

## PROBLEM STABILIZACJI SAMOLOTU Z ZASTOSOWANIEM IDENTYFIKACJI PARAMETRYCZNEJ

WŁADYSŁAW JAROMINEK

*Polska Akademia Nauk. Warszawa*

TADEUSZ STEFAŃSKI

*Politechnika Świętokrzyska, Kielce*

### 1. Wprowadzenie

Samolot jest obiektem sterowania, którego właściwości statyczne i dynamiczne zmieniają się wraz ze zmianą warunków lotu, np. prędkości czy wysokości lotu. Zmiana tych właściwości powoduje znaczne odchylenie wskaźników jakości układu stabilizacji od wartości założonych. Przyczynia się to do złej sterowności lub nawet także do utraty stabilności samolotu. Szczególnie niebezpieczne są duże zmiany charakterystyk statycznych, które mogą prowadzić do przekroczenia wartości granicznej przyspieszenia normalnego. Aby zmiany właściwości samolotu nie wpływały na charakterystyki układu sterowania samolotem, należy je uwzględnić podczas projektowania tego układu. Sprowadza się to w konsekwencji do zastosowania sterowania adaptacyjnego. O sposobie kompensacji wpływu właściwości obiektu na charakterystyki układu sterowania w głównej mierze decydują wymagania stawiane układowi sterowania oraz sposób otrzymywania informacji o zmianach parametrów obiektu, tj. metoda identyfikacji parametrów jego modelu matematycznego. Obecnie dla większości obiektów niestacjonarnych stosowane są metody syntezy układów sterowania oparte na identyfikacji parametrycznej, dokonywanej w czasie rzeczywistym. Związane jest to z wyższą jakością i elastycznością pracy takich układów, a także z coraz większym zastosowaniem mikrokomputerów, które mogą rozwiązywać złożone zadania identyfikacji i sterowania.

Poniżej przedstawiono zasady syntezy algorytmów sterowania i adaptacji układu stabilizacji samolotu w kanale podłużnym. Algorytmy adaptacji bazują na informacjach o parametrach modelu matematycznego samolotu uzyskanych drogą identyfikacji parametrycznej w czasie rzeczywistym. Postępowanie takie jest możliwe przy założeniu, że w czasie trwania procesu przejściowego identyfikacji i adaptacji właściwości statyczne i dynamiczne samolotu nie ulegają istotnym zmianom.

## 2. Identyfikacja modelu matematycznego samolotu

Dyskretny model matematyczny samolotu w kanale podłużnym przyjęto w postaci [3]:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) &= A(k)\mathbf{x}(k) + B(k)\delta(k) + \mathbf{w}(k), \quad \mathbf{x}(k) = [\dot{\vartheta}(k), \alpha(k)]^T, \\ z(k) &= H\mathbf{x}(k) + v(k), \end{aligned} \quad (1)$$

gdzie:  $\mathbf{x}(k)$ ,  $\mathbf{w}(k)$ ,  $z(k)$  i  $v(k)$  — odpowiednio wektor stanu, zakłóceń, pomiarów i szumów pomiarowych;  $\delta(k)$  — sygnał sterujący;  $A(k)$ ,  $B(k)$  i  $H$  — odpowiednio macierz stanu, sterowania i wyjścia.

W przypadku słabej niestacjonarności modelu (1), na odcinku czasu  $\Delta T$  nie dłuższym niż czas procesu przejściowego identyfikacji, można zaniedbać zmienności w czasie elementów macierzy  $A(k)$  oraz  $B(k)$  i wówczas:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) &= A\mathbf{x}(k) + B\delta(k) + \mathbf{w}(k), \\ z(k) &= H\mathbf{x}(k) + v(k). \end{aligned} \quad (2)$$

Do identyfikacji parametrów modelu matematycznego (2) na podstawie pomiaru sygnału wejściowego  $\delta(k)$  i sygnałów wyjściowych  $z(k)$  zastosowano metodę najmniejszych kwadratów. Algorytmy identyfikacji, otrzymane według metody najmniejszych kwadratów, cechują się postacią rekurencyjną — a więc wygodną do obliczeń numerycznych — a także wysoką zbieżnością i dokładnością identyfikacji.

