

PRAKTYCZNE ZASTOSOWANIE ELEMENTÓW ANALIZY MODALNEJ DO DYNAMICZNYCH BADAŃ OBRABIAREK

WŁADYSŁAW LISEWSKI
PAWEŁ GUTOWSKI

Politechnika Szczecińska

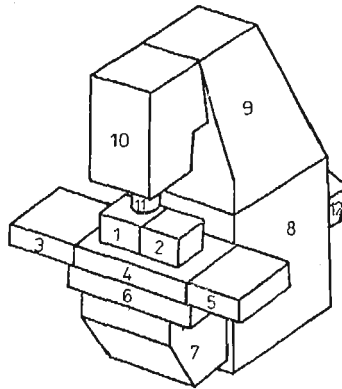
1. Wprowadzenie

Właściwości dynamiczne układów liniowych, a więc również i obrabiarek można opisać przez zbiór funkcji przejścia lub przez częstości własne i odpowiadające im postacie drgań [1]. W ostatnim okresie obserwuje się szczególne zainteresowanie tą drugą formą opisu [2]. Wynika to niewątpliwie z faktu, że obraz postaci drgań zawiera często bardziej czytelne informacje o właściwościach dynamicznych badanej obrabiarki. Z wizualnej analizy zachowania się obrabiarki lub poszczególnych jej zespołów przy częstościach rezonansowych doświadczony badacz może wyciągnąć wnioski potrzebne konstruktorowi [3]. Metoda ta winna być więc szczególnie przydatna, gdy celem badań jest uzyskanie informacji o tym jak należy przekonstruować obrabiarkę, by uzyskać lepsze jej właściwości ze względu na przyjęte kryterium. Intuicyjne dotychczas propozycje zmian konstrukcyjnych obrabiarki, w przypadku analizy modalnej mogą być wynikiem przeprowadzonych obliczeń modelowych (przynajmniej w sensie jakościowym) [4].

2. Zasady budowy modelu badawczego obrabiarki

Określenie postaci drgań obrabiarki w oparciu o badania doświadczalne wiąże się z koniecznością ustawienia na niej dużej liczby czujników. Dokładność odtworzenia drgań obrabiarki drgającej z określoną częstością wynika z liczby zastosowanych do pomiaru czujników oraz złożoności postaci drgań odpowiadającej badanej częstości. Przykładowo, do badania postaci drgań tokarki autorzy pracy [4] zastosowali 160 czujników. Nie zawsze ośrodki badawcze zajmujące się tą problematyką dysponują aparaturą umożliwiającą prowadzenie pomiarów tak dużej liczby sygnałów równocześnie.

Przedstawiona w tym opracowaniu analiza modalna jest pewną modyfikacją metod przedstawionych w literaturze [2, 4, 10]. Bazuje ona na założeniach metody sztywnych



Rys. 1. Model badawczy obrabiarki — podział na sztywne elementy skończone

elementów skończonych (SES) [5]. Badany układ mechaniczny traktuje się jak zespół sztywnych brył połączonych elementami sprężysto-tłumiącymi (EST). Podział badanego układu na bryły sztywne odbywa się na ogół w sposób naturalny tzn. w płaszczyznach styku poszczególnych jego elementów (np. płaszczyzny prowadnic, połączeń itp.) Możliwe są też podziały elementów jednolitych w sposób sztuczny. Przykładowy model badawczy obrabiarki przedstawiono na rys. 1. Poza podziałami naturalnymi, stół i stojak frezarki podzielono dodatkowo w sposób sztuczny-umowny. Dzięki tak przyjętemu modelowi obrabiarki w badaniach doświadczalnych uzyskuje się możliwość rozważania zarówno analitycznego jak i doświadczalnego modelu badanego obiektu we wspólnej przestrzeni metrycznej [6]. Wyłania się więc możliwość jednoznacznego porównania sygnałów z obu modeli co ma istotne znaczenie np. w procesie identyfikacji parametrów modelu analitycznego w oparciu o wyniki badań doświadczalnych. Wprowadzenie założeń metody SES pozwala ponadto zminimalizować liczbę czujników niezbędnych do jednoznacznego określenia ruchu elementów obrabiarki, oraz rozdzielić jego składowe translacyjne i rotacyjne. W przypadku badania tak złożonych obiektów jak obrabiarka, problem ustalenia najmniejszej niezbędnej liczby czujników jest ważny ze względu na czas badań, oraz ilość zdobywanych i dalej przetwarzanych informacji. Możliwość rozdzielenia translacyjnych i rotacyjnych postaci drgań ułatwia wnioskowanie konstruktora o przyczynach występowania w obrabiarkach niekorzystnych zjawisk z dynamicznego punktu widzenia. Lepsza w związku z tym powinna być efektywność wprowadzanych przez niego zmian konstrukcyjnych.

3. Pomiar parametrów przestrzennego ruchu bryły sztywnej

Każda bryła sztywna w przestrzeni R^3 może mieć sześć stopni swobody. Jej ruch w dowolnym nieruchomym układzie współrzędnych opisują trzy translacyjne i trzy rotacyjne współrzędne uogólnione. Przedstawić je można w postaci wektora (macierzy kolumnowej):

$$q_i(t) = \text{col} \{q_{i\alpha}(t)\}; \quad \alpha = 1, 2, \dots, 6, \quad (1)$$

gdzie: $q_{i\alpha}(t)$ — współrzędna uogólniona sztywnego elementu oznaczonego numerem i ,

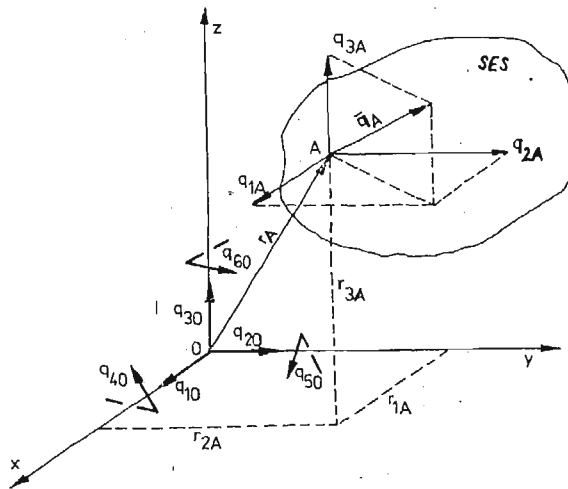
Pomiar ruchu dowolnego elementu obrabiarki traktowanego jak sztywny możliwy jest przy użyciu czujników przyspieszeń (sejsmicznych) odpowiednio na nim rozmieszczonych. Każdy czujnik zamocowany na bryle sztywnej wykonującej drgania mierzy jej przyspieszenie w punkcie pokrywającym się ze środkiem ciężkości masy sejsmicznej czujnika. Równanie opisujące to przyspieszenie ma postać:

$$p_A(t) = p_0(t) + \varepsilon(t) \times r_A + \omega(t) \times [\omega(t) \times r_A], \quad (2)$$

gdzie:

- $p_A(t)$ — wektor przyspieszenia punktu A ,
- $p_0(t)$ — wektor przyspieszenia punktu O (początku układu współrzędnych),
- $\varepsilon(t)$ — wektor przyspieszenia kąowego,
- $\omega(t)$ — wektor prędkości kąowej,
- r_A — wektor-promień łączący punkt O z punktem A .

Jak wynika z pracy [7] przy kątach obrotu ciała nie większych od 1° przyspieszenie dośrodkowe stanowi mniej niż 1% stycznego i może być pominięte. Ponadto w przypadku małych drgań określenie ruchu bryły sztywnej możliwe jest zarówno przez pomiar przyspieszeń, prędkości jak i przemieszczeń [4] tzn., że proces całkowania można realizować zarówno w odniesieniu do bezpośrednio mierzonych sygnałów jak i wyznaczonych z równania (2) przyspieszeń. Wobec powyższego w prezentowanej pracy dalsze rozważania prowadzone będą na przemieszczeniach.



