MECHANIKA
TEORETYCZNA
I STOSOWANA
3, 25, (1987)

КОНТАКТНОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ УПРУГОГО ШТАМПА С ПРЕДВАРИТЕЛЬНО НАПРЯЖЕННЫМ СЛОЕМ

А. Н. Гузь
В. Б. Рудницкий
Киев, СССР

Обозначения

y_i — координаты начального деформированного состояния;

λ_i — коэффициенты удлинения определяющие перемещения начального состояния;

$S_0^{\beta\beta}$ — физические составляющие тензора напряжений относительно ковариантных базисных векторов в деформированном состоянии;

u_1, u_2, u_3 — компоненты вектора перемещений в начальном деформированном состоянии;

$\tilde{Q}_{ij}$ — составляющие тензора напряжений в начальном деформированном состоянии;

δ_{ij} — символ Кронекера

p — скалярная величина соотвествующая гидростатическому давлению;

c_{10} — упругая постоянная потенциала Трелоара.

1. Введение

Контактные задачи для слоя (полосы) конечной толщины без начальных напряжений исследованы в монографиях [10, 11, 12, 13, 14, 15], подробный обзор которых дан в [16]. Влияние начальных напряжений на закон распределения контактных напряжений в упругих полуплоскости и полупространстве при их контактном взаимодействии с упругими штампами исследовано в работах [5 - 7]. Причем в них дан общий метод решения смешанных контактных задач для полуплоскости и полупространства с начальными напряжениями. Задача о давлении жесткого штампа на упругий слой с начальными напряжениями рассмотрена в [8], а для частного вида упругого потенциала несжимаемых тел в работах [9, 17].

Ниже в рамках линеаризированной теории упругости [1 - 4] приводится решение смешанной задачи о давлении упругого цилиндричного штампа на слой с начальными напряжениями. Исследования выполнены для теорий больших (конечных) начальный деформаций и различных вариантов теорий малых начальных деформаций при произвольной структуре упругого потенциала. Предполагается, что упругие потенциалы есть дважды непрерывно-дифференцируемые функции алгебраических инвариантов тензора деформации Грина [4]. Все исследование приведено в координатах начального деформированного состояния y_i, которые связаны с лагранжевыми координатами (естественного состояния) отношениями $y_i = \lambda_i x_j$ $(i = 1, 2, 3)$, где λ_i — коэффициенты удлинения определяющие перемещения начального состояния. Кроме того, будем считать, что действие штампа вызывает в слое малое возмущение основного однородного напряженно-деформированного состояния, для которого выполняются условия:

$$S_0^{11} = S_0^{22} \neq 0, \quad S_0^{33} = 0, \quad \lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3. \tag{1.1}$$

Все величины, относящиеся к упругому штампу, будем записывать в принятых обозначениях теории упругости, а величины относящиеся к слою и полупространству с начальными напряжениями, — в обозначениях [9]. Через ν, E и ν_1, E_1 — обозначим коэффициенты Пуассона и модули Юнга соответственно цилиндра и слоя.

2. Постановка задачи и основные соотношения

Пусть в упругий слой с начальными напряжениями (которые возникают до контакта) вдавливается упругий цилиндр (рис. 1), под действием нагрузки, которая приложена так, что его свободный торец деформируется в направлении оси $0y_3$ на одинаковую величину — ε. Все поверхности вне области контакта свободны от внешних усилий. Рассматривается два случая закрепления слоя по нижнему основанию: задача I — слой лежит на жестком основании без сил трения; задача II — слой жестко закреплен по основанию.

Переходя к круговым цилиндричным координатам (r, Θ, z_i), где $z_i = \sqrt{n_i y_3}$, и предполагая, что цилиндр и слой изготовлены из различных материалов, для определения составляющих вектора перемещений и компонент тензора напряжений в цилиндре и слое имеем следующие граничные условия:

На торце упругого штампа $z_i = \sqrt{n_i} H$

$$U_z = -\varepsilon, \quad \tau_{rz} = 0, \quad 0 \leqslant r \leqslant R, \tag{2.1}$$

На границе упругого слоя $z_i = 0$ в области контакта

$$u_3 = u_z, \quad \tilde{Q}_{33} = \sigma_{zz}, \quad \tilde{Q}_{3r} = 0, \quad \tau_{rz} = 0, \quad (0 \leqslant r \leqslant R). \tag{2.2}$$

На границе упругого слоя $z_i = 0$ вне области контакта

$$\tilde{Q}_{33} = 0, \quad \tilde{Q}_{3r} = 0, \quad (R \leqslant r < \infty). \tag{2.3}$$

На боковой поверхности цилиндра $r = R$

$$\tau_{rz} = 0, \quad \sigma_{rr} = 0, \quad (0 \leqslant z_i \leqslant H). \tag{2.4}$$