Identyfikacja parametrów modelu matematycznego samolotu możliwa jest poprzez pomiar sygnału wejściowego  $\delta(k)$  (wychylenia steru) oraz:

- jednej współrzędnej wektora stanu  $\mathbf{x}(k)$  (prędkości kątowej pochylenia  $\dot{\vartheta}(k)$ ),
- pełnego wektora stanu  $\mathbf{x}(k)$  (pod warunkiem, że możliwa jest obserwacja kąta natarcia  $\alpha(k)$ ).

W przypadku obserwacji skalarne go sygnału wejściowego i wyjściowego, model matematyczny (2) przetransformowano do postaci kanonicznej Frobeniusa i następnie przekształcono do skalarne go równania różnicowego o postaci

$$\dot{\vartheta}(k) = G(k)\varphi + f(k) \quad (3)$$

gdzie:  $f(k)$  — dyskretna funkcja przypadkowa z zerową wartością oczekiwaną (reszta modelu),

$$\begin{aligned} G(k) &= [\dot{\vartheta}(k-1), \dot{\vartheta}(k-2), \delta(k-1), \delta(k-2)], \\ \varphi &= [a_1, a_2, c_1, c_2]^T. \end{aligned}$$

Identyfikowane elementy macierzy  $\varphi$  związane są z elementami macierzy stanu  $A$  i macierzy sterowania  $B$  równania (2) zależnościami:

$$\begin{aligned} a_1 &= a_{12}a_{21} - a_{11}a_{22}, & a_2 &= a_{11} + a_{22}, \\ c_1 &= b_1, & c_2 &= b_1(a_{11} - a_{12} - a_{22}) + b_2a_{22}. \end{aligned}$$

Jeżeli zmiany parametrów modelu (1) w czasie trwania procesu identyfikacji są niewielkie, wówczas do identyfikacji parametrów równania (3) zastosować można algorytm rekurencyjny metody najmniejszych kwadratów:

$$\begin{aligned} \hat{\varphi}(k) &= \hat{\varphi}(k-1) + P(k)G^T(k)Q(k)[\dot{\vartheta}(k) - G(k)\hat{\varphi}(k-1)], \\ P(k) &= P(k-1) - P(k-1)G^T(k)[Q^{-1}(k) + G(k)P(k-1)G^T(k)]^{-1}G(k)P(k-1), \end{aligned} \quad (4)$$

lub

$$\begin{aligned} \hat{\varphi}(k) &= \hat{\varphi}(k-1) + P(k)G^T(k)Q(k)[\hat{\vartheta}(k) - G(k)\hat{\varphi}(k-1)], \\ P(k) &= R(k-1) - R(k-1)G^T(k)[Q^{-1}(k) + G(k)R(k-1)G^T(k)]^{-1}G(k)R(k-1), \end{aligned} \quad (5)$$

przy czym:  $\hat{\varphi}(k)$  — estymator macierzy parametrów  $\varphi$ ;  $Q(k)$  — współczynnik wagi;  $R(k) = (10^3 \div 10^5) I$ ,  $I$  — macierz jednostkowa.

Jeśli niestacjonarność identyfikowanych parametrów jest silna, wówczas algorytmy (4) i (5) są na ogół rozbieżne. Wówczas zdecydowanie lepsze wyniki otrzyma się stosując tzw. układ równań normalnych metody najmniejszych kwadratów [3].

Przy dodatkowym określeniu kąta natarcia  $\alpha(k)$ , identyfikacja jest możliwa według następującego algorytmu:

$$\begin{aligned} \hat{\psi}^T(k) &= \hat{\psi}^T(k-1) + P(k)S(k)Q(k)[z^T(k) - S^T(k)\hat{\psi}^T(k-1)], \\ P(k) &= P(k-1) - P(k-1)S(k)[Q^{-1}(k) + S^T(k)P(k-1)S(k)]^{-1}S^T(k)P(k-1), \end{aligned} \quad (6)$$

gdzie:  $\hat{\psi}$  — estymator macierzy parametrów  $\psi$

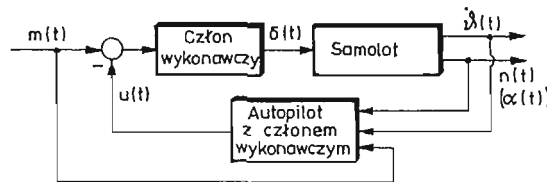
$$\Psi = [A; B], \quad S(k) = \begin{bmatrix} z(k-1) \\ \delta(k-1) \end{bmatrix}, \quad z(k) = \begin{bmatrix} \hat{\vartheta}(k) \\ \alpha(k) \end{bmatrix}.$$

Algorytm ten wykazuje dużo wyższą zbieżność i dokładność identyfikacji niż algorytm (4) lub (5).