Rys. 2. Składowe przemieszczeń SES w układzie współrzędnych

Przemieszczenie punktu A bryły sztywnej (rys. 2) mierzone przez trzy czujniki ustawione ortogonalnie do siebie i równoległe do osi przyjętego układu współrzędnych opisuje równanie macierzowe [5]:

$$q_A = R \cdot q_0, \quad (3)$$

gdzie:

q_A — macierz kolumnowa zawierająca współrzędne przemieszczenia punktu A bryły sztywnej,

$q_A = \text{col}\{q_{1A}(t), q_{2A}(t), q_{3A}(t)\}$,

R — macierz transformacji współrzędnych uogólnionych ruchu bryły sztywnej z punktu O do punktu A ,

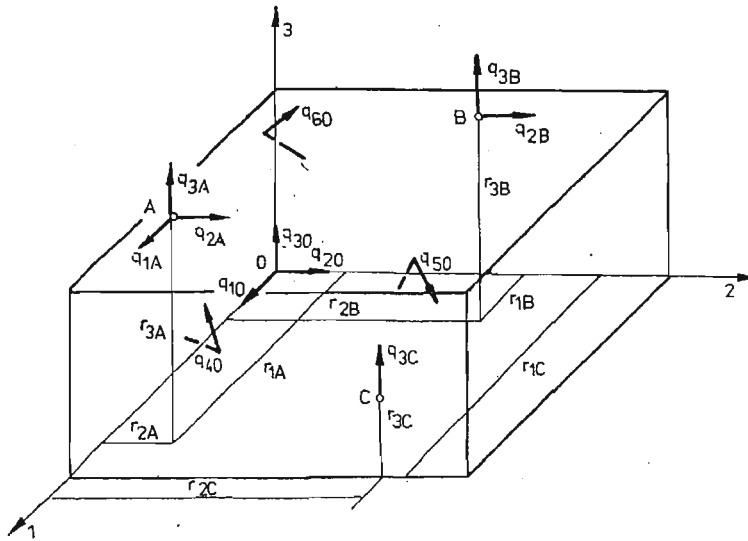
$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & r_{3A} & -r_{2A} \\ 0 & 1 & 0 & -r_{3A} & 0 & r_{1A} \\ 0 & 0 & 1 & r_{2A} & -r_{1A} & 0 \end{bmatrix}, \quad (4)$$

r_{iA} — współrzędne wektora określającego położenie punktu A względem O ,

q_0 — współrzędne uogólnione ruchu bryły sztywnej określone w punkcie O ,

$q_0 = \text{col}\{q_{10}(t), \dots, q_{60}(t)\}$.

Aby na podstawie pomiarów wyznaczyć przemieszczenia uogólnione q_0 należy także w innych punktach bryły sztywnej umieścić czujniki. Łączna ich liczba nie może być mniejsza od sześciu, a liczba punktów w których je ustawiono — nie mniejsza od trzech. Każdy następny czujnik to dodatkowy wiersz w macierzy R . Przy trzech punktach pomiarowych możliwe są dwie wersje rozmieszczenia czujników — w układzie 2-2-2 lub 3-2-1.



Rys. 3. Ustawienie czujników pomiarowych w układzie 3-2-1

W przypadku układu 3-2-1 pokazanego na rys. 3 istnieje możliwość wyznaczenia współrzędnych uogólnionych q_0 gdy prawdziwa jest koniunkcja:

$$\sim \bigvee_{i,j \in \{1,2,3\}} : (r_{1A} \neq r_{1B}) \wedge [(r_{jA} \neq r_{jB}) \vee (r_{jA} \neq r_{jC})] \quad i \neq j. \quad (5)$$

W ogólnym przypadku musi być spełniony warunek:

$$\sim V_L : L \supset \{A, B, C\}, \quad (6)$$

gdzie:

- i, j — numery współrzędnych układu odniesienia,
 $\{A, B, C\}$ — zbiór punktów w których zamocowano czujniki,
 L — dowolna prosta w przestrzeni R^3 .

Równanie (6) jest matematycznym zapisem powszechnie znanego warunku by punkty mocowania czujników nie leżały na jednej prostej.

Wymagania dotyczące punktów mocowania czujników podczas pomiarów (zależność 5) ograniczające się do nierówności określonych współrzędnych są bardzo łatwe do spełnienia. Celowe jest jednak możliwie wyraźne różnicowanie tych współrzędnych, by rejestrowane przebiegi przemieszczeń także wyraźnie różniły się między sobą. W równaniu (3) obowiązuje założenie, że układy współrzędnych związane z punktami A i O są do siebie równoległe. W przypadku nie spełnienia tego założenia, równanie to będzie miało postać:

$$q = \Theta \cdot R^* \cdot q_0, \quad (7)$$

gdzie:

- q — macierz kolumnowa zawierająca przemieszczenia mierzone przez wszystkie czujniki zamocowane na drgającej bryle sztywnej,
 R^* — macierz transformacji o wymiarach 6×6 uwzględniająca współrzędne mocowania wszystkich sześciu czujników na bryle sztywnej (zbudowana analogicznie do R — wzór (4)),
 Θ — macierz kosinusów kierunkowych.

Dla czujników w układzie 3-2-1 (rys. 3) ma ona postać:

$$\Theta = \begin{bmatrix} \cos \varphi_{A11} & \cos \varphi_{A12} & \cos \varphi_{A13} & 0 & 0 & 0 \\ \cos \varphi_{A21} & \cos \varphi_{A22} & \cos \varphi_{A23} & 0 & 0 & 0 \\ \cos \varphi_{A31} & \cos \varphi_{A32} & \cos \varphi_{A33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \varphi_{B12} & \cos \varphi_{B13} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \varphi_{B22} & \cos \varphi_{B23} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cos \varphi_{C33} \end{bmatrix},$$

φ_{Aij} — kąt zawarty między osią i -tego czujnika w punkcie A oraz j -tą osią globalnego układu współrzędnych.

Przy trzech punktach mocowania czujników, wyjściowa postać macierzy Θ jest następująca:

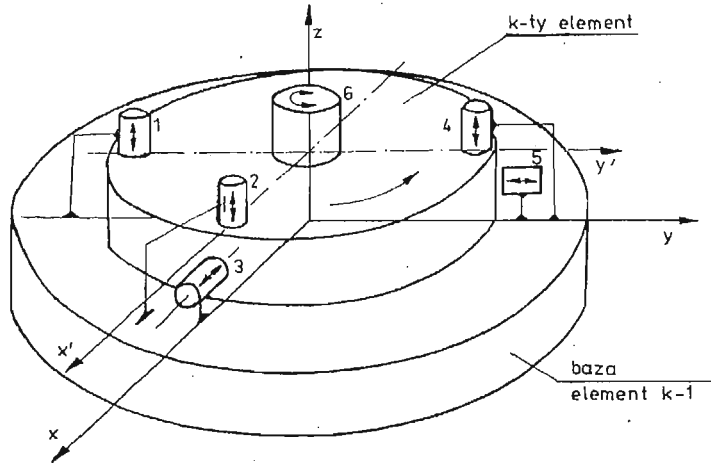
$$\Theta' = \begin{bmatrix} \Theta_A & 0 & 0 \\ 0 & \Theta_B & 0 \\ 0 & 0 & \Theta_C \end{bmatrix},$$

gdzie: A, B, C — nazwy punktów mocowania czujników,

$$\Theta_A = \begin{bmatrix} \cos \varphi_{A11} & \cos \varphi_{A12} & \cos \varphi_{A13} \\ \cos \varphi_{A21} & \cos \varphi_{A22} & \cos \varphi_{A23} \\ \cos \varphi_{A31} & \cos \varphi_{A32} & \cos \varphi_{A33} \end{bmatrix}.$$

Macierz Θ' ma wymiary 9×9 i poszukiwaną macierz Θ otrzymuje się z niej przez skreślenie wierszy oraz kolumn opisujących położenie „brakujących” czujników w poszczegól-

nych punktach. Przykładowo wyżej zapisana macierz kosinusów kierunkowych dla układów czujników z rys. 3 powstała po skreśleniu z macierzy Θ' wierszy, oraz kolumn opisujących położenie czujników q_{1B} w punkcie B , oraz q_{1C} i q_{2C} w punkcie C . Takich czujników po prostu nie ma. Jeśli któryś z elementów badanego urządzenia wiruje (np. narzędzie w modelu, z rys. 1), pomiar składowych jego ruchu przy użyciu czujników sejsmicznych nie jest możliwy. Jednakże z powodzeniem zadanie to można rozwiązać używając pięciu czujników indukcyjnych bezdotykowych, oraz czujnika drgań skrętnych. Sposób



Rys. 4. Pomiar składowych ruchu wirującej tarczy; 1-5 — czujniki bezdotykowe, 6 — czujnik drgań skrętnych (sejsmiczny)

pomiaru pokazano na rys. 4. Macierz R^* dla takiego układu pomiarowego przyjmuje postać:

$$R^* = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & r_{21} & -r_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & r_{22} & -r_{12} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & r_{33} & -r_{23} \\ 0 & 0 & 1 & r_{24} & -r_{14} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -r_{35} & 0 & r_{15} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (8)$$

gdzie: r_{ij} — i -ta współrzędna odległości j -tego czujnika od początku przyjętego układu współrzędnych.

