MECHANIKA
TEORETYCZNA
I STOSOWANA
1/2, 25, 1987

PRZYBLIŻONA METODA BADANIA RUCHU OBROTOWEGO OBIEKTÓW LATAJĄCYCH

JÓZEF GACEK
Wojskowa Akademia Techniczna

1. Wstęp

Badanie ruchu niekierowanego obiektu latającego (OL) w atmosferze sprowadza się do analizy silnie nieliniowych równań różniczkowych ruchu. Współczesne maszyny matematyczne umożliwiają analizę wymienionych równań, lecz trzeba na ten cel przeznaczyć dużo czasu maszynowego, szczególnie w przypadkach, gdy zachodzi potrzeba zbadania wpływu na ruch OL wielu parametrów np: charakterystyk konstrukcyjnych i aerodynamicznych OL, parametrów atmosfery, warunków lotu itp. Poza tym wydłużenie czasu maszynowego wynika z konieczności stosowania odpowiednio małego odstępu całkowania, w przypadkach badania ruchu OL charakteryzującego się szybkimi zmianami kinematycznych parametrów ruchu, a w szczególności parametrów opisujących ruch dookoła środka masy. Stąd wynika potrzeba szukania przybliżonych rozwiązań analitycznych, które umożliwiłyby w szybki i ekonomiczny sposób określić charakterystyki ruchu OL. Innym powodem uzasadniającym celowość stosowania rozwiązań przybliżonych jest różna szybkość zmian parametrów toru środka masy OL (prędkość, wysokość) i zmian kinematycznych parametrów charakteryzujących ruch dookoła środka masy (kąty natarcia i ślizgu). W celu oszacowania wspomnianej różnicy w szybkości zmian parametrów ruchu lub porównania małych wielkości wygodnie jest wprowadzić mały bezwymiarowy parametr (zbiór małych parametrów) umożliwiający otrzymywanie asymptotycznych rozwiązań równań ruchu OL.

2. Równania i założenia wyjściowe

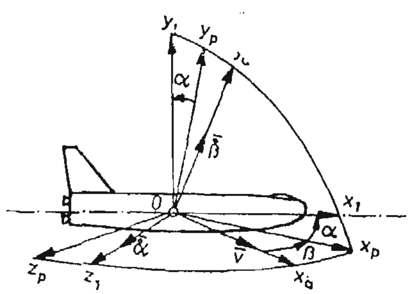
Możliwość uzyskania w sposób szybki i ekonomiczny rozwiązania dowolnego zagadnienia z dynamiki lotu w dużym stopniu zależy od postaci równań ruchu obiektu latającego. Stąd też poszczególnym rodzajom zadań odpowiadają swoiste, najbardziej racjonalne sposoby zapisu równań problemu [3], [4], [6]. Okazuje się, że podczas badania ruchu OL charakteryzującego się płaszczyzną symetrii wygodnie jest posłużyć się równaniami w półzwiązanym układzie osi współrzędnych $0x_p y_p z_p$ (rys. 1), natomiast przy rozpatrywaniu ruchu osiowo-symetrycznego OL (szczególnie przy dużych kątach natarcia) — w układzie osi współrzędnych związanych z przestrzennym kątem natarcia α_{prz}, czyli układem $0x_\alpha y_\alpha z_\alpha$ (rys. 2).

Równania ruchu OL dookoła środka masy w układzie związanym $Ox_1y_1z_1$ napisać w postaci

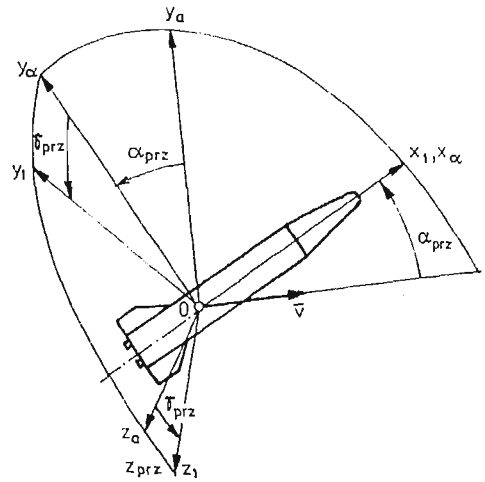
$$\frac{d\bar{L}}{dt}+\bar{\omega}\times\bar{L}=\bar{M} \tag{2.1}$$

gdzie: $\bar{\omega}, \bar{L}$ — wektor prędkości kątowej i kręt OL,

$\bar{M}$ — wektor momentu aerodynamicznego.