На нижней поверхности слоя $z_i = \dfrac{\lambda_3 h_i}{\sqrt{n_i}} = \dfrac{H_1}{\sqrt{n_i}}$ или $y_3 = H_1$

$$u_3 = 0, \quad \tilde{Q}_{3r} = 0, \quad 0 \leqslant r < \infty \ (\text{задача I}) \tag{2.5}$$

$$u_3 = 0, \quad u_r = 0, \quad 0 \leqslant r < \infty \ (\text{задача II}) \tag{2.5a}$$

Напряженно-деформированное состояние в упругом цилиндре определим из уравнений Ляме

$$\begin{gathered} 2(1-\nu)\left(\Delta_1 - \frac{1}{r}\right)u_r + (1-2\nu)\frac{\partial^2 u_r}{\partial y_3^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial r \partial y_3} = 0, \\ (1-2\nu)\Delta_1 u_z + 2(1-\nu)\frac{\partial^2 u_z}{\partial y_3^2} + \frac{\partial}{\partial y_3}\left(\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r}\right) = 0. \end{gathered} \tag{2.6}$$

Решение (2.1) ищем в виде гармонических функций Папковича-Нейбера [5, формула (2.6)] φ и $\bar{\psi}$. Компоненты вектора перемещений и тензора напряжений для упругого штампа через потенциалы φ и $\bar{\psi}$ с учетом неоднородности граничных условий (выбор элементарного решения зависит от вида граничных условий) представим в виде

$$\begin{aligned} u_r = & -\frac{1}{1-2\nu}\Big\{2B_0 r + \sum_{k=0}^{\infty}[\beta_k^2 W_1(A_k, B_k)\cdot W_1(C_k, -D_k) + \mu_k^2 W_3(E_k, F_k) + \\ & + N_k W_1(\operatorname{ch}\mu_k y_3) + M_k W_2(\operatorname{sh}\mu_k y_3)]\Big\}; \\ u_z = & \frac{1}{1-2\nu}\Bigg\{(2A_0 + 6C_0)(1-2\nu) + 4B_0 z + \\ & + \sum_{k=1}^{\infty}\Bigg[\beta_k^2\Big(A_k I_0(\beta_k r) + B_k W_3\big((4-4\nu)I_0(\beta_k r)\big)\cdot \\ & \cdot W_2(D_k, C_k) - \mu_k^2 J_0(\mu_k r)\left(\frac{W_3(F_k, E_k)}{1-2\nu}\right) - \\ & - 2N_k W_2\left(\frac{\operatorname{sh}\mu_k y_3}{2(1-2\nu)}\right) - 2M_k W_1\left(-\frac{\operatorname{sh}\mu_k y_3}{2(1-2\nu)}\right)\Big)\Bigg]\Bigg\}; \\ \tau_{rz} = & \Theta\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\beta_k^3\Bigg[W_1(A_k, B_k) + 2B_k(1-\nu)I_1(\beta_k r)W_2(D_k, C_k) + \\ & + \mu_k^3 W_3(F_k, E_k) + 2N_k\cdot\nu\cdot w_2\left(\frac{\operatorname{sh}\mu_k y_3}{2\nu}\right) + \\ & + 2\nu M_k w_1\left(\frac{\operatorname{ch}\mu_k y_3}{2\nu}\right)\Bigg]; \\ \sigma_z = & \Theta\cdot\Bigg\{(2-\nu)(4B_0 + 6C_0) + \sum_{k=0}^{\infty}\Big[\beta_k^3\big(A_k I_0(\beta_k r) + \\ & + B_k w_3\big(2(1-\nu)I_0(\beta_k r)\big)W_2(E_k, -D_k)\big) - \end{aligned} \tag{2.7}$$

$$-\mu_k^3 J_0(\mu_k r)\left(W_3(E_k,\,F_k)-(1-2\nu)N_k w_2\left(\frac{\operatorname{ch}\mu_k y_3}{1-2\nu}\right)-\right.$$

$$\left.\left.\left.-(1-2\nu)M_k w_2\left(\frac{\operatorname{sh}\mu_k y_3}{1-2\nu}\right)\right)\right]\right\}; \tag{2.7}$$

$$\sigma_r = \Theta\left\{4\nu(C_0+B_0)+2B_0-\sum_{k=1}^{\infty}\left[\beta_k^3\left(A_k I_0'(\beta_k r)+\right.\right.\right.$$

$$+B_k W_2(C_k,\,-D_k)(1-2\nu)\big)+\mu_k^3\big((1-2\nu)J_0(\mu_k r)(N_k \operatorname{sh}\mu_k y_3+$$

$$+M_k \operatorname{ch}\mu_k y_3)+J_0'(\mu_k r)W_1(E_k,\,F_k)+$$

$$\left.\left.+N_k w_1(\operatorname{ch}\mu_k y_3)+M_k w_2(\operatorname{sh}\mu_k y_3)\big)\right]\right\};$$