Czujniki indukcyjne mierzą ruch w stosunku do bazy, na której zostały zamocowane. Jeśli bazą tą jest sąsiedni element badanego urządzenia, którego ruch mierzony jest czujnikami sejsmicznymi, wówczas wykorzystując możliwość transformacji współrzędnych uogólnionych, ruch elementu wirującego w układzie bezwzględny wyznaczyć można z zależności (rys. 4):

$$q_{0K} = q'_{0K} + \Theta \cdot R_K \cdot q_{0K-1}, \quad (9)$$

gdzie:

q_{0K} — macierz zawierająca składowe ruchu wirującej bryły sztywnej określona w układzie bezwzględny,

- q'_{0k} — macierz zawierająca składowe ruchu wirującej bryły sztywnej określona względem elementu bazowego na którym zamocowano czujniki indukcyjne,
 R_k — macierz transformacji przemieszczeń bryły ($k-1$) będącej bazą, do układu współrzędnych bryły wirującej (k),
 q_{0k-1} — macierz zawierająca składowe ruchu bryły ($k-1$) będącej bazą do mocowania czujników indukcyjnych.

Podczas badania obiektów składających się z n elementów, które można traktować jak sztywne, układ pomiarowy powinien składać się z $6n$ czujników mierzących sygnały wyjściowe. W przypadku braku zestawu badawczego o dużej liczbie torów pomiarowych, przy założeniu o stacjonarności obiektu, badania można prowadzić etapowo przenosząc czujniki na kolejne bryły. Wówczas wystarczy 6 czujników mierzących sygnały wyjściowe oraz jeden do pomiaru sygnału wejściowego. W badaniach takich operować należy nie sygnałami (przemieszczeniami) lecz zespolonymi funkcjami przejścia. Odniesienie przemieszczeń zmierzonych w wybranych punktach na obrabiarce do sygnału wymuszenia rozwiązuje problem przesunięć fazowych między sygnałami mierzonymi w kolejnych etapach badań. Równanie (7) w tej sytuacji przyjmuje postać:

$$W = \Theta \cdot R^* \cdot W_0, \quad (10)$$

gdzie:

$$W_n = \frac{q_n(j\omega)}{f(j\omega)}; \quad W_{0i} = \frac{q_{0i}(j\omega)}{f(j\omega)}; \quad n, i = 1, 2, \dots, 6, \quad (11)$$

n — numer czujnika,

i — numer składowej zespolonej funkcji przejścia,

$f(j\omega)$ — siła wymuszająca drgania obrabiarki.

Po wyznaczeniu funkcji przejścia W w oparciu o pomiary dla każdej bryły sztywnej rozwiązanie równania (10) ze względu na W_0 nie stanowi problemu. W ten sposób otrzymuje się pełną informację o ruchu każdego elementu badanego urządzenia (np. obrabiarki). Informacja ta jest opisana w układzie współrzędnych związanym z każdą mierzoną bryłą.

Tak wyznaczone funkcje przejścia mogą być aproksymowane wyrażeniem [1]:

$$W_i(j\omega) = -\frac{1}{m_i \omega^2} + \sum_{k=1}^n \frac{F_{ik} + j\omega G_{ik}}{-\omega^2 + S_k + j\omega R_k} + x_i + jy_i, \quad (12)$$

gdzie:

m_i — masa rezydualna,

F_{ik}, G_{ik}, S_i, R_i — parametry wielomianu aproksymującego,

$x_i + jy_i$ — podatność rezydualna,

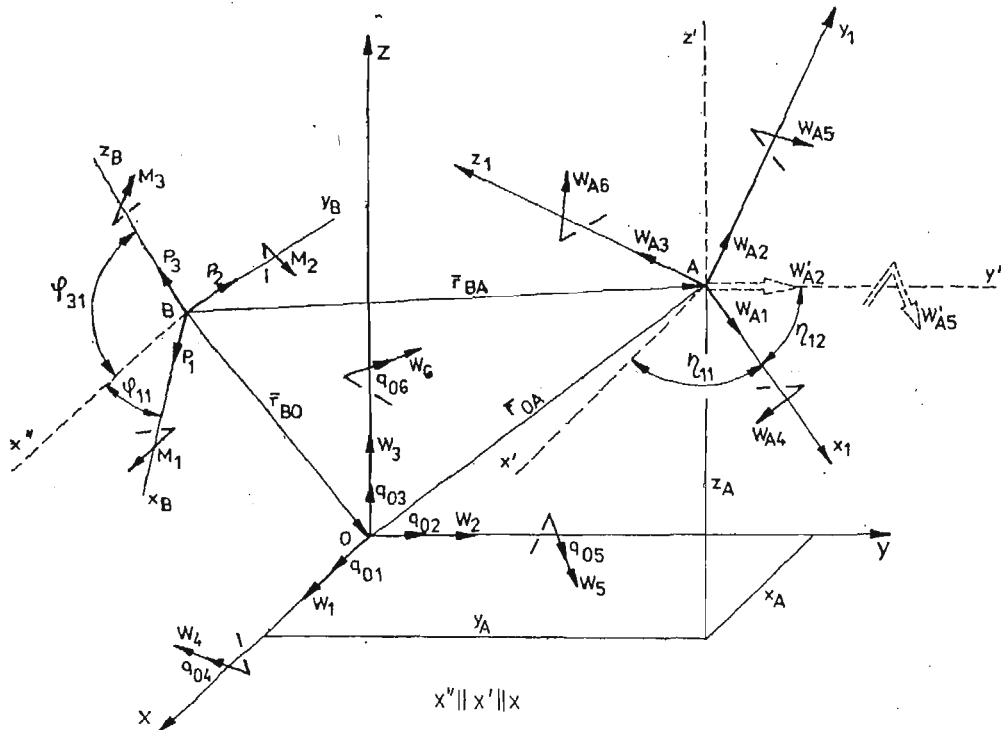
n — liczba rezonansów na charakterystyce w rozpatrywanym przedziale częstotliwości

Taka postać charakterystyk wymaga znacznie mniejszych obszarów pamięci komputera niezbędnej do zmagazynowania wyników badań, a jednocześnie stanowi wygodną formę wyjściową do estymacji parametrów modelu badanego obiektu [1].

4. Transformacja charakterystyk częstotliwościowych

Czytelną informację o właściwościach badanej obrabiarki zawierają graficzne obrazy postaci drgań odpowiadających poszczególnym częstościom rezonansowym. W przypadku prezentowanej metody badawczej dane niezbędne do uzyskania przejrzystego obrazu postaci drgań otrzymuje się w wyniku transformacji charakterystyk W_0 do każdego naroża bryły której ruch one opisują. Problem transformacji charakterystyk do dowolnego punktu badanego obiektu pojawia się także w innych sytuacjach zależnie od celu badań. Sposób realizacji tego zadania zarówno dla funkcji przejścia w postaci tablicy jak i w formie aproksymowanej wzorem (12) jest przedmiotem rozważań niniejszego rozdziału pracy.

Ogólny przypadek transformacji charakterystyk występuje wtedy, gdy rozpatrywane układy współrzędnych są przesunięte i obrócone względem siebie. W tym przypadku transformację przeprowadza się niejako dwuetapowo, najpierw do układu $Ax'y'z'$ przesuniętego równoległe o wektor r_{OA} względem układu wyjściowego $Oxyz$ (rys. 5), a następnie dokonując obrotu układu $Ax'y'z'$ do $Ax_1y_1z_1$.



Rys. 5. Transformacja charakterystyk częstotliwościowych W z układu $Oxyz$ do układu $Ax_1y_1z_1$

W układzie $Oxyz$ charakterystyki dynamiczne W_i określone są zależnością (11).

Dla układów przestrzennych siły uogólnione f_i tworzą wektor f o sześciu składowych, z których trzy pierwsze są siłami P działającymi wzdłuż osi układu, zaś pozostałe trzy momentami M względem tych osi.