Rys. 1. Układy osi współrzędnych: prędkościowy $0x_a y_a z_a$, związany $0x_1y_1z_1$ i półzwiązany $0x_p y_p z_p$



Rys. 2. Układy osi współrzędnych związane z przestrzennym kątem natarcia.

Kąty natarcia α i ślizgu β od których w głównej mierze zależą siły i momenty aerodynamiczne można wyznaczyć z zależności:

$$\alpha = \mathrm{arctg}(-v_{y_1}/v_{z_1})$$
$$\beta = \mathrm{arctg}[v_{z_1}(v_{x_1}^2+v_{y_1}^2)^{-0,5}]$$

gdzie: $v_{x_1}, v_{y_1}, v_{z_1}$ są składowymi wektora prędkości OL w związanym układzie osi współrzędnych $0x_1y_1z_1$ (rys. 1).

Do określenia zmian kątów α i β w czasie lotu OL sformułowano następujące równania:

$$\dot{\alpha} = -\omega_{x_1}\cos\alpha\,\mathrm{tg}\beta+\omega_{y_1}\sin\alpha\,\mathrm{tg}\beta+\omega_{z_1}-(c_{y_p}qS+ -mg\cos\Theta\cos\gamma)(mv\cos\beta)^{-1} \tag{2.2}$$

$$\dot{\beta} = \omega_{x_1}\sin\alpha+\omega_{y_1}\cos\alpha+[(c_{x_p}\sin\beta+c_{z_p}\cos\beta)qS+ +mg\cos\Theta\sin\gamma](mv)^{-1} \tag{2.3}$$

$$\dot{\gamma} = \omega_{x_1}\cos\alpha\cos^{-1}\beta-\omega_{y_1}\sin\alpha\cos^{-1}\beta+\{[c_{y_p}\cos\gamma+ -(c_{x_p}\sin\beta+c_{z_p}\cos\beta)\sin\gamma]qS(m\dot{v})^{-1}-(v^{-1}+ -vr^{-1})g\cos\Theta\}\mathrm{tg}\beta\cos\gamma+(\sin\beta\sin\gamma+\cos\beta tg\Theta)[c_{y_p}\sin\gamma+ +c_{x_p}\sin\beta+c_{z_p}\cos\beta)\cos\gamma]qS(mv\cos\beta)^{-1} \tag{2.4}$$

gdzie γ — kąt przechylenia.

Występujące w powyższych równaniach wielkości v, Θ, y (rys. 3.) można określić w wyniku rozwiązania równań:

$$m\dot{v} = c_{x_p}\cos\beta - c_{z_p}\sin\beta - mg\cos\Theta \tag{2.5}$$

$$mv\dot{\Theta} = [c_{y_p}\cos\gamma - (c_{x_p}\sin\beta + c_{z_p}\cos\beta\sin\gamma]qS - mg(v^{-1} - vr^{-1})\cos\Theta \tag{2.6}$$

$$\dot{y} = v\sin\Theta \tag{2.7}$$

Dla OL osiowo-symetrycznych słuszny jest związek

$$c_{x_p}\cos\beta - c_{z_p}\sin\beta = c_{x_a}(\alpha_{prz})$$

Jeśli ograniczymy dalsze rozważania do przypadku ruchu ciała charakteryzującego się symetrią osiową oraz pominiemy wpływ sił grawitacyjnych na jego ruch obrotowy, to równanie (2.2) w zastosowaniu do określenia zmian przestrzennego kąta natarcia możemy zapisać w następującej postaci

$$\dot{\alpha}_{prz} = \omega_{z_p} - c_{y_a}(\alpha_{prz})qS(mv)^{-1} \tag{2.8}$$

Przyjmiemy również, że w przypadku ruchu ciała osiowo-symetrycznego wypadkowy wpływ siły aerodynamicznej na zmianę kąta Θ jest pomijalnie mały, co pozwala odrzucić człon w nawiasie kwadratowym równania (2.6). Przy zastosowaniu metody małego parametru często przyjmuje się, że parametry v, Θ, y zmieniają się wolno, co pozwala wprowadzić do prawych stron równań (2.5)÷(2.7) mały parametr μ.

