6 = \int_0^{2c} z \varphi(z) \delta(z), z dz,$$

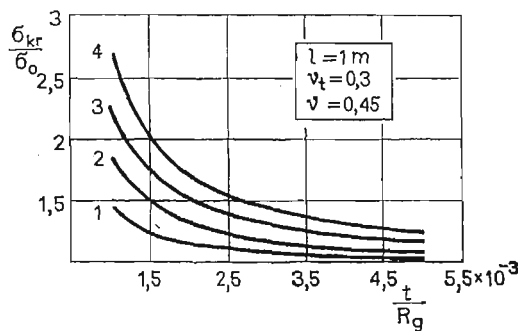
$$X_7 = \int_0^{2c} \frac{1}{z} \varphi^2(z) dz, \quad X_8 = \int_0^{2c} \varphi(z) \varphi(z), z dz,$$

$$X_9 = \int_0^{2c} \varphi(z) \cdot \delta(z) dz.$$

Obciążenie N_{xkr} uzależnione jest od ilości półfal m . Najmniejszą wartość obciążeń krytycznych znajdujemy z warunku:

$$\frac{\partial N_{xkr}}{\partial m} = 0. \quad (19)$$

Przykładową zależność teoretycznych obciążeń krytycznych, wg (18), w funkcji stosunku t/R_g pokazano na rysunku 2. Do obliczeń przyjęto: $l = 1,0$ m, $t = 1 \cdot 10^{-3}$ m, $G_u/E_t = 1, 2, 3, 4 \cdot 10^{-5}$, $\nu = 0,3$, $\nu_u = 0,45$.



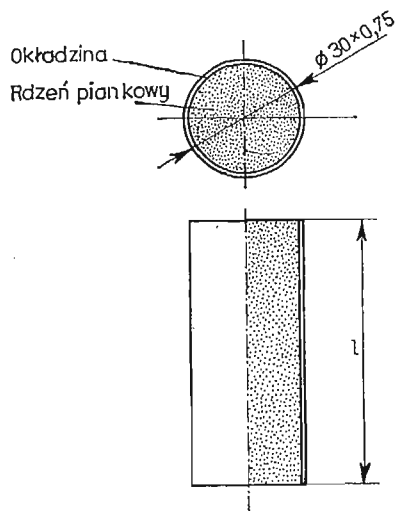
Rys. 2. Zależność teoretycznych obciążeń krytycznych σ_{kr}/σ_0 ($\sigma_0 = \frac{E_t \cdot t}{R_g \sqrt{3(1-\nu_t^2)}}$) w funkcji parametru t/R_g

$$1 - G_u/E_t = 10^{-5}, \quad 2 - G_u/E_t = 2 \cdot 10^{-5},$$

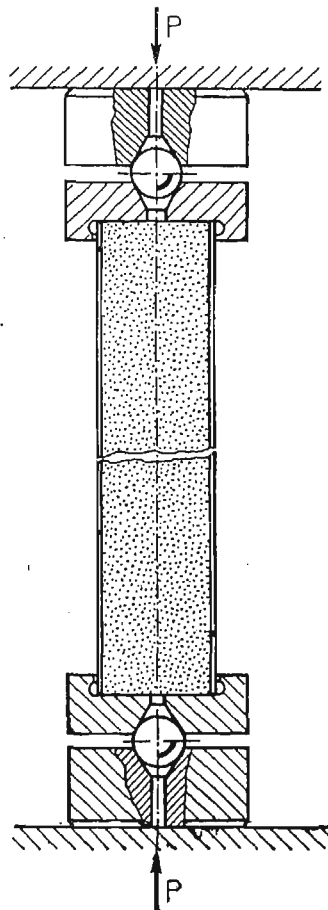
$$3 - G_u/E_t = 3 \cdot 10^{-5}, \quad 4 - G_u/E_t = 4 \cdot 10^{-5}$$

4. Badania doświadczalne

Badaniom, mającym na celu wyznaczenie wartości obciążeń krytycznych powodujących utratę stateczności, poddano cylindry z pełnym rdzeniem (rys. 3).