Redukcja siły f do układu $Ax'y'z'$ określona jest zależnością [5]:

$$f_A = T_f \cdot \Theta \cdot f, \quad (13)$$

gdzie: T_f — macierz współczynników redukcji sił,

zaś transformacja przemieszczeń z punktu 0 układu $Oxyz$ do punktu A układu $Ax'y'z'$ wyraża się zależnością:

$$q_A = T_u \cdot q_0, \quad (14)$$

gdzie:

q_0 — macierz przemieszczeń uogólnionych w punkcie 0,

T_u — macierz transformacji przemieszczeń.

Charakterystykę dynamiczną w punkcie A układu $Ox'y'z'$ || do $Oxyz$ określić więc można zależnością:

$$W'_{Ai} = \frac{q_{Ai}}{f_{Ai}}, \quad (15)$$

zaś związek między charakterystykami W i W'_A równaniem:

$$W'_A = T \cdot W, \quad (16)$$

gdzie T jest poszukiwaną macierzą redukcji do układów równoległych.

Elementy T_{ij} macierzy T wyznaczyć można z równania (16) po jego rozpisaniu w postaci jawnej i podstawieniu wartości W_i i W'_{Ai} wyznaczonych z zależności geometrycznych określonych na podstawie rys. 4. W rezultacie otrzymuje się:

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & T_{15} & T_{16} \\ 0 & 1 & 0 & T_{24} & 0 & T_{26} \\ 0 & 0 & 1 & T_{34} & T_{35} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & T_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & T_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & T_{66} \end{bmatrix}, \quad (17)$$

gdzie:

$$T_{ik} = \frac{C_k}{C_i} \quad \text{dla} \quad \begin{matrix} i = 1, 2, 3, \\ k = 4, 5, 6, \end{matrix} \quad (18)$$

i

$$T_{kk} = \frac{C_k^*}{C_k} \quad \text{dla} \quad k = 4, 5, 6, \quad (19)$$

oraz:

$$C_i = \sum_{j=1}^n P_j \cos \varphi_{ij}, \quad (20)$$

$$C_K = \begin{vmatrix} P_1 & P_2 & P_3 \\ X_{BA} & Y_{BA} & Z_{BA} \\ \cos \varphi_{n1} & \cos \varphi_{n2} & \cos \varphi_{n3} \end{vmatrix} + \sum_{i=1}^3 M_i \cos \varphi_{ni}, \quad n = k-3 \quad (21)$$

$$C_K^* = \begin{vmatrix} P_1 & P_2 & P_3 \\ X_{B0} & Y_{B0} & Z_{B0} \\ \cos \varphi_{n1} & \cos \varphi_{n2} & \cos \varphi_{n3} \end{vmatrix} + \sum_{i=1}^3 M_i \cos \varphi_{ni}. \quad (22)$$

W drugim etapie dokonuje się transformacji charakterystyk W'_A do układu $Ax_1y_1z_1$ obróconego względem $Ax'y'z'$ o kąt określony macierzą kosinusów kierunkowych η' .

$$\eta' = \begin{bmatrix} \cos\eta_{11} & \cos\eta_{12} & \cos\eta_{13} \\ \cos\eta_{21} & \cos\eta_{22} & \cos\eta_{23} \\ \cos\eta_{31} & \cos\eta_{32} & \cos\eta_{33} \end{bmatrix}. \quad (23)$$

W rezultacie otrzymuje się ogólny wzór na transformację charakterystyk W z układu $Oxyz$ do przesuniętego równolegle i obróconego względem niego układu $Ax_1y_1z_1$. Wzór ten ma postać:

$$W_A = \eta \cdot T \cdot W, \quad (24)$$

gdzie:

$$\eta = \begin{bmatrix} \eta' & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \eta' \end{bmatrix}, \quad (25)$$

zaś macierz T określona jest równaniem (17).

4.1. Transformacja charakterystyk aproksymowanych do dowolnego punktu bryły sztywnej. Jak wykazano w pracy [1], charakterystyki dynamiczne wyznaczone doświadczalnie w określonym przedziale częstotliwości (ω_A, ω_B) w punkcie t dowolnego układu posiadającego n sprzężonych stopni swobody można aproksymować wielomianem o postaci opisanej zależnością (12).

Transformacja charakterystyk dynamicznych opisanych wielomianem aproksymacyjnym nie zmienia postaci wielomianu, lecz powoduje zmianę współczynników aproksymacji, przy czym zmianie ulegają parametry m_t, x_t, y_t, F_{tk} i G_{tk} , gdyż są one funkcją położenia punktu, w którym zdejmowano charakterystykę, natomiast parametry S_k i R_k nie ulegają zmianie, gdyż charakteryzują one własności układu niezależnie od miejsca zdejmowania charakterystyki.

Transformację charakterystyk aproksymowanych przeprowadza się korzystając z zależności (24), która w tym przypadku przyjmie postać:

$$W_r = T_r \cdot W, \quad (26)$$

gdzie:

$T_r = \eta \cdot T$ — macierz redukcji,

W — macierz charakterystyk opisanych równaniem (12),

W_r — macierz charakterystyk zredukowanych z układu $Oxyz$ do układu $Ax_1y_1z_1$, natomiast parametry $m'_t, x'_t, y'_t, F'_{tk}, G'_{tk}$ wielomianu W przetransformowanego z układu $Oxyz$ do układu $Ax_1y_1z_1$, znajduje się z układu równań powstających po zapisaniu równania macierzowego (26) w formie rozwiniętej i po porównaniu w otrzymanych równaniach składników o tej samej postaci.

Równanie (26) w formie rozwiniętej ma postać:

$$\begin{bmatrix} W'_1 \\ \dots \\ W'_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T'_{11} & T'_{12} & \dots & T'_{16} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ T'_{61} & T'_{62} & \dots & T'_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_1 \\ \dots \\ W_6 \end{bmatrix}, \quad (26a)$$

przy czym dla $i = 4, 5, 6$ i $j = 1, 2, 3$ $T'_{ij} = 0$.

Pierwsze z tych równań to:

$$W_1^r = T_{11}^r W_1 + T_{12}^r W_2 + T_{13}^r W_3 + T_{14}^r W_4 + T_{15}^r W_5 + T_{16}^r W_6. \quad (27)$$

Podstawiając zamiast W_j i W_j^r wyrażenie (12) otrzymuje się:

$$-\frac{1}{m_1^r \omega^2} + \sum_{k=1}^n \frac{F_{1k}^r + j\omega G_{1k}^r}{-\omega^2 + S_k + j\omega R_k} + x_{1o}^r + jy_{1o}^r = \sum_{j=1}^6 T_{1j}^r \left[-\frac{1}{m_j \omega^2} + \sum_{k=1}^n \frac{F_{jk} + j\omega G_{jk}}{-\omega^2 + S_k + j\omega R_k} + x_{jo} + jy_{jo} \right]. \quad (28)$$

W wyniku porównania w równaniu (28) odpowiednich składników otrzymuje się:

$$m_1^r = \frac{1}{\sum_{j=1}^6 \frac{T_{1j}^r}{m_j}}, \quad (29)$$

$$x_{1o}^r = \sum_{j=1}^6 T_{1j}^r x_{jo}, \quad (30)$$

$$y_{1o}^r = \sum_{j=1}^6 T_{1j}^r y_{jo}, \quad (31)$$

$$F_{1k}^r = \sum_{j=1}^6 T_{1j}^r F_{jk} \quad k = 1 \dots n, \quad (32)$$

$$G_{1k}^r = \sum_{j=1}^6 T_{1j}^r G_{jk} \quad k = 1 \dots n. \quad (33)$$

W sposób analogiczny z dalszych 5-ciu równań wynikających z równania (26a) wyznacza się pozostałe parametry charakterystyk przetransformowanych. Parametry te wraz z parametrami opisanymi równaniami (29÷33) można przedstawić w następujący sposób:

$$\begin{array}{ll} \text{a) dla } i = 1, 2, 3; & \text{b) dla } i = 4, 5, 6, \\ k = 1, 2, \dots, n & k = 1, 2, \dots, n \end{array}$$

$$m_i^r = \left(\sum_{j=1}^6 \frac{T_{ij}^r}{m_j} \right)^{-1}, \quad m_i^r = \left(\sum_{j=4}^6 \frac{T_{ij}^r}{m_j} \right)^{-1}, \quad (34)$$

$$x_i^r = \sum_{j=1}^6 T_{ij}^r x_j, \quad x_i^r = \sum_{j=4}^6 T_{ij}^r x_j, \quad (35)$$

$$y_i^r = \sum_{j=1}^6 T_{ij}^r y_j, \quad y_i^r = \sum_{j=4}^6 T_{ij}^r y_j, \quad (36)$$

$$F_{ik}^r = \sum_{j=1}^6 T_{ij}^r F_{jk}, \quad F_{ik}^r = \sum_{j=4}^6 T_{ij}^r F_{jk}, \quad (37)$$

$$G_{ik}^r = \sum_{j=1}^6 T_{ij}^r G_{jk}, \quad G_{ik}^s = \sum_{j=4}^6 T_{ij}^s G_{jk}. \quad (38)$$

Z przedstawionych rozważań wynika, że transformacja charakterystyk aproksymowanych jest bardzo prosta. Można więc bezpośrednio po zdjęciu charakterystyk dynamicznych badanego obiektu przeprowadzić ich aproksymację, a wszystkie dalsze operacje związane z przetwarzaniem tych charakterystyk prowadzić nie na tablicach lecz na wielomianach.