3. Określenie parametrów płaskiego ruchu wahadłowego OL za pomocą metody małego parametru

Ruch obrotowy (wokół środka masy) OL będzie uważany za płaski, jeżeli jego początkowa prędkość kątowa będzie równikowa ($\omega_{x_1} = 0$) i normalna do płaszczyzny kąta natarcia, a kierunek wektora prędkości w rozpatrywanym przedziale czasu będzie ulegał niewielkim zmianom.

Równanie opisujące płaski ruch OL dookoła środka masy przy uwzględnieniu założeń przyjętych w punkcie 2 oraz zastosowaniu metody małego parametru można przedstawić w postaci

$$\ddot{\alpha} + \mu(F_1 + F_2)\dot{\alpha} - F_3 = 0 \tag{3.1}$$

gdzie

$$F_1 = 0{,}5c_{y_a}(\alpha)qvSm^{-1} \qquad \alpha_{prz} = |\alpha|$$

$$F_2 = 0{,}5m_z^{\bar{\omega}_{z_1}}qvSlJ_{z_1}^{-1} \qquad m_{z_1}^{\bar{\omega}_{z_1}} = \frac{dm_{z_1}}{d\bar{\omega}_{z_1}} = m_{z_1\alpha}^{\bar{\omega}_{z\alpha}}$$

$$F_3 = 0{,}5m_{z_1}(\alpha)qv^2SlJ_{z_1}^{-1} \qquad \bar{\omega}_{z_1} = \omega_{z_1}l/v$$

Zauważmy, że równanie (3.1) jest równaniem typu

$$\ddot{x} - \mu\Phi_1(\tau, x, \dot{x}) + \Phi_2(\tau, x) = 0 \tag{3.2}$$

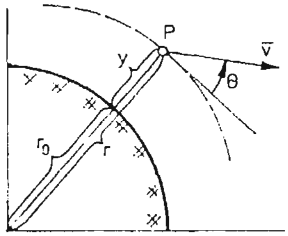
opisującym swobodny ruch wahadłowy o wolno zmieniających się parametrach. Rozwiązanie równania można przedstawić w postaci

$$x = x_0(\tau, d, \psi) + \mu x_1(\tau, d, \psi) + \mu^2 x_2(\tau, d, \psi) + \ldots \tag{3.3}$$

gdzie: — funkcje x_i są okresowe względem zmiennej ψ $x_i(\tau, d, \psi) = x_i(\tau, d, \psi+2\pi)$
— czas bezwymiarowy $-\tau = \mu t$
— d — wolno zmieniający się parametr określający amplitudę wahań układu. Przyjmiemy, że d będzie maksymalną wartością zmiennej x uzyskiwaną w ruchu wahadłowym.

Zmianę wielkości d i ψ opisują równania

$$\left.\begin{aligned} \dot{d} &= \mu C_1(\tau, d)+\mu^2 C_2(\tau, d)+ \ldots \\ \dot{\psi} &= \omega_0(\tau, d)+\mu\omega_1(\tau, d)+\mu^2\omega_2(\tau, d)+ \ldots \end{aligned}\right\} \tag{3.4}$$