где: $\Theta = \dfrac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$;

$$\begin{aligned}
W_1(A_k,\,B_k) &= A_k I_1(\beta_k r)+B_k\beta_k r I_0(\beta_k r);\\
W_2(C_k,\,D_k) &= C_k\cos\beta_k y_3+D_k\sin\beta_k y_3;\\
W_3(E_k,\,F_k) &= E_k\operatorname{ch}\mu_k y_3+F_k\operatorname{sh}\mu_k y_3;\\
w_1(\operatorname{ch}\mu_k y_3) &= \operatorname{sh}\mu_k y_3+\mu_k y_3\operatorname{ch}\mu_k y_3;\\
w_2(\operatorname{sh}\mu_k y_3) &= \operatorname{ch}\mu_k y_3+\mu_k y_3\operatorname{sh}\mu_k y_3;\\
w_3\big(mI_0(\beta_k r)\big) &= mI_0(\beta_k r)+\beta_k r I_1(\beta_k r).
\end{aligned}$$

Здесь A_k, B_k, C_k, D_k, E_k, F_k, A_0, B_0, C_0, — произвольные постоянные, $J_n(x)$, $I_n(x)$ — функции Бесселя действительного и мнимого аргумента.

Для определения напряженно-деформированного состояния в слое используем линеаризованные уравнения и представления их решений, полученные в монографиях [1 - 4]. Как и в [5] рассмотрим случай сжимаемых и несжимаемых тел.

Для сжимаемых тел в случае пространственной статической задачи систему уравнений равновесия запишем в виде

$$\omega_{im\alpha\beta}\frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial y_i\,\partial y_\beta} = 0 \qquad (i,\,m,\,\alpha,\,\beta = 1,\,2,\,3). \tag{2.8}$$

Здесь тензора $\tilde{\omega}$ для теории конечных (больших) начальных деформаций и первого варианта теорий малых начальных деформаций, когда упругий потенциал представлен в виде функции алгебраических инвариантов тензора деформаций Грина определяются из выражения

$$\omega_{im\alpha\beta} = \frac{\lambda_i\,\lambda_m\,\lambda_\alpha\,\lambda_\beta}{\lambda_1\,\lambda_2\,\lambda_3}\left[\delta_{im}\,\delta_{\alpha\beta}\,A_{i\beta}+(1-\delta_{im})(\delta_{i\alpha}\,\delta_{m\alpha}+\right.$$

$$\left.+\,\delta_{i\beta}\,\delta_{m\alpha})\,\mu_{im}+\lambda_\alpha^{-2}\,\delta_{i\beta}\,\delta_{m\alpha}\,S_0^{\beta\beta}\right], \tag{2.9}$$

где

$$\begin{aligned}
&A_{i\beta} = \Big(\sum\nolimits_{ii}\sum\nolimits_{\beta\beta}+2\delta_{i\beta}B_{ii}\Big)\Phi^0; \qquad \mu_{ij} = B_{ij}\Phi^0;\\
&S_0^{\beta\beta} = \sum\nolimits_{\beta\beta}\Phi^0; \qquad \Phi^0 = \Phi^0(A_1^0,\,A_2^0,\,A_3^0); \qquad 2\varepsilon_{ii}^0 = \lambda_i^2-1;
\end{aligned} \tag{2.10}$$

$$\sum_{ii} = \frac{\partial}{\partial A_1^0} + 2\varepsilon_{ii}\frac{\partial}{\partial A_2^0} + 3\varepsilon_{ii}\frac{\partial}{\partial A_3^0}; \quad B_{ii} = \frac{\partial}{\partial A_2^0} + \frac{3}{2}(\varepsilon_{ii}^0 + \varepsilon_{jj}^0)\frac{\partial}{\partial A_3^0}. \tag{2.10a}$$

Для перехода к второму варианту теории малых начальных деформаций [4] в (2.10), необходимо положить

$$\delta_{ij} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \approx \delta_{ij}; \quad \varepsilon_{ii}^0 = \lambda_i - 1; \quad S_0^{\beta\beta} = \sigma_{\beta\beta}^0 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial \varepsilon_{i\beta}^0} + \frac{\partial}{\partial \varepsilon_{\beta i}^0}\right)\Phi^0. \tag{2.11}$$

Связь между составляющими тензора напряжений $\tilde{Q}$ и компонентами вектора перемещений $\vec{u}$ представим в форме

$$\tilde{Q}_{ij} = \omega_{ij\alpha\beta}\frac{\partial u_\alpha}{\partial y_\beta}. \tag{2.12}$$

Решение (2.3) представим через две функции ψ и χ

$$u_1 = \frac{\partial}{\partial y_1}\psi - \frac{\partial^2 \chi}{\partial y_1 \partial y_3}; \quad u_2 = -\frac{\partial \psi}{\partial y_1} - \frac{\partial^2 \chi}{\partial y_2 \partial y_3};$$
$$u_3 = \frac{\tilde{\omega}_{1111}}{\tilde{\omega}_{1133} + \tilde{\omega}_{1313}}\left(\Delta_2 + \frac{\tilde{\omega}_{3113}}{\tilde{\omega}_{1111}}\frac{\partial^2}{\partial y_3^2}\right)\chi; \quad \Delta_2 = \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_2^2}; \tag{2.13}$$