5. Wyniki badań doświadczalnych

Wykorzystując metodę zaprezentowaną w pracy [1], oraz powyższe rozważania przeprowadzono badania doświadczalne kilku obrabiarek. Podczas badań starano się symulować określone warunki pracy obrabiarki. W związku z tym między narzędziem i przedmiotem obrabianym instalowano siłownik hydrauliczny lub sprężynowy. Kierunek oraz wartość siły wywołanej w ten sposób odpowiadały stałej składowej siły skrawania symulowanego procesu obróbki. Składową zmienną generowano przy użyciu impulsatora. Parametry impulsu dobierano stosownie do własności badanej obrabiarki, oraz zakresu częstotliwości, w którym należało wyznaczyć charakterystyki [11]. Przykładowe charakterystyki częstotliwościowe wyznaczone podczas badań jednej z obrabiarek przedstawiono na rys. 6. Są to charakterystyki otrzymane w wyniku pomiaru sygnałów odpowiedzi przez sześć czujników ustawionych w układzie 3-2-1 (rys. 3). Obok każdego z wykresów zamieszczono w tablicy wartości parametrów opisujących charakterystyki aproksymujące.

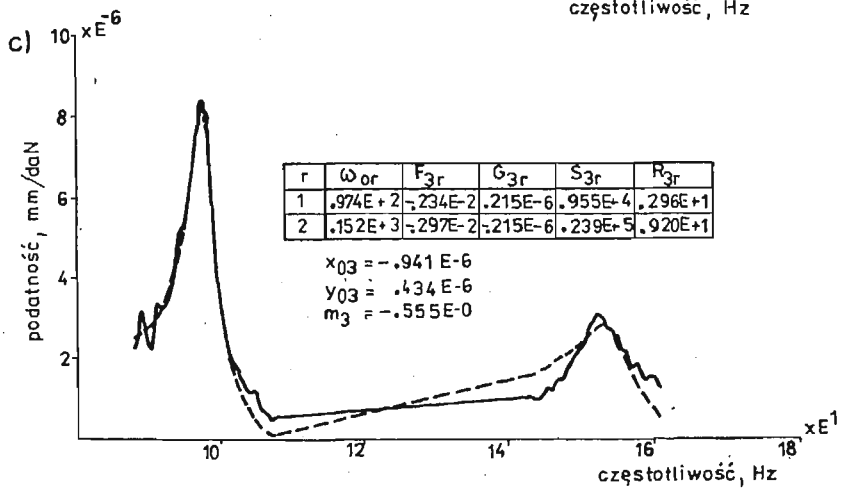
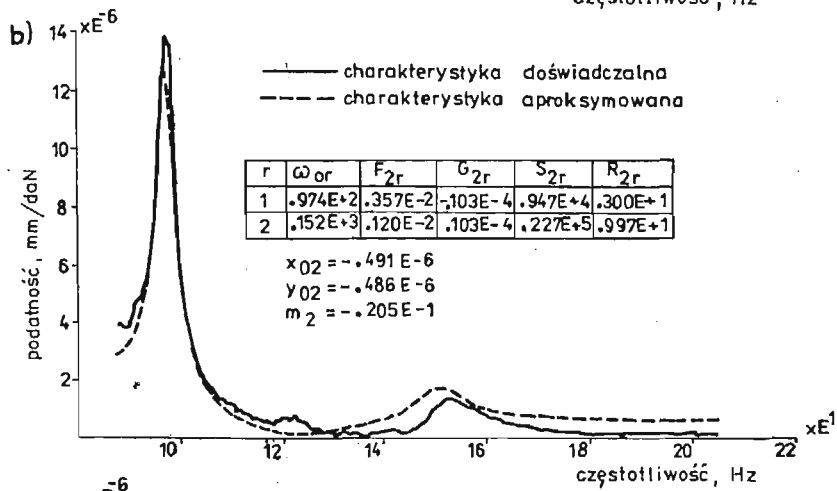
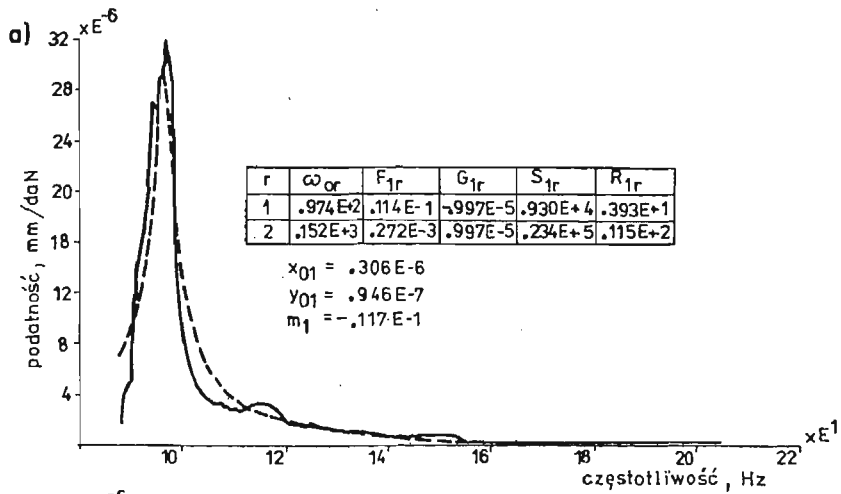
Wyestymowane na podstawie tych charakterystyk parametry R i S zestawiono poniżej:

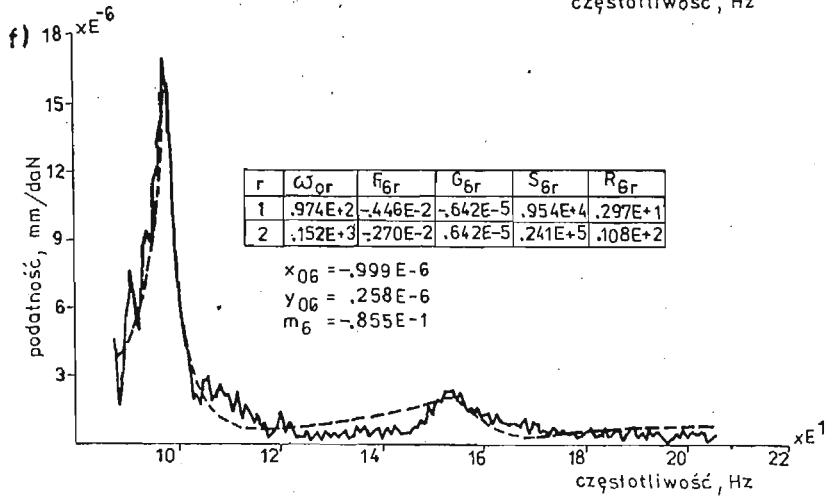
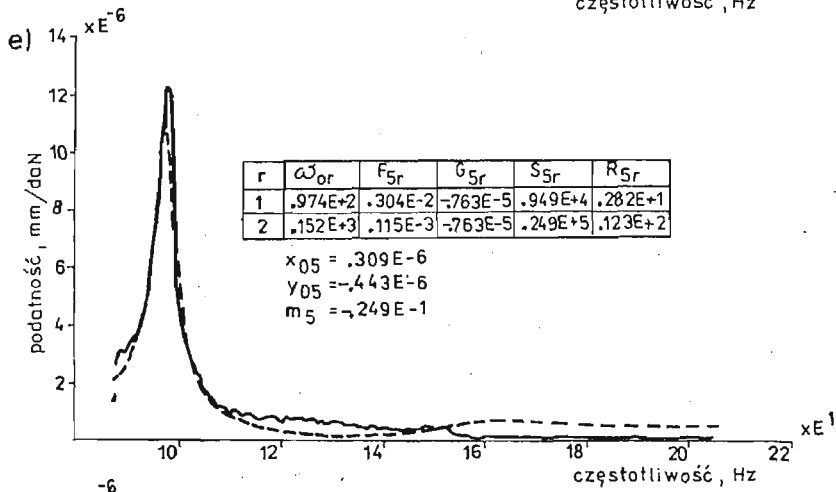
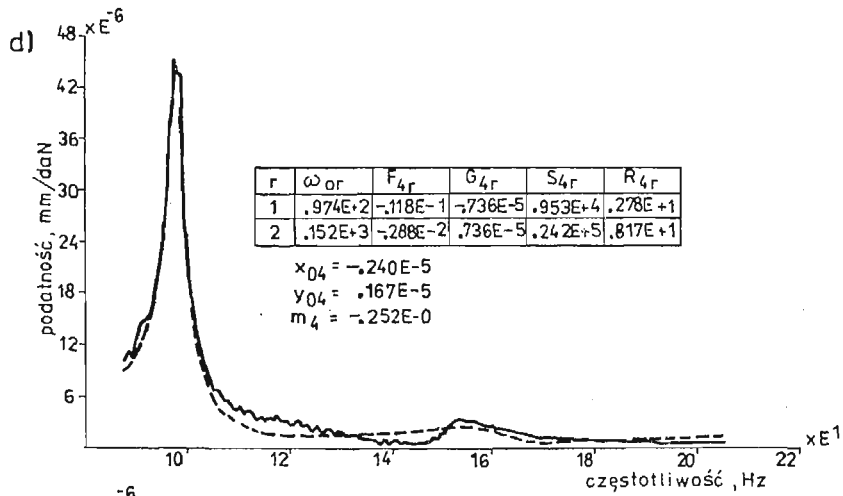
$$S = \begin{bmatrix} -.2084 \text{ E}+4 & -.5472 \text{ E}+5 \\ .5327 \text{ E}+4 & .3359 \text{ E}+5 \end{bmatrix}^{\circ}$$