### 3. Algorytmy stabilizacji

Podstawowym zadaniem układu stabilizacji samolotu w kanale podłużnym jest utrzymanie charakterystyk stabilności i sterowności na określonym, zadanym poziomie. Ponadto układ ten powinien tłumić zakłócenia występujące podczas lotu samolotu w turbulentnej atmosferze.

Ogólny schemat układu stabilizacji przedstawiono na rys. 1.



Rys. 1. Schemat układu stabilizacji w kanale podłużnym samolotu

Autopilot w oparciu o wielkości wyjściowe samolotu i sygnał  $m(t)$  przemieszczenia drążka przez pilota generuje sygnał  $u(t)$ . Różnica sygnałów  $m(t)$  i  $u(t)$  stanowi sygnał uchybu, który człon wykonawczy przekształca w przemieszczenie steru  $\delta(t)$ . W dalszych rozważaniach uwzględniono tylko właściwości statyczne członów wykonawczych, wyrażone poprzez współczynniki wzmocnienia statycznego, które jawnie nie występują, a zawarte są odpowiednio we współczynnikach wzmocnienia samolotu i w parametrach autopilota.

Biorąc pod uwagę spełnienie postawionych przed układem stabilizacji zadań, najbardziej odpowiednią jest następująca struktura autopilota

$$u(t) = K_1(t)m(t) + K_2(t)\dot{\vartheta}(t) + K_3(t)n(t), \quad (7)$$

gdzie  $n(t)$  jest przyspieszeniem normalnym, a współczynniki  $K_1(t)$ ,  $K_2(t)$  i  $K_3(t)$  są parametrami autopilota. Struktura ta wykorzystuje informacje o sygnałach bezpośrednio mierzalnych. Wprowadzenie członu  $K_1(t)m(t)$  zapewnia stabilizację statycznego współczynnika wzmocnienia układu zamkniętego, a pozostałe człony uwzględniające prędkość kątową pochylenia  $\dot{\vartheta}(t)$  i przyspieszenie normalne  $n(t)$  dają możliwość wpływania na te dwie wielkości.

Inne struktury autopilota, wykorzystujące informacje o pochodnej prędkości kątowej pochylenia  $\dot{\vartheta}(t)$  lub pochodnej przyspieszenia normalnego  $n(t)$ , cechują się większą wrażliwością na szумы pomiarowe (wynika to z różniczkowania sygnałów) i tendencją do wzmacniania zakłóceń działających na samolot.

Dokonując syntezy układu stabilizacji metodami przestrzeni stanów można zbudować autopilot w postaci sprzężeń proporcjonalnych od zmiennych stanu, co wyrazi się równaniem

$$u(k) = K_1(k)m(k) + K_2(k)\dot{\vartheta}(k) + K_3(k)\alpha(k), \quad (8)$$

gdzie  $k$  jest dyskretnym operatorem czasu, a  $K_3(k)$  — parametrem autopilota. Procesy przejściowe  $\alpha(k)$  i  $n(k)$  mają zbliżony charakter, stąd należy wnioskować, że właściwości struktury (8) i (7) są podobne.

W przypadku wolnych zmian parametrów obiektu interesujący rezultat uzyskano stosując jednokrokowy, suboptymalny algorytm sterowania o postaci

$$\delta(k) = -[R(k) + B^T Q(k) B]^{-1} B^T Q(k) A x(k|k), \quad (9)$$

który minimalizuje wskaźnik jakości

$$Q = x[(k+1)|k]^T Q(k) x[(k+1)|k] + R(k) \delta^2(k), \quad (10)$$

przy ograniczeniach

$$x[(k+1)|k] = A x(k|k) + B \delta(k), \quad (11)$$

przy czym:  $x[(k+1)|k]$  — predykcja wektora stanu;  $Q(k)$  — macierz współczynników wagi;  $R(k)$  — współczynnik wagi;  $x(k|k)$  — wektor stanu otrzymany na wyjściu filtru optymalnego.