которые определяются из дифференциальных уравнений

$$\left(\Delta_2 + n_3\frac{\partial^2}{\partial y_3^2}\right)\psi = 0; \quad \left(\Delta_2 + n_1\frac{\partial^2}{\partial y_3^2}\right)\left(\Delta_2 + n_2\frac{\partial^2}{\partial y_3^2}\right)\chi = 0. \tag{2.14}$$

Величины $n_i (i = 1, 2)$ являются корнями квадратного уравнения

$$n^2 - 2An + A_1 = 0 \tag{2.15}$$

а A, A_1 и n_3 даются выражениями

$$n_3 = \frac{\tilde{\omega}_{3113}}{\tilde{\omega}_{1221}}; \quad n_{1,2} = A + (A^2 - A_1)^{\frac{1}{2}}; \tag{2.16}$$
$$2A\tilde{\omega}_{1111}\tilde{\omega}_{1331} = \tilde{\omega}_{1331}\tilde{\omega}_{3113} + \tilde{\omega}_{1111}\tilde{\omega}_{3333} - (\omega_{1133} + \tilde{\omega}_{1313})^2;$$
$$\tilde{\omega}_{1331}\tilde{\omega}_{3333}A_1 = \tilde{\omega}_{1331}\tilde{\omega}_{1111}.$$

В случае несжимаемых тел уравнения равновесия, условие несжимаемости, связь между составляющими тензора напряжений $\tilde{Q}$ и перемещениями, запишем в форме

$$\tilde{\varkappa}_{ij\alpha\beta}\frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial y_i \partial y_\beta} + q_{ij}\frac{\partial p}{\partial y_i} = 0; \quad q_{ij}\frac{\partial u_i}{\partial y_j} = 0;$$
$$Q_{ij} = \varkappa_{ij\alpha\beta}\frac{\partial u_\alpha}{\partial y_\beta} + \tilde{q}_{ij}p, \tag{2.17}$$

Здесь составляющие тензоров $\varkappa$ и $\tilde{q}$ определяются для теорий конечных (больших) начальных деформаций, первого варианта теории малых начальных деформаций выражениями

$$\tilde{\varkappa}_{ij\alpha\beta} = \lambda_j\lambda_\alpha[\delta_{ij}\delta_{\alpha\beta}A_{i\beta} + (1 - \delta_{ij})(\delta_{i\alpha}\delta_{j\beta} + \delta_{i\beta}\delta_{j\alpha})\mu_{ij}] +$$
$$+ \delta_{i\beta}\delta_{j\alpha}S_0^{\beta\beta}; \quad \tilde{q}_{ij} = \lambda_i q_{ij} = \lambda_i\delta_{ij}q_j, \tag{2.18}$$

а для второго варианта теории малых начальных деформаций имеем

$$\tilde{\varkappa}_{ij\alpha\beta} = \delta_{ij}\delta_{\alpha\beta}A_{i\beta} + (1-\delta_{ij})(\delta_{i\alpha}\delta_{j\beta} + \delta_{i\beta}\delta_{j\alpha})\mu_{ij} + \\ + \delta_{i\beta}\delta_{j\alpha}\sigma^0_{\beta\beta}; \quad \tilde{q}_{ij} = \lambda_i\delta_{ij}. \tag{2.19}$$

Величины $A_{i\beta}$, μ_{ij}, $S_0^{\beta\beta}$, $\sigma^0_{\beta\beta}$, входящие в (2.17) — (2.19), как и для сжимаемых тел определяются для каждого варианта постановки задач с использованием дифференциальных операторов (2.10а) с учетом конкретной зависимости упругого потенциала от алгебраических инвариантов. Так, для теории конечных (больших) начальных деформаций [5] получаем

$$\begin{aligned} &A_{i\beta} = \left(\sum\nolimits_{ii}\sum\nolimits_{\beta\beta} + 2\delta_{i\beta}B_{ii}\right)W^0 - 2p^0\delta_{i\beta}\lambda_\beta^{-4}; \quad q_i = \lambda_i^{-1}; \\ &\mu_{ij} = B_{ij}W^0 - p^0\lambda_i^{-2}\lambda_j^{-2}; \quad S_0^{\beta\beta} = \sum\nolimits_{\beta\beta}W^0 + p^0\lambda_\beta^{-2}; \\ &2\varepsilon_{ii} = \lambda_i^2 - 1; \quad \Phi(I_1^0, I_2^0) \equiv W^0(A_1^0, A_2^0). \end{aligned} \tag{2.20}$$

Для первого варианта теории малых начальных деформаций аналогичные соотношения принимают вид

$$\begin{aligned} &A_{i\beta} = \left(\sum\nolimits_{ii}\sum\nolimits_{\beta\beta} + 2\delta_{i\beta}B_{ii}\right)\Phi^0; \quad \mu_{ij} = B_{ij}\Phi^0; \\ &q_i = \lambda_i; \quad S_0^{\beta\beta} = \sigma^0_{\beta\beta} = \sum\nolimits_{\beta\beta}\Phi^0 + p^0; \ 2\varepsilon^0_{ii} = \lambda_i^2 - 1; \\ &\Phi^0 = \Phi(A_3^0, A_3^0). \end{aligned} \tag{2.21}$$