$$R = \begin{bmatrix} -.1595 \text{ E}+3 & -.6467 \text{ E}+3 \\ .4421 \text{ E}+2 & .1710 \text{ E}+3 \end{bmatrix}$$

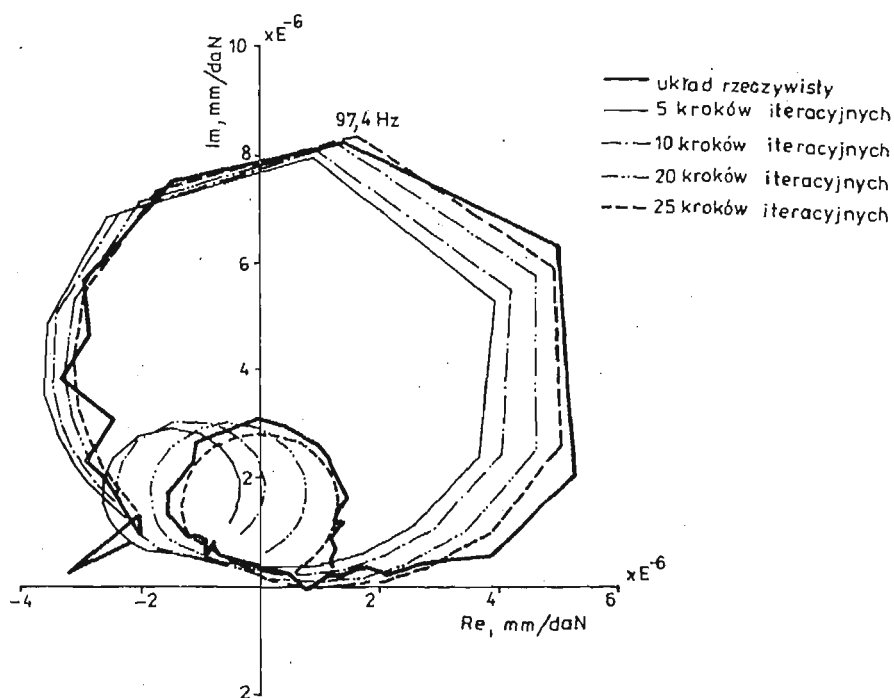
Zagadnienie interpretacji tych wyników, związanie ich z adekwatnym modelem w sensie jego struktury, to odrębny problem, który jest przedmiotem aktualnie prowadzonych przez autorów prac.

We wcześniejszej pracy [1] pokazano proces aproksymacji w odniesieniu do charakterystyk wyznaczonych analitycznie. Interesująca jest odpowiedź na pytanie dotyczące szybkości zbieżności procesu iteracyjnego w przypadku opisu charakterystyk wyznaczonych doświadczalnie. Przykład pokazujący dokładność dopasowania charakterystyki aproksymowanej pokazano na rys. 7. W omawianym przypadku pokazano kilka faz zbliżania się do rozwiązania zadowalającego. Okazuje się, że uzyskanie dobrej zgodności obu wykresów wymaga wielu iteracji. Czas obliczeń jest jednak na tyle krótki, że nie stanowi to istotnego problemu.





Rys. 6. Przykładowe charakterystyki amplitudowo-częstotliwościowe wyznaczone na stole jednej z badanych obrabiarek

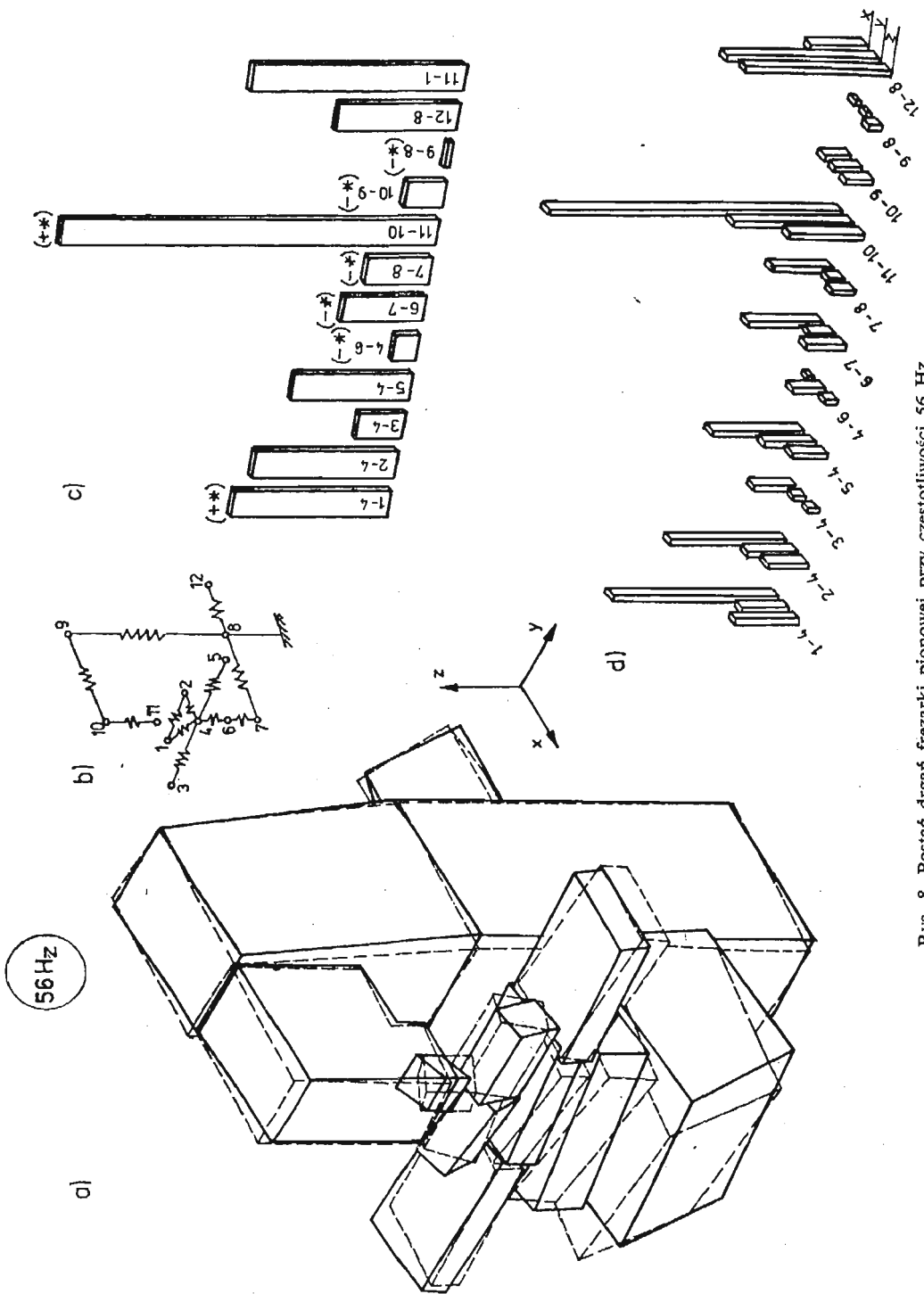


Rys. 7. Charakterystyki aproksymujące po kolejnych krokach iteracyjnych (charakterystyka z rys. 6c)