Ponieważ

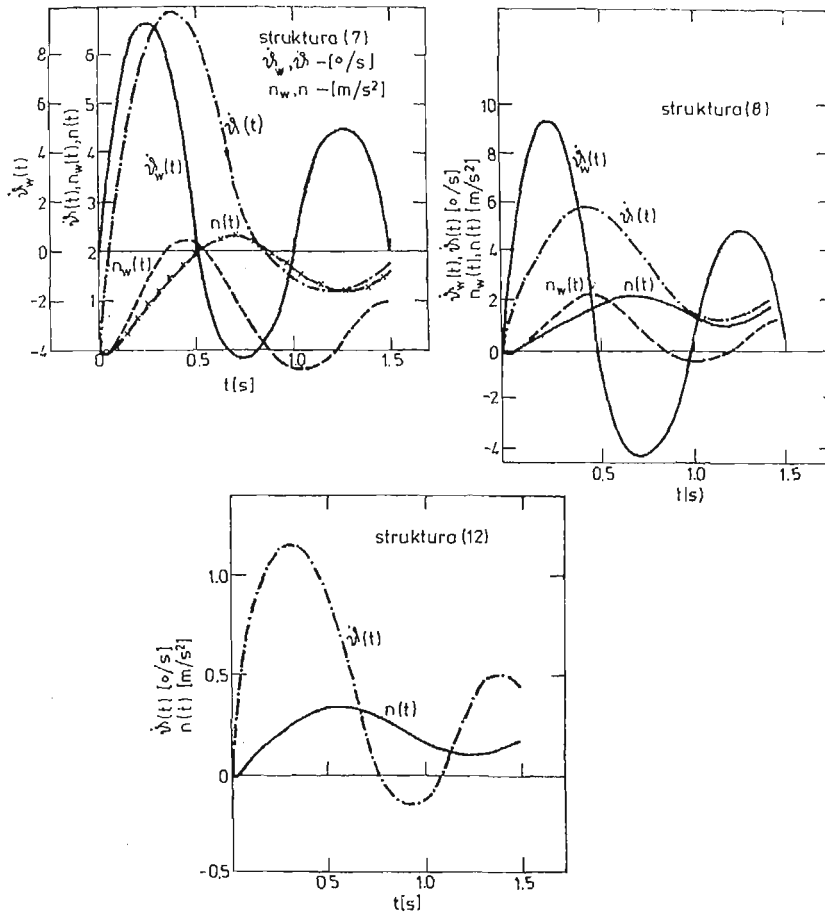
$$\delta(k) = K_1(k)m(k) - u(k)$$

stąd:

$$u(k) = K_1(k)m(k) - \delta(k). \quad (12)$$

Podstawową wadą algorytmów (8) i (12) jest konieczność określenia kąta natarcia  $\alpha(k)$ .

Na rys. 2 przedstawiono stopień kompensacji zakłócenia działającego na samolot przez poszczególne struktury autopilota. Podczas symulacji układu stabilizacji założono, że zakłócenie w  $(t)$  ma charakter sygnału sinusoidalnego o jednostkowej wartości średniej. Odpowiedź samolotu na zakłócenie w  $(t)$  oznaczono poprzez  $\dot{\vartheta}_w(t)$  i  $n_w(t)$ , natomiast odpowiedź układu stabilizacji — poprzez  $\dot{\vartheta}(t)$  i  $n(t)$ . Z przedstawionego rysunku wynika,



Rys. 2. Wpływ struktury autopilota na kompensację zakłóceń działających na samolot

że struktury (7) i (8) mają zbliżone właściwości z punktu widzenia tłumienia zakłóceń; natomiast struktura (12) silnie tłumí zakłócenie. We wszystkich przypadkach założono identyczne położenie biegunów układu zamkniętego.

#### 4. Algorytmy adaptacji

Punktem wyjścia do syntezy algorytmów adaptacji jest bieżąca znajomość charakterystyk samolotu w postaci macierzy stanu  $A$  i sterowania  $B$  dyskretnego modelu matematycznego (2). Możliwe jest także określenie macierzy  $A_c$  i  $B_c$  ciągłego modelu matematycznego samolotu w kanale podłużnym za pośrednictwem związków przybliżonych

$$\begin{aligned} A_c &= (A - I)/T, \\ B_c &= B/T, \end{aligned} \tag{13}$$

gdzie  $T$  jest okresem impulsowania sygnałów, a  $I$  — macierzą jednostkową. Jeżeli okres impulsowania jest duży, to równań (13) nie można stosować ze względu na duży błąd określenia macierzy  $A_c$  i  $B_c$ . Również w przypadku małej wartości  $T$  równań tych nie można stosować, gdyż błąd identyfikacji silnie wpływa na macierze  $A_c$  i  $B_c$ . Dokładniej parametry modelu ciągłego wyznaczyć można z równań:

$$\begin{aligned} A_c &= \frac{1}{T} \ln A, \\ B_c &= [\exp(A_c T) - I]^{-1} A_c B. \end{aligned} \quad (14)$$

