MECHANIKA
TEORETYCZNA
I STOSOWANA
1/2, 25, 1987

OPTYMALIZACJA ZWIĄZKÓW SPRZĘŻENIA W AUTOMATYCZNYM STEROWANIU LOTEM

MACIEJ MRÓZ

Wojskowa Akademia Techniczna

Automatyczne sterowanie lotem samolotu wymaga, aby oddziaływania sił zewnętrznych nie wpływały na charakter jego ruchu, a ewentualne efekty dynamiczne tych oddziaływań były jak najszybciej wytłumione. Zmiany w konstrukcji samolotu, a w szczególności wprowadzenie odpowiednich sprzężeń pomiędzy jego elementami wpływa zasadniczo na dynamikę lotu. Zadaniem optymalizacji jest zatem ustalenie takich związków między układem sterowania a parametrami konstrukcyjnymi samolotu, aby proces przejściowy wahań samolotu wywołany zewnętrznymi wymuszeniami był jak najszybciej wytłumiony.

1. Równania ruchu samolotu

Jako szczególny przypadek rozpatruje się podłużny ruch samolotu o napędzie odrzutowym zaburzony warunkami początkowymi [4]. Przyjmuje się, iż ruch odbywa się w płaszczyźnie pionowej, która pokrywa się z płaszczyzną symetrii samolotu. Równania ruchu zapisano posługując się układem osi przepływu $0x_a z_a$, którego początek umieszczono w środku masy samolotu. Założono, że samolot jest bryłą sztywną, w którym uwzględniono sztywność i tłumienie, ale układ sterowania sterem wysokości jest odkształcalny.
Ponadto przyjęto dodatkowe założenia:
— lot jest poziomy ze stałą prędkością;
— małe wartości kąta natarcia i wychylenia sterów wysokości pozwalające na linearyzację ($\sin \measuredangle \cong \measuredangle$; $\cos \measuredangle \cong 1$);
— za zerowe wychylenie steru wysokości, przy którym zapewniony jest lot poziomy, uważa się położenie, odpowiadające najczęściej spotykanym warunkom lotu, a stwarzające możliwie największą przejrzystość proponowanej metody optymalizacji.

Stosowane oznaczenia:

$\bar{C}_H$ — współczynnik tłumienia wiskotycznego w układzie sterowania, (zredukowany)
$\bar{\varkappa}_H$ — zredukowany współczynnik sztywności w układzie sterowania,
k — współczynnik sztywności zastępczej w układzie sterowania,

$$\bar{C}_H = C \cdot r_{SH}^2, \bar{\varkappa}_H = k \cdot r_{SH}^2,$$

r_{SH} — promień bezwładności steru wysokości,
m_{SH} — masa steru wysokości,
e_H — odległość środka masy steru wysokości od jego osi obrotu,
S_H — współrzędna osi obrotu steru wysokości wzdłuż osi x,
x_d — przemieszczenie rączki drążka sterowego w kierunku x,
I_y — moment bezwładności samolotu względem osi $0y$,
M_{SH} — moment zawiasowy steru wysokości,
M_{SHZ} — sterujący moment zawiasowy steru wysokości,
W_{SH} — współczynnik przełożenia pomiędzy wychyleniem steru a wychyleniem drążka sterowego przy nieskończenie sztywnym układzie sterowania.

Przy powyższych założeniach i oznaczeniach układ równań opisujących ruch samolotu względem trajektorii lotu poziomego ma postać:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{T}{m}\cos\alpha - C_x \cdot \frac{\varrho V^2}{2m} \cdot S - g\sin\gamma_a, \tag{1}$$

$$V\frac{d\gamma_a}{dt} = \frac{T}{m}\sin\alpha + C_z^\alpha \frac{\varrho V^2}{2m} \cdot S \cdot \alpha - g\cos\gamma_a, \tag{2}$$

$$I_y\left(\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \frac{d^2\gamma_a}{dt^2}\right) = (M^q + M^{\dot{\alpha}}) \cdot \frac{d\alpha}{dt} + M^q\frac{d\gamma_a}{dt} + M^\alpha \cdot \alpha + M^{\dot{\delta}} \cdot \frac{d\delta_H}{dt} + M^\delta \cdot \delta_H, \tag{3}$$