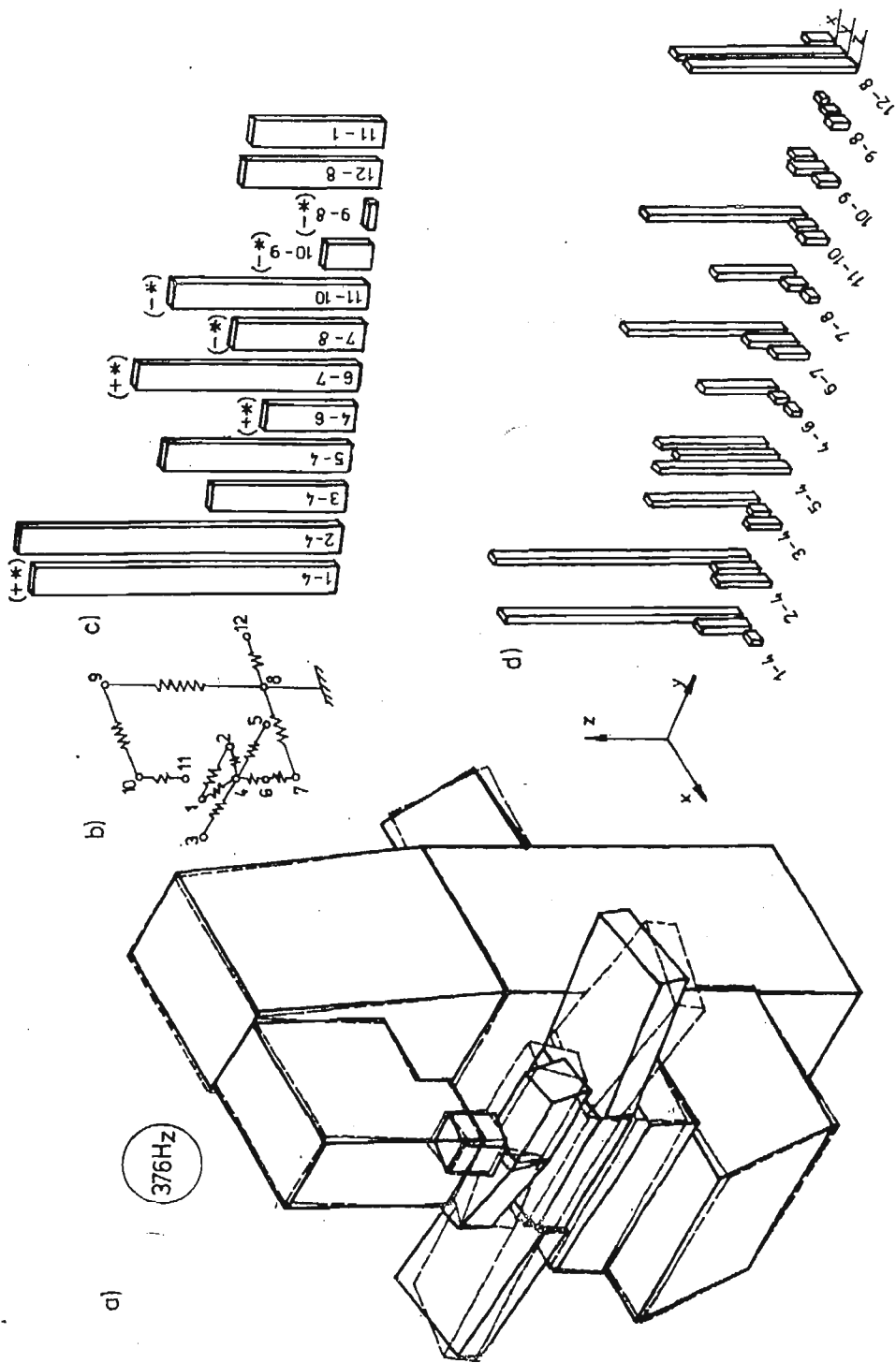
Jednym z ważniejszych celów prezentowanej pracy jest badanie postaci drgań obrabiarek. Zgodnie więc z założeniami metody zbudowano model obrabiarki (rys. 1) i dla przyjętego wariantu jej pracy (przypadku skrawania stwarzającego określony stan obciążenia obrabiarki) wykonano pomiary [11; 12]. Na każdej z umownie sztywnych brył instalowano po 6 czujników sejsmicznych (jak na rys. 3) i wyznaczano charakterystyki częstotliwościowe. W ramach niniejszej pracy dla zilustrowania wyników przedstawiono dwie postacie drgań (56 Hz — rys. 8 i 376 Hz — rys. 9) jednej z wielu przebadanych frezarek pionowych. Zachowanie się obrabiarki podczas drgań przy tych częstotliwościach można ocenić w oparciu o obraz przedstawiony w lewej części omawianych rysunków. Są to w odpowiednim powiększeniu dwie skrajne fazy ruchu badanej obrabiarki. Obraz taki rysowany jest przez komputer [8] na podstawie wyznaczonych doświadczalnie charakterystyk oraz danych geometrycznych obrabiarki. Swoboda wyboru położenia obserwatora względem drgającej obrabiarki stwarza możliwość oglądania jej z wielu stron. Ten płaski obraz może stać się więc bardziej plastyczny i informacja o ruchu obiektu pełniejsza.

Istotnym uzupełnieniem prezentacji wyników badań jest możliwość wygenerowania wielu obrazów drgającej obrabiarki, będących kolejnymi fazami jej ruchu. Podanie kolejnych obrazów w odpowiednim tempie na monitor komputera pozwala uzyskać ruchomy obraz drgającej obrabiarki.

Postacie drgań układów tłumionych opisują liczby zespolone. Rzeczywiste zachowanie się obrabiarki w takiej sytuacji poprawniej może pokazać właśnie ruchomy jej obraz. Taka analiza pozwala na jakościową ocenę badanego obiektu. Do oceny ilościowej potrzeb-



Rys. 8. Postać drgań frezarki pionowej przy częstotliwości 56 Hz



Rys. 9. Postać drgań frezarki pionowej przy częstotliwości 376 Hz

na jest informacja o udziałach poszczególnych zespołów obrabiarki (w tym przypadku brył traktowanych jak sztywne) w drganiach względnych między narzędziem i przedmiotem obrabianym. Przyjęty model pomiarowy oraz wynikająca stąd możliwość transformowania przemieszczeń zadanie to czynią realnym. Na rys. 8b przedstawiony jest schematycznie układ obrabiarki, na którym widać łańcuch brył „obejmujących” proces skrawania. Są to bryły: 1 lub 2, 4, 6, 7, 8, 9, 10 i 11. Wszystkie one mają wpływ na przemieszczenia narzędzia względem przedmiotu obrabianego.