Rys. 3. Cylinder z pełnym rdzeniem stosow. do badań

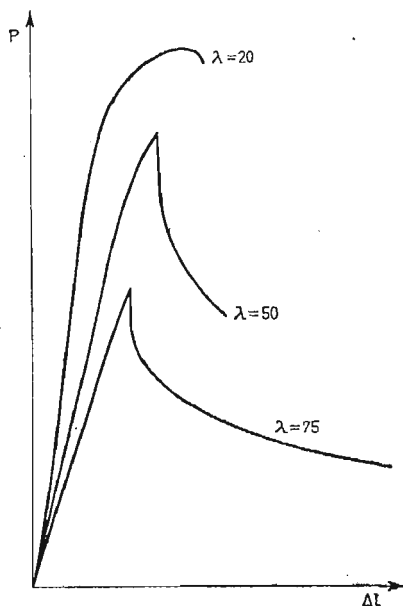


Rys. 4. Schemat zamocowania i obciążenia cylindrów

Okładziny zewnętrzne wykonano z odcinków rury PA-4N-tb $\phi 30 \times 0,75$ wg PN-70/H-74592 o własnościach $E_t = 0,72387 \times 10^5$ MPa, $R_H = 0,153 \times 10^3$ MPa, $R_{0,2} = 0,191 \times 10^3$ MPa, $R_m = 0,259 \times 10^3$ MPa. Rdzenie wykonano ze sztywnej pianki poliuretanowej o gęstościach pozornych 100, 125, 150 kg/m³. Dla pianki przyjęto $\nu_u = 0$, $G_u = 19,4$ MPa. Długości cylindrów wynosiły 206, 515 i 772,5 mm co odpowiada smukłościom λ równym 20, 50, 75 (smukłość graniczna $\lambda_{gr} = 68,3$)*.

Sposób zamocowania i obciążenia cylindrów pokazano na rys. 4. Przykładowe wykresy obciążenia w układzie Δl [mm]– P [kG] pokazano na rys. 5. Jako wartość siły krytycz-

* Smukłość liczona dla samej okładziny



Rys. 5. Wykresy obciążenia

nej P_{kr} przyjmowano maksymalną wartość siły jaką był w stanie przenieść cylinder (wartość siły po przekroczeniu P_{kr} gwałtownie malała). Pomiar umożliwił dodatkowo obliczenie ilości energii potrzebnej do osiągnięcia siły krytycznej. Otrzymane wyniki zestawiono w tabeli 1.

Tabela 1. Zestawienie obciążeń krytycznych

| L.p. | Smukłość | Gęstość rdzenia | P_{kr} doświadcz. | $k_{p\text{dośw.}}$ | Energia | k_e | P_{kr} teoretycz. | $k_{p\text{teor.}}$ |
|------|----------|----------------------|---------------------|---------------------|---------|-------|---------------------|---------------------|
| — | — | [kg/m ³] | [kN] | — | [Nm] | — | [kN] | — |
| 1 | 20 | pusty | 13,4 | — | 22,5 | — | 12,26 | — |
| 2 | | 100 | 14,9 | 1,11 | 35,2 | 1,56 | | |
| 3 | | 125 | 15,1 | 1,12 | 29,9 | 1,33 | | |
| 4 | | 150 | 14,8 | 1,10 | 33,3 | 1,48 | | |
| 1 | 50 | pusty | 11,5 | — | 12,8 | — | — | — |
| 2 | | 100 | 11,8 | 1,02 | 14,9 | 1,01 | | |
| 3 | | 125 | 11,5 | 1,00 | 13,3 | 1,04 | | |
| 4 | | 150 | 11,2 | 0,97 | 12,2 | 0,95 | | |
| 1 | 75 | pusty | 8,3 | — | 8,3 | — | — | — |
| 2 | | 100 | 7,8 | 0,94 | 7,2 | 0,87 | | |
| 3 | | 125 | 9,0 | 1,08 | 9,0 | 1,08 | | |
| 4 | | 150 | 7,6 | 0,91 | 6,5 | 0,78 | | |