$$\bar{C}_H \cdot \dot{\delta}_H + \bar{\varkappa}_H \cdot \delta_H = m_{SH} \cdot e_H \cdot V\frac{d\gamma_a}{dt} - (m_{SH} \cdot e_H \cdot S_H) \cdot$$
$$\cdot \left(\frac{d^2\alpha}{dt} + \frac{d^2\gamma_a}{dt}\right) + M_{SH} + M_{SHZ} + m_H \cdot e_H \cdot \cos\gamma_a, \tag{4}$$

gdzie:

$$q = \frac{d\alpha}{dt} + \frac{d\gamma_a}{dt}; \qquad M_{SH} = W_{SH}(\bar{\varkappa}_H \cdot x_d + \bar{C}_H \cdot \dot{x}_d).$$

Wyeliminowując z równań kąt γ_a i jego pochodne oraz pomijając równanie (1) jako że przyjęto lot poziomy ze stałą prędkością równanie (2) można zapisać w postaci:

$$\frac{d\gamma_a}{dt} = b_1 \cdot \alpha - g = 0, \tag{2'}$$

gdzie

$$b_1 = \frac{T}{mV} + C_z^\alpha \cdot \frac{\varrho V}{2m} \cdot S.$$

Uwzględniając (2′) w równaniach (3) i (4) otrzymuje się układ równań samolotu z odkształcalnym układem sterowania w następującej postaci:

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + a_1^* \frac{d\alpha}{dt} + a_0^* \cdot \alpha = C_1 \cdot \frac{d\delta_H}{dt} + C_0 \cdot \delta_H, \tag{5}$$

$$\frac{d\delta_H}{dt} + \bar{h}_0 \cdot \delta_H = \bar{a}_3 \frac{d\alpha}{dt} + \bar{a}_2 \cdot \alpha + f, \tag{6}$$

gdzie:

$$a_0^* = -\frac{M^\alpha}{I_y}; \qquad \bar{h}_0 = \frac{\bar{\varkappa}_H + b_2 \cdot M^\delta}{\bar{C}_H + b_2 \cdot M^{\dot{\delta}}},$$

$$\bar{a}_2 = -\frac{b_2 M^\alpha}{\bar{C}_H + b_2 \cdot M^{\dot{\delta}}}, \qquad f = \frac{M_{SHz} + M_{SH}(1+e_H)}{\bar{C}_H + b_2 \cdot M^{\dot{\delta}}}.$$

$$b_2 = \frac{m_{SH} \cdot e_H \cdot S_H}{I_y}, \qquad a_1^* = -\frac{M^q + M^{\dot{\alpha}}}{I_y},$$

$$C_0 = \frac{M^\delta}{I_y}, \quad C_1 = \frac{M^{\dot{\delta}}}{I_y}, \qquad \bar{a}_3 = -b_2 \frac{M^q + M^{\dot{\alpha}}}{\bar{C}_H + b_2 \cdot M^{\dot{\delta}}},$$

W zapisie macierzowym układ równań (5) i (6) przedstawia się następująco:

$$\mathring{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{F}, \tag{7}$$

gdzie: $x_1 = \alpha$, $x_2 = \frac{d\alpha}{dt}$; $x_3 = \delta_H$,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ a_2 & a_3 & h_0 \\ \bar{a}_2 & \bar{a}_3 & h_0^* \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ f \end{bmatrix},$$

a współczynniki macierzy:

$$a_2 = (C_1 \cdot \bar{a}_2 - a_0^*),$$
$$a_3 = (C_1 \cdot \bar{a}_3 - a_1^*),$$
$$h_0 = (C_0 - C_1 \cdot \bar{h}_0),$$
$$h_0^* = -\bar{h}_0.$$

2. Optymalizacja parametrów dynamicznych

Własności dynamiczne samolotu reprezentuje macierz stanu **A**, zatem dla określenia optymalnych parametrów zapewniających najszybsze tłumienie wahań samolotu dalsze rozważania sprowadza się do analizy układu bez wymuszeń, czyli:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}. \tag{8}$$

Wartości własne macierzy stanu **A** określone są przez równanie charakterystyczne o postaci:

$|\mathbf{A} - r\mathbf{I}| = 0$, gdzie: $\mathbf{I}$ — macierz jednostkowa,
r_i — wartości własne macierzy **A**.