Na podstawie przeprowadzonych pomiarów bezwzględnych drgań wszystkich elementów przyjętego modelu obrabiarki (rys. 1), można wyznaczyć drgania względne występujące między stykającymi się bryłami. Miarą wielkości amplitud drgań występujących między narzędziem i przedmiotem jest na rys. 8c słupek oznaczony numerem 11-1. Jest on miarą różnicy współrzędnych ruchu elementu 11 i elementu 1, określonej w punkcie ich styku. Słupki pozostałe informują o amplitudach drgań względnych między kolejnymi bryłami (zgodnie z naniesionym na nich opisem). Zostały one wyznaczone w płaszczyźnie styku między odpowiednimi elementami, a następnie przetransformowane do punktu styku narzędzia z przedmiotem obrabianym (N-P). Z rys. 8b widać, że drgania względne (N-P) wyznaczyć można także jako sumę drgań względnych brył „obejmujących” proces skrawania (na rys. 8c zaznaczono je gwiazdkami). Sumowanie nie odbywa się jednak wprost, gdyż część z tych elementów wykonuje drgania przesunięte w fazie o ok. 180° w stosunku do pozostałych. Bardzo dobrze uwidacznia to film. Rysunek (8a i 9a) niestety w tym zakresie jest nieczytelny, wobec czego na histogramie (8c i 9c) obok gwiazdek dla rozróżnienia faz podano znak „+” lub „-”. Tak więc w prawej części rysunków 8 i 9 (c i d) przedstawione są histogramy pokazujące wpływ drgań względnych poszczególnych brył na amplitudy drgań występujących między narzędziem i przedmiotem. Przykładowo słupek histogramu oznaczony numerem 1-4 informuje o tym, jak duży udział w drganiach między narzędziem i przedmiotem ma ruch przedmiotu obrabianego (element nr 1) względem środkowej części stołu (element nr 4). Na rys. 8c i 9c udziały wszystkich brył (w sensie amplitudowym) zrzutowane zostały na kierunek, w którym amplitudy drgań względnych narzędzia i przedmiotów są największe. Tę samą informację lecz w rozbiciu na współrzędne przedstawia rys. d. Na podstawie tak przedstawionych wyników łatwo wskazać ogniwa, które są najsłabsze w badanej frezarce. Z przedstawionych rysunków wynika, że przy częstotliwości 56 Hz najsłabszym ogniwem frezarki jest grupa wrzecionowa wraz z narzędziem skrawającym, natomiast przy częstotliwości 376 Hz — elementy mocujące przedmiot obrabiany. Mimo iż silnik (element nr 12) nie uczestniczy bezpośrednio w łańcuchu brył „zamykających” proces skrawania — rys. 8b i 9b, to jednak sposób jego mocowania winien być zmieniony (rys. 8 i 9), gdyż tak znaczna masa zamocowana jest do korpusu obrabiarki za pomocą zbyt podatnych elementów, wobec czego amplitudy drgań silnika są znaczne. Mogą więc zaistnieć takie sytuacje, kiedy staje się on generatorem drgań całej obrabiarki.

6. Podsumowanie

Przedstawiona w pracy metoda badawcza umożliwia zarówno jakościową jak i ilościową ocenę właściwości dynamicznych układów nośnych (w tym również obrabiarek) na pod-

stawie analizy postaci drgań. Przyjęty model badawczy oparty na założeniach metody SES sprawia, że w łatwy sposób można określić udziały badanych zespołów obrabiarki w drganiach względnych między narzędziem i przedmiotem obrabianym. Powyższy model umożliwia także skrócenie czasu badań w związku z ograniczeniem do sześciu liczby czujników niezbędnych do pomiaru drgań poszczególnych elementów badanego urządzenia.

Testy efektywności procedur aproksymacji doświadczalnie wyznaczonych charakterystyk częstotliwościowych pokazują, że uzyskanie zadowalających wyników wymaga stosunkowo dużej liczby iteracji procesu obliczeniowego. Czas trwania takich obliczeń jest jednak nieporównywalnie krótszy od czasu wykonania samych badań, nie stanowi zatem istotnego problemu. Aproksymacja charakterystyk prowadzi do wygładzenia ich przebiegu, co zmniejsza błędy losowe, jakimi mogą być obciążone charakterystyki doświadczalne przed aproksymacją.

W rozważaniach dotyczących transformacji wskazano na możliwość wykonywania tych operacji także na charakterystykach aproksymujących (opisanych zależnością 12).

Wyniki badań doświadczalnych (przedstawione przykładowo na rys. 8 i 9) stanowią bardzo czytelną informację o zachowaniu się obrabiarki podczas drgań z określoną częstotliwością rezonansową.

Można więc stwierdzić, iż opracowana i przedstawiona w pracy metoda badań obiektów dynamicznych może być szczególnie przydatna przy badaniach prototypowych obrabiarek, gdyż na podstawie otrzymanych plastycznych obrazów zachowania się badanej obrabiarki przy danych wymuszeniach umożliwia wskazanie w sposób bezbłędny ogniwa najsłabszego z punktu widzenia jego udziału w drganiach między narzędziem i przedmiotem obrabianym. Umożliwia to konstruktorowi w sposób efektywny wpłynąć na minimalizację tych drgań. Jednocześnie metoda ta pozwala na zbadanie całego obiektu dynamicznego, jakim jest obrabiarka, przy użyciu tylko siedmiu czujników pomiarowych. Opracowana metoda aproksymacji i transformacji charakterystyk wyznaczonych doświadczalnie umożliwia przechowywanie ich w formie niewielkich tablic ze współczynnikami wielomianów aproksymujących.

Literatura

1. W. LISEWSKI, P. GUTOWSKI, *Wykorzystanie analizy modalnej do badania układów dynamicznych o wielu stopniach swobody*, Mechanika Teoretyczna i Stosowana, 1987 nr 4.
2. R. SNOEYS, U. ROESEMS, U. VANDEURZEN, P. VANHONACKER, *Survey of Modal Analysis Applications*, CIRP Ann. 1979, Vol. 28 nr 2 s. 497.
3. M. WECK, K. TEPPEL, *Dynamisches Verhalten Spanender Werkzeugmaschinen*, Berlin, Springer — Verlag 1977.
4. В. А. КУДИНОВ, В. А. КОЦИНЕВ, Е. И. ШИБАНОВ, *Испытания токарных станков на виброустойчивость методом резания*, Станки и Инструмент, 4, 1978.
5. J. KRUSZEWSKI i in., *Metoda sztywnych elementów skończonych*, Warszawa, Arkady 1975.
6. J. BARAN, *Zastosowanie dynamiki ruchu przestrzennego ciała sztywnego z więzami do teorii identyfikacji obiektu modelowanego nieswobodnym ciałem sztywnym*, Prace Naukowe Politechniki Szczecińskiej Nr 60, Szczecin 1976.
7. В. С. ГОУБЕВ, *О разделении колебаний твёрдого тела на компоненты с помощью пьезоэлектрических датчиков*, Машиноведение, 5, 1967, Москва.

8. A. KORYCKI, W. LISEWSKI, Z. MINCIEL, *Wykorzystanie komputera do detekcji słabych ogniw obrabiarki*, Mater. Konf. nt. Zastosowanie komputerów w przemyśle. Tom 3. Szczecin 1983.
9. J. PETERS, W. MERGEAY, *Dynamic Analysis of Machine Tools Using Complex Modal Method*, CTRP Ann 1976 Vol. 25 nr 1 s. 257.
10. E. K. PRÖSSLER, *Experimentell — rechnerische Analyse von Maschinenschwingungen*, VDI-Verlag, Düsseldorf 1981.
11. A. BODNAR i inni, *Metodyka doświadczalnego wyznaczania częstotliwościowych charakterystyk obrabiarek* (w druku).
12. A. BODNAR, W. LISEWSKI, *O potrzebie korygowania charakterystyk dynamicznych skazonych wpływem siłownika*, Postępy Technologii Maszyn i Urządzeń, 1981 zesz. 1.

Резюме

ПРИМЕНЕНИЕ ЭЛЕМЕНТОВ МОДАЛЬНОГО АНАЛИЗА К ДИНАМИЧЕСКИМ ИССЛЕДОВАНИЯМ СТАНКОВ

В статье представлены примеры использования элементов модального анализа в динамических исследованиях металлорежущих станков. Для экспериментально определённых амплитудно-фазово-частотных характеристик показаны эффекты их аппроксимации при использовании метода описанного в предыдущей статье [1]. Показано, что после аппроксимации частотные характеристики возможно трансформировать согласно правилам движения жёсткого тела. Наконец, в статье представлены результаты исследований различных станков, показывающие возможность указания их слабого звена.

Summary

PRACTICAL APPLICATIONS OF THE MODAL ANALYSIS ELEMENTS TO DYNAMICAL TEST OF MACHINE TOOLS

The examples of the application of modal analysis in dynamic tests of machine tools have been presented in this paper. For experimentally obtained frequency characteristics the effects of approximation have been shown by the use of the previously described [1] method. It has been proved that the frequency characteristics can be transformed after the approximation in conformity with the principles of the rigid body motion.

Finally, the results of tests made on various machine tools have been presented. These tests enabled to indicate the weakest point in the machine.

Praca wpłynęła do Redakcji dnia 18 maja 1987 roku.