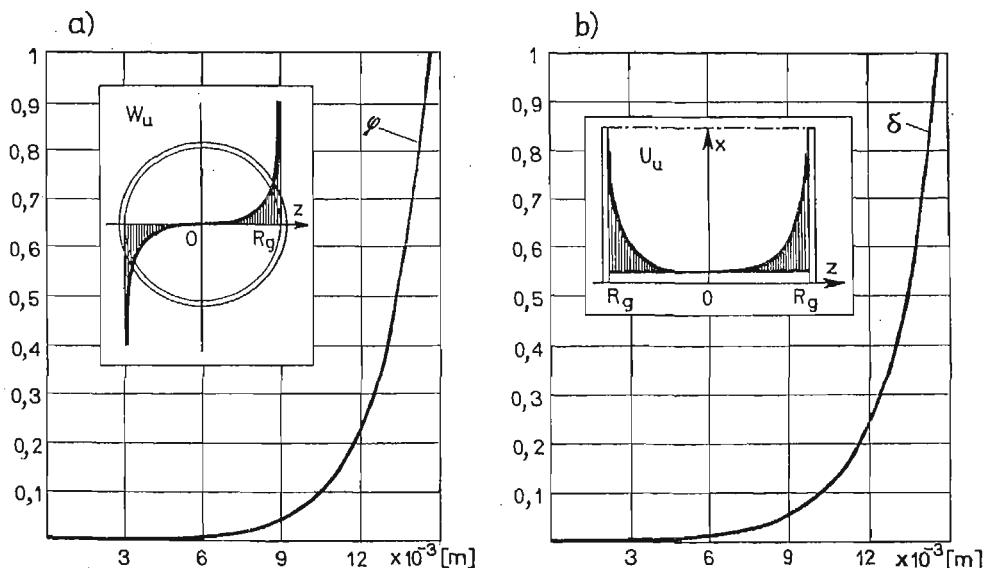
Z przeprowadzonych badań wynika, że wzrost siły krytycznej przenoszanej przez cylinder z pełnym rdzeniem jest zauważalny w zakresie małych smukłości. Dla $\lambda = 20$ zaobserwowano ok. 10% wzrost P_{kr} w stosunku do rur pustych. W zakresie smukłości bliskich granicznej ($\lambda = 50$ i $\lambda = 75$) rdzeń nie ma wpływu na wzrost siły krytycznej. Podobnie gęstość zastosowanej na rdzenie pianki poliuretanowej nie ma praktycznie wpływu na wzrost obciążeń krytycznych.

Dla małych smukłości zaobserwowano znaczne zwiększenie energii odkształcenia potrzebnej do wyboczenia pręta. Dla $\lambda = 20$, w zależności od gęstości rdzenia, wynosił on od 33% do 56%.

Zaobserwowano również, że cylindry pełne odkształcały się w inny sposób aniżeli puste. Widoczne były na nich liczne lokalne półfale przy zachowaniu kołowej postaci geometrycznej przekroju.

5. Porównanie wyników teoretycznych z doświadczalnymi

Obliczenia obciążeń krytycznych wg (18) przeprowadzono jedynie dla cylindrów o smukłości $\lambda = 20$. Wynika to z warunku (9), który może być spełniony jedynie w przypadku dostatecznie krępych cylindrów. Ponieważ dla tej smukłości wyboczenie zachodzi poza zakresem sprężystym, energia odkształcenia okładziny opisana jest zależnością (11). Współczynniki φ_c i φ_k wyznaczone z przebiegu krzywej jednoosiowego rozciągania przybliżonej trzema prostoliniowymi odcinkami. Wyniki zestawiono w tabeli 1. Jak widać współczynniki $k_{p\text{dośw.}}$ i $k_{p\text{teor.}}$, określające procentowy wzrost obciążeń krytycznych dla



Rys. 6. Wykresy teoretycznych funkcji przemieszczeń w rdzeniu dla cylindrów o smukłości $\lambda = 20$: a — przemieszczenie rdzenia w kierunku promieniowym, b — przemieszczenie rdzenia w kierunku osiowym

cylindrów pełnych w stosunku do pustych są zbliżone do siebie. Na rys. 6 pokazano przebiegi teoretycznych funkcji przemieszczeń $\delta = \frac{\Delta}{r}$ i $\varphi = \frac{\Phi}{E}$, obliczone dla cylindrów o smukłości $\lambda = 20$, wg wzorów (10).