Macierz **A** nie musi posiadać rzeczywistych wartości własnych, ale ponieważ $|\mathbf{A} - r\mathbf{I}| = 0$ ma współczynniki rzeczywiste, to ewentualne zespolone wartości własne winny być sprzężonymi. Ponieważ $\mathrm{tr}\mathbf{A} = \sum_{i=1}^{r=3} r_i$, a dla najszybszego tłumienia wahań samolotu żąda się aby wartości własne były niezależne i posiadały jednakowe ujemne części rzeczywiste σ o jak największym module [2], zatem:

$$\mathrm{Re}\, r_i = \sigma = \frac{\mathrm{tr}\mathbf{A}}{3}.$$

Warunek ujemnych wartości σ jest spełniony zgodnie z tzw. Sylvestra, gdy:

$$\det \mathbf{A} = \prod_{i=1}^{r=3} r_i < 0.$$

Warunki optymalizacyjne uzyskuje się na drodze przekształcenia macierzy stanu $\mathbf{A}$ w macierz stanu $\mathbf{A}^*$ stosując przekształcenie [1]:

$$\mathbf{x} = \mathbf{y} \cdot e^{\sigma t}, \tag{9}$$

zatem: $\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{A}^* \cdot \mathbf{y}$, gdzie: $\mathbf{A}^* = \mathbf{A} - \sigma\mathbf{I} = \begin{bmatrix} -\sigma & 1 & 0 \\ a_2 & a_3 - \sigma & h_0 \\ \bar{a}_2 & \bar{a}_3 & h_0^* - \sigma \end{bmatrix}$

i wówczas $\mathrm{tr}\mathbf{A}^* = \mathrm{tr}(\mathbf{A} - \sigma\mathbf{I}) = \mathrm{tr}\mathbf{A} - n \cdot \sigma = 0$.

Ponieważ ślad macierzy $\mathbf{A}^*$ jest równy zeru, to wartości własne $\det\mathbf{A}^*$ są równe zeru lub są urojonymi [1].

Aby rozwiązanie równania (8) było nierosnącym, to w wyznaczniku charakterystycznym macierzy:

$$|\mathbf{A} - \omega\mathbf{I}| = -(\omega^3 - p_1\omega^2 + p_2\omega - p_3), \tag{10}$$

współczynniki p_i $(i = 1, 2, 3)$ wyrażające się zależnościąmi [3]:

$$p_1 = \mathrm{tr}\mathbf{A}^* = a_3 + h_0^* - 3\sigma,$$

$$p_2 = \begin{vmatrix} -\sigma & 1 \\ a_2 & a_3 - \sigma \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_3 - \sigma & h_0 \\ \bar{a}_3 & h_0^* - \sigma \end{vmatrix},$$

$$p_3 = \det\mathbf{A}^*,$$

winny spełniać warunki:

$$p_i < 0 \quad \text{dla } i \text{ parzystych,}$$
$$p_i = 0 \quad \text{dla } i \text{ nieparzystych,}$$

czyli:

— warunek pierwszy:

$$a_3 + h_0^* - 3\sigma = 0, \tag{11}$$

— warunek drugi:

$$4a_3h_0^* - h_0^{*2} - 9\bar{a}_3h_0 - 4a_3^2 - 9a_2 < 0, \tag{12}$$

— warunek trzeci:

$$2h_0^{*3} - 3a_3h_0^{*2} + (9\bar{a}_3h_0 - 18a_2 - 3a_3^2)h_0^* + (27\bar{a}_2h_0 + 9a_2a_3 + 9a_3\bar{a}_3h_0 + 2a_3^3) = 0. \tag{13}$$

Na podstawie warunków (11 - 13) przy zachowaniu stałych charakterystyk masowo-geometrycznych samolotu można otrzymać relację pomiędzy sztywnością a tłumieniem w układzie sterowania zapewniającą najszybsze wytłumienie wahań samolotu. Relacja ta jest funkcją prędkości lotu i dla określonego typu samolotu jako znana zależność może być wykorzystana przy automatycznym sterowaniu lotem.