В случае второго варианта теории малых начальных деформаций в (2.19) следует положить

$$\begin{aligned} &A_{i\beta} = \left(\sum\nolimits_{ii}\sum\nolimits_{\beta\beta} + 2\delta_{i\beta}B_{ii}\right); \ \mu_{ij} = B_{ij}\Phi^0; \\ &\sigma^0_{\beta\beta} = \sum\nolimits_{\beta\beta}\Phi + p^0; \quad \Phi^0 = \Phi(A_2^0, A_1^0); \quad \varepsilon_{ii} = \lambda_i - 1. \end{aligned} \tag{2.22}$$

Общее решение системы (2.11) представим в виде

$$\begin{aligned} &u_1 = \frac{\partial\psi}{\partial y_2} - \frac{\partial^2\chi}{\partial y_1\partial y_3}; \quad u_2 = -\frac{\partial\psi}{\partial y_1} - \frac{\partial^2\chi}{\partial y_2\partial y_3}; \\ &u_3 = \lambda_1 q_1\lambda_3^{-1}q_3^{-1}\Delta_1\chi; \quad p = \lambda_1^{-1}q_1^{-1}\Big\{[\tilde{\varkappa}_{1111} - \lambda_1 q_1\lambda_3^{-1}q_3^{-1} \\ &(\tilde{\varkappa}_{1133} + \tilde{\varkappa}_{1313})]\Delta_1 + \tilde{\varkappa}_{3113}\frac{\partial^2}{\partial y_3}\Big\}\frac{\partial\chi}{\partial y_3}; \end{aligned} \tag{2.23}$$

Функции ψ и χ определяются из дифференциальных уравнений (2.9), только здесь

$$\begin{aligned} &n_3 = \frac{\tilde{\varkappa}_{3113}}{\tilde{\varkappa}_{1221}}; \quad \tilde{\varkappa}_{1331}A_1 = \lambda_1^{-2}q_1^{-2}\lambda_3^2 q_3\varkappa_{3113}; \\ &2A\tilde{\varkappa}_{1331} = \tilde{\varkappa}_{3333} + \lambda_1^{-2}q_1^{-2}\lambda_3^2 q_3^2\varkappa_{1111} - 2\lambda_1^{-1}q_1^{-1}\lambda_3 q_3(\tilde{\varkappa}_{1133} + \tilde{\varkappa}_{1313}). \end{aligned} \tag{2.24}$$

Ограничимся случаем $\mathrm{Im}(n_i) = 0$, $\mathrm{Re}(n_i) > 0$ $(i = 1, 2)$, который, как показано в [4], имеет место для всех потенциалов конкретной простейшей структуры в случае сжимаемых и несжимаемых тел с начальными напряжениями [3]. Этому случаю соответствуют такие начальные напряжения, которые не вызывают явление внутренней потери устойчивости [18]. Учитывая это обстоятельство, приходим к выводу, что возможны различные представления общего решения (2.8), (2.17) для равных и неравных корней (2.15).

Представляя функции ψ и χ через новые потенциалы φ_j $(j = 1, 2, 3)$ запишем решение (2.13) и (2.23) раздельно для равных и неравных корней в общем случае для сжимаемых и несжимаемых тел.

2.1. Неравные корни ($n_1 \neq n_2$). Как и в [4] введем новые функции

$$\psi = -\varphi_3; \qquad -\frac{\partial \chi}{\partial y_3} = \varphi_1 + \varphi_2. \tag{2.25}$$

Согласно (2.9) с учетом (2.10), (2.15) получаем уравнение для определения функций φ_j:

$$\left(\Delta_1 + \frac{\partial^2}{\partial z_j^2}\right)\varphi_j = 0; \qquad \left(\Delta_1 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{r^2 \partial \Theta}\right) \tag{2.26}$$

и выражения для перемещений и напряжений (при $y_3 = \mathrm{const}_j$):

$$\begin{aligned}
&u_r = \frac{\partial}{\partial r}(\varphi_1 + \varphi_2) - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \Theta}\varphi_3; \qquad u_\Theta = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \Theta}(\varphi_1 + \varphi_2) + \frac{\partial}{\partial r}\varphi_3;\\
&u_3 = \frac{m_1}{\sqrt{n_1}}\frac{\partial \varphi_1}{\partial z_1} + \frac{m_2}{\sqrt{n_2}}\frac{\partial \varphi_2}{\partial z_2};\\
&Q_{33} = c_{44}\left[(1+m_1)l_1\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial z_1^2} + (1+m_2)l_2\frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial z_2}\right];\\
&Q_{3r} = c_{44}\left[\frac{1+m_1}{\sqrt{n_1}}\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial r \partial z_1} + \frac{1+m_2}{\sqrt{n_2}}\frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial r \partial z_2} - \frac{1}{\sqrt{n_3}}\frac{1}{r}\frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial \Theta \partial z_3}\right];\\
&Q_{3\Theta} = c_{44}\left[\frac{1+m_1}{\sqrt{n_1}}\frac{1}{r}\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial \Theta \partial z_1} + \frac{1+m_2}{\sqrt{n_2}}\frac{\partial^2 \varphi_2}{r\partial \Theta \partial z_2} + \frac{1}{\sqrt{n_3}}\frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial r \partial z_3}\right].
\end{aligned} \tag{2.27}$$

где c_{44} — упругая постоянная [7].