Transmitancje ciągłego modelu matematycznego uzyska się z równania

$$G_{\delta}(s) = \frac{\dot{\vartheta}(s)}{\delta(s)} = H[sI - A_c]^{-1} B_c = \frac{K_{\delta}(1 + T_1 s)}{T^2 s^2 + 2\xi T s + 1}, \quad (15)$$

gdzie  $H = [1, 0]$ .

Podana metoda identyfikacji nie pozwala wyznaczyć transmitancji  $G(s) = \frac{n(s)}{\delta(s)} = \frac{K_n(1 - T_2^2 s^2)}{T^2 s^2 + 2\xi T s + 1}$ , a właściwie zer tej transmitancji, gdyż mianowniki transmitancji  $G_n(s)$  i  $G_{\delta}(s)$  są identyczne [3]. Zera te na ogół mają znikomy wpływ na proces przejściowy  $n(t)$  i można je zaniedbać. Współczynnik wzmocnienia przeciążenia określa się z zależności

$$K_n = K_{\delta} \frac{V}{57,3g}, \quad (16)$$

gdzie:  $V$  — prędkość lotu;  $g$  — przyspieszenie ziemskie.

Zakładając, że w czasie trwania procesu przejściowego identyfikacji i adaptacji parametry modelu matematycznego samolotu nie ulegną istotnym zmianom, to problem syntezy algorytmów adaptacji można rozwiązać klasycznymi metodami teorii sterowania. Dla algorytmu autopilota (7), zastosowanego w obwodzie sprzężenia zwrotnego, transmitancja układu zamkniętego samolot-autopilot ma postać (patrz rys. 1)

$$G_{\delta_z}(s) = \frac{\dot{\vartheta}(s)}{m(s)} = \frac{K_{\delta_z}(1 + T_1 s)}{T_z^2 s^2 + 2\xi_z T_z s + 1}, \quad (17)$$

gdzie:  $m(s)$  — transformata sygnału przemieszczenia drążka;

$$\begin{aligned} K_{\delta_z} &= \frac{K_{\delta}(1 - K_1)}{1 + K_2 K_{\delta} + K_3 K_n}, & K_{nz} &= \frac{K_n}{K_{\delta}} K_{\delta_z}, \\ T_z &= \sqrt{\frac{T^2 - K_3 K_n T^2}{1 + K^2 K + K_3 K_n}}, \\ \xi_z &= \frac{2\xi T + K_2 K_{\delta} T_1}{2\sqrt{(1 + K_2 K_{\delta} + K_3 K_n)(T^2 - K_3 K_n T^2)}}. \end{aligned}$$

Algorytmy doboru nastaw (algorytmy adaptacji) parametrów autopilota  $K_1(t)$ ,  $K_2(t)$  i  $K_3(t)$  można określić [4]:

- z warunku stabilizacji wartości maksymalnego przeregulowania  $\sigma_p$  i stałej czasowej  $T_z$ ,
- z warunku stabilizacji stałej czasowej  $T_z$  i współczynnika tłumienia  $\xi_z$ .

Jeżeli jest możliwość określania kąta natarcia  $\alpha(t)$  wskazane jest posłużyć się algorytmem (8) lub ewentualnie (12), gdyż wówczas nie ma potrzeby wyznaczania parametrów ciągłego modelu matematycznego na podstawie modelu dyskretnego, co związane jest z określonymi błędami. Dyskretna transmitancja układu zamkniętego, dla algorytmu autopilota (12), ma postać

$$G(z) = \frac{y(z)}{m(z)} = C[zI - A + BK]^{-1}B(1 - K_1), \quad (18)$$

przy czym: jeśli  $C = [1, 0]$ , to  $y(z) = \dot{\vartheta}(z)$ , a gdy  $C = [0, 1]$  to  $y(z) = \alpha(z)$ ; natomiast  $K = [K_2, K_5]$ .