Rys. 3. Schemat określenia wielkości r, Θ, y, r_0, v

Poszukując rozwiązań asymptotycznych rozłożymy w szereg Taylora (względem μ) funkcję $\Phi_1(\tau, x, \dot{x})$ podstawimy do równania (3.2) przyrównując do zera wszystkie człony małe wyższych rzędów:

$$\omega_0^2(\tau, d)\frac{\partial^2 x_0}{\partial\psi^2}+\Phi_2(\tau, x_0) = 0 \tag{3.5}$$

$$\begin{aligned} \omega_0^2\frac{\partial^2 x_1}{\partial\psi^2}+\frac{\partial\Phi_2}{\partial x}(\tau, x_0)x_1 &= -2\omega_0\frac{\partial^2 x_0}{\partial\psi\partial\tau}-\frac{\partial x_0}{\partial\psi}\frac{\partial\omega_0}{\partial\tau}+ \\ &+\varphi_1\left(\tau, x_0, \omega_0\frac{\partial x_0}{\partial\psi}\right)-\left(2\omega_0\frac{\partial^2 x_0}{\partial\psi\partial d}+\frac{\partial\omega_0}{\partial d}\frac{\partial x_0}{\partial\psi}\right)C_1+ \\ &-2\omega_0\omega_1\frac{\partial^2 x_0}{\partial\psi^2} = \overline{h}_1 \end{aligned} \tag{3.6}$$

. . . .

$$\begin{aligned} \omega_0^2\frac{\partial^2 x_l}{\partial\psi^2}+\frac{\partial\Phi_2}{\partial x}(\tau, x_0)x_l &= h_l-\left(2\omega_0\frac{\partial^2 x_0}{\partial\psi\partial d}+\frac{\partial\omega_0}{\partial d}\frac{\partial x_0}{\partial\psi}\right)C_l+ \\ &-2\omega_0\omega_l\frac{\partial^2 x_l}{\partial\psi^2} = \overline{h}_l \end{aligned} \tag{3.7}$$

Równanie (3.5) określa sposób zachowania się rozwiązania w jednym okresie wahań, czyli opisuje zależność funkcji $x_0(\tau, d, \psi)$ od ψ. Funkcję $\omega_0(\tau, d)$ określa się z warunku, aby okres funkcji $x_0(\psi)$ wynosił 2π.

$$\omega_0(\tau, d) = \pi\left\{\int_{d_{min}}^{d}\left[2\int_{x}^{d}\Phi_2(\tau, x_1)dx_1\right]^{-0,5}\right\}^{-1} \tag{3.8}$$

gdzie: $\int_{d_{min}}^{d}\Phi_2(\tau, x) = 0$

W wyniku analizy równania (3.6) można sformułować dwa warunki jakie musi spełnić jego prawa strona, aby funkcja $x_1(\tau, d, \psi)$ była również okresowa względem ψ (o okresie 2π). Warunki te pozwalają sformułować wyrażenie na C_1, ω_1 oraz x_1. Postępując analogicznie z równaniem na x_2, po wykorzystaniu warunku okresowości funkcji x_2 znajdujemy C_2, ω_2, x_2 itd. Metoda z niewielkimi poprawkami znajduje również zastosowanie dla przypadku ruchu obrotowego. Przejście od ruchu obrotowego do ruchu wahadłowego (lub odwrotnie) możliwe jest gdy:

$$\Phi_1(\tau, x, \dot{x}) = 0 \quad \text{oraz} \quad \frac{\partial \Phi_2}{\partial \tau}(\tau, x) \neq 0$$

Całka

$$N_T = \int_{\psi_w}^{\psi_w + 2\pi} \omega_0 \left(\frac{\partial x_0}{\partial \psi} \right) d\psi \tag{3.9}$$

w przypadku obydwu tych ruchów wynosi:

— dla ruchu wahadłowego

$$N_{T_{wah}} = 2 \int_{x_{min}}^{x_{max}} \dot{x}(\tau, x) dx \tag{3.10}$$

— dla ruchu obrotowego

$$N_{T_{obr}} = \int_{-\pi}^{\pi} \dot{x}(\tau, x) dx \tag{3.11}$$

Związek między tymi całkami można określić następująco

$$N_{T_{wah}} = 2N_{T_{obr}} \tag{3.12}$$

Zależność (3.12) jest słuszna w przypadku, gdy nie są naruszone warunki stosowalności metody małego parametru. Warunki te będą naruszone gdy okres wahań

$$T_{wah} = 2T_{obr} = 2 \int_{x_{min}}^{x_{max}} [\dot{x}(\tau, x)]^{-1} dx$$

rośnie nieskończenie w punkcie przejścia od ruchu obrotowego do wahadłowego ($x_{max} \to \pi$ $x_{min} \to -\pi$).