Кроме того, в случае несжимаемых тел для скалярной величины p [1] через функции φ_j имеем выражение

$$\begin{aligned}
p = &-\lambda_1^{-1}q_1^{-1}\{[\tilde{\varkappa}_{1111} - \lambda_1 q_1 \lambda_3^{-1} q_3^{-1}(\tilde{\varkappa}_{1133} + \tilde{\varkappa}_{1313})\Delta_1(\varphi_1 + \varphi_2) -\\
&-\tilde{\varkappa}_{3113}\Delta_1(n_1^{-1}\varphi_1 + n_2^{-1}\varphi_2)\}.
\end{aligned} \tag{2.27a}$$

Здесь коэффициенты m_j, l_j, c_{44} имеют вид:

для сжимаемых тел

$$\begin{aligned}
&c_{44} = \tilde{\omega}_{1313}; \qquad m_j = (\tilde{\omega}_{1111}n_1 - \tilde{\omega}_{3113})(\tilde{\omega}_{1133} + \tilde{\omega}_{1313})^{-1};\\
&l_j = (\tilde{\omega}_{3333}m_j - \tilde{\omega}_{1133}n_j)n_j^{-1}(1+m_j)^{-1}\omega_{1313}; \qquad j = 1, 2.
\end{aligned} \tag{2.28}$$

для несжимаемых тел

$$\begin{aligned}
&c_{44} = \tilde{\varkappa}_{1313}; \qquad m_j = \lambda_1 q_1 \lambda_3^{-1} q_3^{-1} n_j; \qquad l_j = [\tilde{\varkappa}_{1313}n_j(1+m_j)]^{-1}\\
&[\tilde{\varkappa}_{3333}m_j + n_j(\lambda_1^{-1}q_1^{-1}\lambda_3 q_3 \tilde{\varkappa}_{1111} - \tilde{\varkappa}_{1313} - 2\tilde{\varkappa}_{1133}) - \lambda_1^{-1}q_1^{-1}\lambda_3 q_3 \tilde{\varkappa}_{3113}].
\end{aligned} \tag{2.29}$$

2.2. Равные корни ($n_1 = n_2$). В случае равных корней представим функции ψ и χ через потенциалы φ_i ($i = 1, 2, 3$) в виде

$$\psi = -\varphi_3; \quad \frac{\partial \chi}{\partial y_3} = -\varphi_1 - \varphi_2 - y_3 \frac{\partial \varphi_2}{\partial y_3}. \tag{2.30}$$

Аналогично как и для неравных корней получаем уравнения для их определения

$$\left(\Delta_1 + \frac{\partial^2}{\partial z_1^2}\right)\varphi_1 = 0; \quad \left(\Delta_1 + \frac{\partial^2}{\partial z_2^2}\right)\varphi_2 = 0; \quad \left(\Delta_1 + \frac{\partial^2}{\partial z_3^2}\right)\varphi_3 = 0 \tag{2.31}$$

Подставляя (2.13) и (2.23) в (2.12), (2.17) с учетом (2.25), (2.27), (2.29) для сжимаемых и несжимаемых тел компоненты вектора и тензора напряжений (для $y_3 = \text{const}$) представим в форме

$$\begin{gathered}
u_r = \frac{\partial}{\partial r}(\varphi_1 + \varphi_2) + z_1 \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial r \partial z_1} - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \Theta}\varphi_3; \\
u_\Theta = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \Theta}(\varphi_1 + \varphi_2) + \frac{z_1}{r}\frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial \Theta \partial z_1} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial r}; \\
u_3 = \frac{m_1}{\sqrt{n_1}}\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial z_1} + z_1 \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial z_1^2}\right) + \frac{m_2 - 1}{\sqrt{n_2}}\frac{\partial \varphi_2}{\partial z_1};
\end{gathered} \tag{2.32}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{Q}_{33} &= c_{44}\left\{\frac{\partial^2}{\partial z_1^2}[(1+m_1)l_1\varphi_1 + (1+m_2)l_2\varphi_2] + (1+m_1)l_1 z_1 \frac{\partial^3 \varphi_3}{\partial z_1^3}\right\}; \\
\tilde{Q}_{3r} &= c_{44}\left\{\frac{1}{\sqrt{n_1}}\frac{\partial^2}{\partial r \partial z_1}[(1+m_1)\varphi_1 + (1+m_2)\varphi_2] + \right. \\
&\quad \left. + \frac{1+m_1}{\sqrt{n_1}} z_1 \frac{\partial^3 \varphi_2}{\partial r \partial z_1} - \frac{1}{\sqrt{n_3}}\frac{1}{r}\frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial \Theta \partial z_1}\right\}; \\
\tilde{Q}_{3\Theta} &= c_{44}\left\{\frac{1}{\sqrt{n_1}}\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial \Theta \partial z_1}[(1+m_1)\varphi_1 + (1+m_2)\varphi_2] + \right. \\
&\quad \left. + \frac{1+m_1}{\sqrt{n_1}} z_1 \frac{\partial^3 \varphi_2}{r \partial \Theta \partial z_1^2} + \frac{1}{\sqrt{n_3}}\frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial r \partial z_3}\right\};
\end{aligned} \tag{2.33}$$