Algorytmy adaptacji parametrów  $K_2$  i  $K_5$  można określić na podstawie zadanego położenia biegunów transmitancji (18). Przyjmując, dla zadanego położenia biegunów, równanie charakterystyczne układu zamkniętego w postaci:

$$z^2 + dz + e = 0 \quad (19)$$

oraz porównując odpowiednie współczynniki równania (19) i równania charakterystycznego transmitancji (18), otrzyma się związki na wartości parametrów autopilota  $K_2$  i  $K_5$  dla dwu przedstawionych metod identyfikacji. Parametr  $K_1$  określony został z warunku utrzymywania na stałym zadanym poziomie  $K_2$  statycznego współczynnika wzmocnienia  $K_{nz}$  przyspieszenia normalnego  $n(t)$ , czyli (patrz równanie (16))

$$K_{nz} = K_{\dot{\vartheta}z} \frac{V}{57,3g} = K_2 \quad (20)$$

lub ewentualnie z warunku stabilizacji współczynnika wzmocnienia kąta natarcia  $\alpha(t)$ , określonej z transmitancji (18).

W przypadku stosowania algorytmu (12), macierze modelu matematycznego samolotu  $A$  i  $B$  określane są w procesie identyfikacji, natomiast  $K_1$  — z równania (20). Istotny tu jest właściwy dobór wartości współczynników wagi tego algorytmu, które należy określić np. drogą symulacji układu. Dobre rezultaty uzyskano uzależniając wartości tych współczynników od aktualnej wartości wychylenia steru w układzie zamkniętym. Jeżeli zmiany parametrów modelu matematycznego samolotu są szybkie, wówczas układ stabilizacji z algorytmem (12) może utracić stabilność.

## 5. Podsumowanie

W pracy przeanalizowano problem stabilizacji samolotu w kanale podłużnym z uwzględnieniem zmian parametrów statycznych i dynamicznych samolotu. Zmiany te określano poprzez identyfikację parametryczną, której wyniki wykorzystano do korygowania wartości parametrów autopilota przy pomocy odpowiednich algorytmów adaptacji. Zagadnienia syntezy algorytmów identyfikacji, stabilizacji i adaptacji omówiono przy założeniu quasistacjonarności parametrów samolotu w czasie trwania procesu identyfikacji i adaptacji. Założenie to można przyjąć dla większości obiektów latających.

## Literatura

1. A. P. SAGE, J. L. SELSA, *Estimation Theory with Applications to Communication and Control*, New York, Mc Graw-Hill 1971.
2. T. STEFAŃSKI, *Zagadnienie syntezy dyskretnego, adaptacyjnego układu sterowania samolotu w kanale podłużnym*, Rozprawa doktorska. AGH, Kraków 1978.
3. W. JAROMINEK, T. STEFAŃSKI, *Identyfikacja parametryczna modelu matematycznego samolotu*, II Ogólnopolska Konferencja „Mechanika w Lotnictwie”. Warszawa, 1986.
4. W. JAROMINEK, T. STEFAŃSKI, *Metoda syntezy algorytmu adaptacji układu stabilizacji samolotu*, II Ogólnopolska Konferencja „Mechanika w Lotnictwie”. Warszawa, 1986.

## Резюме

ПРОБЛЕМА СТАБИЛИЗАЦИИ САМОЛЁТА С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ  
ПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ ИДЕНТИФИКАЦИИ

В работе проведён анализ стабилизации самолёта в продольном канале учитывая изменения статических и динамических параметров самолёта. Эти изменения определяются через параметрическую идентификацию дискретной математической модели самолёта методом наименьших квадратов. Результаты идентификации являются основой для исправления значений параметров системы стабилизации — используя соответствующие алгоритмы адаптации во время изменяющихся условий полёта. Проблемы идентификации, стабилизации и адаптации представлено исходя из предпосылки небольших изменений параметров математической модели самолёта во время прохождения переходного процесса идентификации и адаптации.

## Summary

SOLUTION OF THE PROBLEM OF STABILIZATION OF AIRCRAFT BY MEANS  
OF PARAMETRIC IDENTIFICATION

The problem of stabilization of an aircraft in the oblong channel with regard to changes of its static and dynamic parameters is analysed. The changes are determined by means of parametric identification of discrete mathematical model of aircraft by the method of least squares. The results of identification provide the basis for correcting the values of the parameters of stabilization system provided proper algorithms of adaptation during changeable conditions of the flight are used. The problems of identification, stabilization and adaptation are presented on the assumption that small changes of the parameters of the mathematical model of aircraft take place during the transient process of identification and adaptation.

*Praca wpłynęła do Redakcji dnia 19 marca 1986 roku.*