3.1. Zastosowanie metody do badania ruchu obrotowego podczas wejścia OL (ponownego) w atmosferę. Jako warunki początkowe ruchu przyjmiemy parametry ruchu odpowiadające wysokości przyjętej za granicę atmosfery ($y = Y$).

$$\alpha(t_0) = \alpha_0; \quad \frac{d\alpha}{dt}(t_0) = \dot{\alpha}(t_0) = \omega_{z_{1_0}} \tag{3.13}$$

Na części toru $y > Y$ OL wykonuje równomierny ruch obrotowy wokół osi $0z_1$ (wpływ momentów aerodynamicznych na ruch OL jest pomijalnie mały). W miarę jak rośnie ciśnienie dynamiczne q na skutek wzrostu gęstości powietrza ϱ równomierność obrotu zostaje zakłócona i począwszy od pewnej chwili czasu (wysokości y) ruch obrotowy przechodzi w ruch wahadłowy.

Stosując opisaną na początku punktu 3 metodę do określenia zmian amplitudy wahań OL przyjmiemy dodatkowo następujące założenia upraszczające:

— pomijamy tłumienie aerodynamiczne,

— zmiana prędkości OL nie zależy od kąta natarcia.

Na podstawie zależności (3.12) w odniesieniu do warunków zadania można napisać

$$N_T = \int_{\alpha_{min}}^{\alpha_{max}} \dot{\alpha}(\tau, \alpha) d\alpha =$$

$$= 2 \int_{\alpha_{min}}^{\alpha_{max}} -\left[2qSl\bar{J}_{z_1} \int_{\alpha_{min}}^{\alpha_{max}} m_{z_1}(\alpha_1) d\alpha_1\right]^{0,5} d\alpha = 2\pi\omega_{z_{1_0}} \tag{3.14}$$

$$\text{gdzie } \bar{J}_{z_1} = \frac{1}{J_{z_1}}$$

W przypadku dostatecznie dużych q amplituda α_{max} może przyjmować niewielkie wartośc

$$N_T \approx \int_{\alpha_{min}}^{\alpha_{max}} [m_{z_1}^{\alpha} qSl\bar{J}_{z_1}(\alpha_{max}^2 - \alpha^2)]^{0,5} d\alpha = 0,5\pi(-m_{z_1}^{\alpha} qSl\bar{J}_{z_1})^{0,5}\alpha_{max}^2 \tag{3.15}$$

Skąd po uwzględnieniu (3.14) otrzymujemy

$$\alpha_{max} \approx 2\omega_{z_{1_0}}^{0,5}(-qSlm_{z_1}^{\alpha}\bar{J}_{z_1})^{-0,5} \tag{3.16}$$

3.2. Sprawdzenie stosowalności metody na odcinku przejścia od ruchu obrotowego do wahadłowego. Przejście od ruchu obrotowego do ruchu wahadłowego odbywa się na dostatecznie dużych wysokościach, gdzie prędkość i kąt nachylenia toru są praktycznie równe prędkości i kątowi wejścia w atmosferę a tłumienie aerodynamiczne odgrywa niewielką rolę [2]. Biorąc powyższe pod uwagę równanie (3.1) dla odcinka przejścia po odpowiednich przekształceniach możemy napisać w postaci

$$\ddot{\alpha} + \xi^2 \exp(2\eta t) m(\alpha) = 0 \tag{3.17}$$

gdzie:

$$\xi = [0,5|m_{z_1}^{\alpha}|Sl\bar{J}_{z_1} v_0 \varrho(t_0)]^{0,5}$$

$$\eta = 0,5\varkappa v_0|\sin\Theta_0| = 0,5\varkappa v_0 p$$

$$\varrho(y) = \varrho(t_0)\exp[-\varkappa(y - Y)]$$

$$m(\alpha) = \frac{m_{z_1}(\alpha)}{m_{z_1}(0)}$$

Podczas sprawdzania stosowalności zaproponowanej metody na odcinku przejścia od ruchu obrotowego do ruchu wahadłowego do obliczeń przyjęto rakietę hipotetyczną o następujących podstawowych charakterystykach:

— długość rakiety — 9.8 [m],

— średnica kadłuba — 1.85 [m],

— masa rakiety na badanym odcinku toru — 1500 [kg],

— prędkość rakiety podczas wejścia (ponownego) do atmosfery — 1700 $\left[\frac{\text{m}}{\text{s}}\right]$,

— wierzchołkowa toru — 140 000 [m],

— kąt nachylenia toru podczas wejścia w atmosferę

$$0.5\,[\text{rad}] \leqslant \Theta_0 \leqslant 1.0\,[\text{rad}]$$

— początkowy kąt natarcia podczas wejścia do atmosfery

$$0 \leqslant \alpha_0 \leqslant 2\pi.$$

Na podstawie wyników otrzymanych z rozwiązania równania (3.17) możemy dla rakiety hipotetycznej określić funkcję warunków początkowych $\Phi(x, \bar{\alpha}_0)$, gdzie $x = \omega_{z_{10}}\eta^{-1}$. Wartości liczbowe funkcji $\Phi(x, \bar{\alpha}_0)$ dla rakiety hipotetycznej o sinusoidalnej charakterystyce momentu zawiera tabela 1.

Tabela 1

x \ $\bar{\alpha}_0$	$\frac{\pi}{36}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	π
0.0	3.843	2.521	1.804	1.336	0.820	0.392	0.0
0.5	4.007	2.620	1.997	1.492	1,076	0.778	0.608
1.0	4.256	2.805	1.161	1.776	1.472	1.304	1.209
2.0	4.544	3.324	2.797	2.528	2.409	2.244	3.156
5.0	5.734	4.736	4.404	4.248	4.144	4.074	4.054

Wprowadzając nową zmienną niezależną z

$$z = \xi\eta^{-1}\exp(\eta t)$$

równanie (3.17) przekształcamy do postaci

$$\frac{d^2\alpha}{dt} + z^{-1}\frac{d\alpha}{dt} + m(\alpha) = 0 \tag{3.18}$$

Równanie (3.18) rozwiązuje się dla warunków początkowych

$$\alpha(z_0) = \alpha_0; \quad \frac{d\alpha}{dz}(z_0) = \frac{x}{z_0}$$

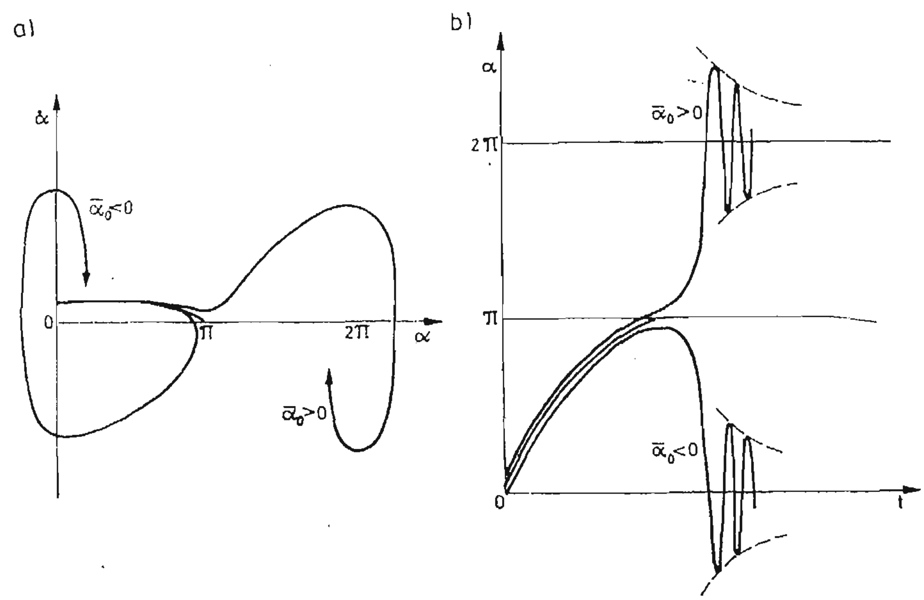
gdzie

$$x = \omega_{z_{10}}\eta^{-1}$$

Obliczenia pokazują, że dla dużych wartości z i dowolnych wartości $\bar{\alpha}_0$ i $\omega_{z_{10}}$ wartość amplitudy kąta natarcia jest proporcjonalna do $z^{-0,5}$, czyli