Дополнительно для несжимаемых тел находим выражение для определения искомой величины p [I].

$$\begin{aligned}
p = &-\lambda_1^{-1} q_1 \left\{\left[\tilde{\varkappa}_{1111} - \frac{\lambda_1 q_1}{\lambda_3 q_3}(\tilde{\varkappa}_{1133} + \tilde{\varkappa}_{1313})\right]\Delta_1 + n_1^{-1}\tilde{\varkappa}_{3113}\frac{\partial^2}{\partial z_1^2}\right\} \cdot \\
&\cdot \left(\varphi_1 + z_1 \frac{\partial}{\partial z_1}\varphi_2 + \varphi_2\right).
\end{aligned} \tag{2.34}$$

Выражения (2.26)—(2.34) получены в общей форме для сжимаемых и несжимаемых тел. Коэффициенты c_{44}, m_1, l_1 при этом определяются из выражений (2.28)—(2.29), а m_2 и l_2 имеют вид:

для сжимаемых тел

$$m_2 = \frac{\tilde{\omega}_{1133}-\tilde{\omega}_{1313}}{\omega_{1133}+\omega_{1313}}; \quad l_2 = \frac{\tilde{\omega}_{3333}(m_1+m_2-1)-\tilde{\omega}_{1133}\cdot n_1}{n_1(1+m_2)\tilde{\omega}_{1313}}; \tag{2.35}$$

для несжимаемых тел

$$m_2 = 1; \; l_2 = \frac{\tilde{\varkappa}_{3333} m_1 + n_1(\lambda_1^{-1} q_1^{-1} \lambda_3 q_3 \tilde{\varkappa}_{1111} - 2\tilde{\varkappa}_{1133} - \tilde{\varkappa}_{1313}) - \dfrac{3\lambda_1 q_1}{\lambda_3 q_3}\tilde{\varkappa}_{3113}}{2n_1 \varkappa_{1313}}. \tag{2.36}$$

В случае осесимметричной деформации необходимо положить $\varphi_3 = 0$, а в задаче кручения $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 0$. Таким образом, сформулированная задача сводится к решению уравнений (2.8) и (2.17) при граничных условиях (2.1)— (2.5) и определению напряжений и смещений из соотношений (2.27). (2.32), (2.33) и скалярной величины P, соответствующей гидростатическому давлению, из (2.27) и (2.33).

3. Определение перемещении и напряжении в цилиндре и слое

В соответствии с постановкой задачи рассматриваем случай осесимметричной деформации ($\varphi_3 = 0$). Представим гармонические функции φ_1 и φ_2 в виде ретрансформант Ханкеля. Для первого случая кратных корней ($n_1 = n_2$) имеем

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= -\frac{1}{1+m_1}\int\limits_0^\infty \left[A(\alpha)\operatorname{ch}\alpha\left(\frac{h}{\sqrt{n_1}}+z_1\right) - B(\alpha)\frac{\alpha h}{\sqrt{n_1}}\operatorname{ch}(\alpha z_1)\right]\frac{J_0(\alpha r)\,d\alpha}{\alpha\cdot\operatorname{sh}^2\left(\dfrac{\alpha h}{\sqrt{n_1}}\right)} \\ \varphi_2 &= -\frac{1}{1+m_2}\int\limits_0^\infty B(\alpha)\operatorname{ch}\alpha\left(\frac{h}{\sqrt{n_1}}+z_1\right)J_0(\alpha r)\frac{d\alpha}{\alpha\cdot\operatorname{sh}\left(\dfrac{\alpha h}{\sqrt{n_1}}\right)}; \end{aligned} \tag{3.1}$$

Для случая неравных корней функции $\varphi_1\ (r, z_i)$ представим следующим образом:

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= -\frac{\sqrt{n_1}}{1+m_1}\int\limits_0^\infty A(\alpha)\operatorname{ch}\alpha\left(\frac{h}{\sqrt{n_1}}+z_1\right)\frac{J_0(\alpha r)\,d\alpha}{\operatorname{sh}\left(\dfrac{\alpha h}{\sqrt{n_1}}\right)}; \\ \varphi_2 &= -\frac{\sqrt{n_2}}{1+m_2}\int\limits_0^\infty B(\alpha)\operatorname{ch}\alpha\left(\frac{h}{\sqrt{n_2}}+z_1\right)J_0(\alpha r)\frac{d\alpha}{\operatorname{sh}\left(\dfrac{\alpha h}{\sqrt{n_1}}\right)}; \end{aligned} \tag{3.2}$$

Здесь $A(\alpha)$ и $B(\alpha)$ — функции подлежащие определению.