Oznaczenia

- E_u, G_u, ν_u — moduł sprężystości podłużnej, moduł sprężystości poprzecznej i wsp. Poissona dla rdzenia,
 E_t, G_t, ν_t — j.w. dla okładziny,
 x, ϑ, z — współrzędne walcowe,
 u, v, w — przemieszczenia pow. środkowej okładziny w kierunkach x, ϑ, z ,
 R_g — promień pow. środkowej okładziny,
 R — promień pow. środkowej rdzenia,
 $2c, t, l$ — całkowita grubość rdzenia i okładziny oraz całkowita długość cylindra,

$$c^* = \frac{1}{1-2\nu_u}$$

$$\beta = \frac{m \cdot \pi}{l}$$

- A, B, E — amplituda przemieszczeń powierzchni środkowej okładziny,

$$D_1 = \frac{E_t \cdot t^3}{12}$$

$$B_1 = E_t \cdot t$$

$$r = A + \frac{t}{2} \beta E; \quad p = B + \frac{t}{2} (nE - B) \frac{1}{R_g}$$

- E_c, E_k — moduły plastyczności dla okładziny
 $\left(E_c = \frac{\sigma}{\varepsilon}, E_k = \frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon} \right)$

- $R_H, R_{0.2}$ — granica proporcjonalności i umowna granica plastyczności dla okładziny,

$$(\dots)_{,x} = \frac{\partial}{\partial x} (\dots); (\dots)_{,\vartheta} = \frac{\partial}{\partial \vartheta} (\dots); (\dots)_{,z} = \frac{\partial}{\partial z} \dots$$

Literatura

1. А. Я. Александров, Л. Э. Брюккер, Л. М. Куршин, А. П. Прусаков, *Расчёт трехслойных панелей*, Оборонгиз, Москва 1960.
2. Э. И. Григolloк, П. П. Чулков, *Устойчивость и колебания трехслойных оболочек*, Москва 1973.
3. М. А. Ильгамов, В. А. Иванов, Б. В. Гулин, *Прочность, устойчивость и динамика оболочек с упругим наполнителем*, Наука, Москва 1977.
4. S. TIMOSHENKO, I. N. GOODIER, *Theory of elasticity*, New York, Toronto, London, 1961.

5. S. TIMOSHENKO, S. WOJNOWSKY-KRIGER, *Theory of plates and shells*, New York, Toronto, London, 1959.
6. А. С. Вольмир, *Устойчивость деформируемых систем*, Наука, Москва 1977.
7. J. C. YAO, *Buckling of Axially Compressed Long Cylindrical Shell with Elastic Core*, Journal of App. Mechanics, June 1962.

Резюме

УСТОЙЧИВОСТЬ ДВУХСЛОЙНЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК,
ПОДВЕРГНУТЫХ ОСЕВОМУ СЖАТИЮ

Работа содержит анализ трехосного состояния перемещений в заполнителе двухслойной оболочки. Рассматриваемый композитный цилиндр состоит из тонкой внешней оболочки (облицовки) и упругого заполнителя, которые успешно взаимодействуют друг с другом в совместной работе. Облицовка удовлетворяет основным положениям двухмерной теории оболочек.

Для так принятой модели определены функции перемещений в заполнителе. На основе полученных аналитических решений вычислены критические нагрузки для подвергнутого осевому сжатию цилиндра со сплошным заполнителем. Рассмотрен сравнительно простой случай аксиально-симметрического продольного изгиба. Решение сравнено с доступными результатами опытных исследований.

Summary

STABILITY OF TWO-LAYER CYLINDRICAL SHELLS WITH AXIAL COMPRESSION

Analysis of three-axial displacements state in two-layer shell filler is described. Tested composite cylinder consists of the thin external shell (lining) and elastic filler (core) — which are in ideal matching. Lining assumptions of the two-dimensional satisfies layer theory, and the core-of the three dimensional theory. For a such model displacement functions in the core were determined. On the base of analytic solution we have obtained critical load for full core cylinder with axial compression. Relatively simple case of axial-symmetrical buckling was examined. Theoretical solution was compared with accessible experimental tests results.

Praca wpłynęła do Redakcji dnia 5 lutego 1986 roku.