$$\alpha_{max} = \Phi(x, \bar{\alpha}_0)\bar{z}^{0,5} = \Phi(x, \bar{\alpha}_0)\eta^{0,5}\{-2\xi/[v_0^2\varrho(t_0)]\}^{-0,25} \tag{3.19}$$

Okazało się również, że dla pewnych wartości x, z_0, α_{0_p} funkcja Φ posiada nieograniczony pik. Stąd też funkcję tę zbudowano dla wartości $\bar{\alpha}_0 = \alpha_0 - \alpha_{0_p}$. Przyczyną powstania piku są warunki ruchu powodujące, że ciało znajduje się w położeniu równowagi niestatecznej. Przy nieuwzględnieniu wiatru i zmiany kierunku wektora prędkości i zadaniu prędkości kątowej $\omega_{z_{1_0}}$ w rozrzedzonych warstwach atmosfery można dobrać takie wartości kąta natarcia, że trajektoria fazowa $\dot{\alpha}(\alpha)$ będzie się kończyła w punkcie: $\alpha = \pi$, $\dot{\alpha} = 0$ (rys. 4.a). W tym przypadku OL znajduje się w obszarze położenia niestatecznego w ciągu bliżej nie określonego długiego okresu czasu. Z tego wynika, że przy małej zmianie początkowego kąta natarcia OL będzie znajdował się w obszarze $\alpha = \pi$ przez długi okres czasu. Po wyjściu z obszaru równowagi niestatecznej OL będzie wykonywał wahania o stosunkowo dużej amplitudzie (rys. 4.b). Wyniki obliczeń opisanego ruchu powinny być uwzględnione w procesie konstrukcyjnym OL. Ruch niestateczny może wystąpić przy dowolnych



Rys. 4. Przykładowe zmiany $\dot{\alpha}(\alpha)$ i $\alpha(t)$ OL w położeniu równowagi niestatecznej.

wartościach x. Funkcja $\Phi(\bar{\alpha}_0)$ jest symetryczna. Φ_{min} występuje przy $\bar{\alpha}_0 = \pm\pi$. Na podstawie wyników obliczeń stwierdzono, że przy $x \to \infty$ wartość oczekiwana funkcji $\Phi(x, \bar{\alpha}_0)$ dąży do $2\sqrt{x}$. Oznacza to, że przy $x \to \infty$ iloraz $\Phi(x, \alpha_0)/2\sqrt{x}$ dla dowolnych wartości $\bar{\alpha}_0$ dąży do jedności. Podstawiając wartość $\Phi(x, \bar{\alpha}_0) = 2\sqrt{x}$ do równości (3.19), w wyniku otrzymuje się zależność (3.16). Z kolei przy $x \to 0$ wartości funkcji $\Phi(x, \bar{\alpha}_0)$ dążą do osiągnięcia wartości granicznych. Można przyjąć, że już przy $x < 0.5$ wartości funkcji $\Phi(x, \bar{\alpha}_0)$ prawie nie zależą od wartości x. Ma to szczególnie miejsce dla małych wartości $\bar{\alpha}_0$.