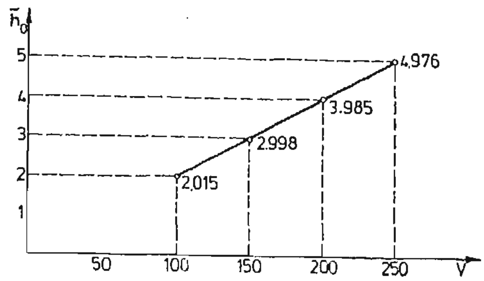
Przykładowo, dla samolotu o następujących danych:

$$T = 10.000\ \text{N}; \quad Q = 35900\ \text{N}; \quad I_y = 2268\ \text{kgm}^2; \quad S = 17{,}5\ \text{m}^2,$$
$$l_a = 1{,}827\ \text{m}; \quad L = 11{,}5\ \text{m}; \quad C_m^q = 9{,}9621; \quad C_m^{\dot{\alpha}} = -3{,}1601;$$
$$C_z^\alpha = -0{,}0744,$$

w którym dla uproszczenia obliczeń przyjęto, iż oś obrotu steru przechodzi przez środek masy steru, czyli $e_H = 0$. Przy parametrycznie zmiennej prędkości V (100, 150, 200, 250) [m/s] uzyskano odpowiednio optymalne wartości współczynnika $\bar{h}_0$

$$\bar{h}_0 = \frac{\varkappa_H}{\bar{C}_H}\,(2{,}015;\ 2{,}998;\ 3{,}985;\ 4{,}976).$$

Uzyskane wyniki świadczą, iż dla otrzymania optymalnych warunków tłumienia wahań samolotu należy zmieniać wraz z prędkością lotu wartość $\bar{h}_0$, przy czym wzrostowi prędkości odpowiada wzrost tego współczynnika.



Rys. 1. Zmiana optymalnej wartości współczynnika h_0 w funkcji prędkości lotu samolotu

Zmiana współczynnika $\bar{h}_0$ w rozpatrywanym przedziale zmian prędkości jest niemalże liniową funkcją, co sugeruje łatwość technicznej realizacji np.: poprzez zmianę wartości współczynnika tłumienia wiskotycznego w układzie sterowania wraz ze zmianą prędkości lotu.

Literatura

1. S. DUBIEL, *Liniowy układ dynamiczny o najszybszym tłumieniu.* Mech. Teoret. i Stosow. III/1985
2. A. H. ГОЛУБЕНЦЕВ, Интегральные методы в динамике. Киев 1967 г.
3. B. KOWALCZYK, *Macierze i zastosowania,* WNT, Warszawa 1976 r.
4. A. KRZYŻANOWSKI, *Dynamika nieautonomicznego ruchu samolotu z odkształcalnymi układami sterowania,* rozprawa doktorska, WAT, Warszawa 1982 r.

Р е з ю м е

ОПТИМАЛИЗАЦИЯ СВЯЗИ СОПРЯЖЕНИЯ В АВТОМАТИЧЕСКОМ УПРАВЛЕНИИ ПОЛЕТОМ

Концепция оптимизации системы, обеспечивающая самое быстрое затухание процесса А. Н. Голубенцева для линейных уравнений н-ого степени, модифицирована для системы описанной матрично-векторными уравнениями. Условия в матричной форме дают возможность быстрого установления соответствующих коэффициентов для линейных систем, а в большинстве случаев уравнения управляемых динамических объектов приведены в форме матричной системы уравнений. Модифицированный метод использовано для оптимизации жесткости и демпфирования колебаний самолета в автоматическом управлении полетом.

Summatry

OPTIMIZATION OF COUPLING RELATIONS IN AUTOMATIC FLIGHT CONTROL

A concept of system optimization, which ensures the fastest damping of A. N. Golubyentsev's process for the linear n-th degree equations has been modified for the system described by matrix-vector equations The matrix form conditions enable the fast determination of suitable coefficients for the linear systems It is know that in the most of the cases the equations of controlled dynamic objects are presented in the form of a matrix set of equations.

The modified method has been used for optimization of the „stiffness" and damping of the aircraf oscilations in the automatic flight control.

Praca wpłynęła do Redakcji dnia 18 marca 1986 roku.