3.3. Przybliżony sposób uwzględnienia tłumienia aerodynamicznego na amplitudę wahań OL. Rozpatrując ruch wahadłowy OL na części toru, gdzie można zastosować metodę małego parametru oraz uwzględniając wpływ kąta natarcia na współczynnik oporu c_{x_a} można otrzymać zależności opisujące zmianę amplitudy okresu wahań T_{wah} w wyniku zmian:

a) Ciśnienia dynamicznego $-q$,

$$\frac{(\delta\alpha_{max})_q}{\alpha_{max}} = -0{,}25\frac{\delta q}{q} = -\frac{0{,}25}{q}\frac{dq}{dt}T_{wah} = \frac{0{,}5\pi}{q}(-m_{z_1}^{\alpha}qSlJ_{z_1})^{0{,}5}\frac{dq}{dt} \tag{3.20}$$

Iloczyn $\frac{1}{q}\frac{dq}{dt}$ wyznaczymy w oparciu o rozwiązanie Allena-Eggersa [1]

$$\frac{1}{q}\frac{dq}{dt} = -\varkappa vp[1-c_{x_a}qS(\varkappa mp)^{-1}]$$

b) Tłumienia aerodynamicznego.

$$\frac{(\delta\alpha_{max})_a}{\alpha_{max}} = \pi|c^{\alpha}_{y_a} - \overline{m}^{\omega_{z_1}}_{z_1} ml^2\overline{J}_{z_1}|\left[\frac{\varrho Sl}{2m}\frac{J_{z_1}}{ml^2|m^{\alpha}_{z_1}|}\right]^{0,5} =$$

$$= \pi|c^{\alpha}_{y_a} - \overline{m}^{\omega_{z_1}}_{z_1} ml^2\overline{J}_{z_1}|[2\varrho Sl^3m^3J_{z_1}(|m^{\alpha}_{z_1}|)^{-1}]^{0,5}$$

Podczas obliczeń należy mieć na uwadze, że początkowy kąt natarcia w rozrzedzonych warstwach atmosfery osiąga przypadkowe wartości i stąd zadanie oszacowania amplitudy wahań OL w gęstych warstwach można rozwiązać tylko w przybliżeniu nawet w przypadkach gdy zadana jest $\omega_{z_{1_0}}$.

Literatura

1. H. ALLEN, A. EGGERS, *A Study of the motion and aerodynamic heating of ballistic missiles entering the earth's atmosphere* — NASA Report 1958. No 138.
2. S. DUBIEL, *Asymptotyczna postać rozwiązania równań ruchu podłużnych statku kosmicznego po zanurzeniu w atmosferę ziemską.* Biul. WAT nr 11, 1964.
3. S. DUBIEL, *Zjawisko autorotacji podłużnej aparatów latających.* Biul. WAT nr 6 1971.
4. В. А. ЯРОШЕВСКИЙ, *Движение неуправляемого теля в атмосфере.* Машиностроение, Москва 1978.
5. Г. Е. КУЗМАК, *Асимптотические решения нелинейных дифференцяльных уравнений второго порядка с переменными коэффицентами.* Москва 1959.
6. И. В. ОСТОСЛАВСКИЙ, И. В. СТРАЖЕВА, *Динамика полёта.* Оборонгиз, Москва 1963.

Резюме

ПРИБЛИЖЕННЫЙ МЕТОД ИССЛЕДОВАНИЯ ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ ЛЕТАТЕЛЬНЫХ ОБЪЕКТОВ

В работе представлен аналитический метод исследования вращательного движения (вокруг центра масс) неуправляемого летательного объекта, характеризующегося осевой симметрией. Уравнения вращательного движения сформулированы в системе осей координат, связанной с пространственным углом атаки, что дает возможность исследовать это движение при произвольных углах атаки. Приведено описание метода, а также способ учета влияния аэродинамического затухания на амплитуду колебаний продольной оси осесимметричного летательного объекта в плоском вращательном движении.

Summary

APPROXIMATE METHOD OF INVESTIGATION OF THE ROTATIONAL MOTION OF FLYING OBJECTS

An analytical method of investigation of rotational motion (around the centre of mass) of a flying object without guidance characterizing the axial symmetry is presented. The equations of motion are formulated in a coordinate system the axes of which are related to the angle of incidence. This enables an investigation of the motion for various angles of incidence. The description of the method and the way of including the influence of aerodynamic damping on the amplitude of oscillations of longitudinal axis of axisymmetrical flying object in plane rotational motion is also discussed.

Praca wpłynęła do Redakcji dnia 19 marca 1986 roku