Выбрав искомые функции φ_1 и φ_2 в виде (3.2) и (3.1), граничные условия (2.5) с учетом (2.27), (2.32) — (2.34) удовлетворяются тождественно. Удовлетворив третьему условию (2.2) и второму (2.3), после ряда преобразований получаем зависимость между $A(\alpha)$ и $B(\alpha)$ соответственно для равных и неравных корней

$$
\begin{aligned}
A(\alpha) &= -(1+m_2)(1+m_1)^{-1}B(\alpha), \quad (n_1 = n_2);\\
A(\alpha) &= -(1+m_2)(1+m_1)^{-1}n_1^{\frac{1}{2}}n_2^{-\frac{1}{2}}B(\alpha), \; (n_1 \neq n_2);
\end{aligned} \tag{3.3}
$$

Подставив значение (3.1) и (3.2) с учетом (3.3) в (2.27) (2.32) — (2.34) после ряда преобразований определим компоненты вектора перемещений и тензора напряжений на поверхности слоя с начальными напряжениями ($y_3 = 0$), для равных и неравных корней (2.15) в виде

$$
\begin{aligned}
u_3(r,0) &= -\frac{1}{\omega_1}\int_0^\infty \eta^{-1}F(\eta)J_0(\eta\varrho)\,d\eta - \frac{1}{\omega_1}\int_0^\infty \eta^{-1}F(\eta)G(\eta h)J_0(\eta\varrho)\,d\eta;\\
u_r(r,0) &= -\int_0^\infty \eta^{-1}F(\eta)g(\eta,1)g^{-1}(\eta,s)J_0(\eta\varrho)\,d\eta;\\
\tilde{Q}_{33}(r,0) &= \frac{2\omega_2}{R}\int_0^\infty F(\eta)J_0(\eta\varrho)\,d\eta.
\end{aligned} \tag{3.4}
$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$
\begin{gathered}
R\cdot\varrho = r; \quad \alpha R = \eta; \quad B(\eta/R) = R\cdot\eta^{-1}F(\eta)q^{-1}(\eta/R);\\
G(\eta h) = 1-q^{-1}(\eta h); \quad h = H_1/R;\\
g(\eta,s) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sh}\left(\dfrac{2\eta h}{\sqrt{n_1}}\right) + \dfrac{2}{s-s_0}\dfrac{\eta h}{\sqrt{n_1}}}{\operatorname{ch}\left(\dfrac{2\eta h}{\sqrt{n_1}}\right)-1}, & n_1 = n_2;\\[2ex] s\cdot\operatorname{cth}\left(\dfrac{2\eta h}{\sqrt{n_1}}\right) - s_3\operatorname{cth}\left(2\dfrac{\eta h}{\sqrt{n_2}}\right), & n_1 \neq n_2; \end{cases}
\end{gathered} \tag{3.5}
$$

$$
s_0 = \frac{1+m_2}{1+m_1}; \quad s = s_0 l_2/l_1; \quad s_3 = s_0\sqrt{\frac{n_1}{n_2}}; \quad s_2 = \frac{m_2}{m_1}\sqrt{\frac{n_1}{n_2}}
$$

$$
\omega_1 = \begin{cases} -\dfrac{\sqrt{n_1}(1+m_2)}{m_1(s_1-s_0)}, & (n_1 = n_2);\\[2ex] -\sqrt{\dfrac{n_1}{n_2}}\dfrac{1+m_2}{m_1(s_2-s_3)}, & (n_1 \neq n_2); \end{cases} \qquad \omega_2 = \begin{cases} -\dfrac{c_{44}l_1(s_0-s)}{2s_0}, & (n_1 = n_2);\\[2ex] -\dfrac{c_{44}l_1(s-s_3)}{2s_0}, & (n_1 \neq n_2). \end{cases}
$$

Для определения постоянных входящих в (2.2) и неизвестной функции $F(\eta)$ используем остальные граничные условия. Так четвертое (2.2) и первое (2.4) приводят к определению собственных значений задачи $\mu_k = t_k R$, $\beta_k = \pi k/H$, которые являются корнями характеристических уравнений

$$
\sin(\beta_k H) = 0; \quad J_1(t_k R) = 0. \tag{3.6}
$$

Удовлетворив условию (2.2), (2.4) с учетом ортогональности тригонометрических и Бесселивых функций получаем следующие рекурентные соотношения между произвольными постоянными [10].

$$
\begin{aligned}
&D_k = 0; \quad N_k = -2\nu F_k; \quad E_k = -\mu_k l N_k - M_k(2\nu \operatorname{sh}\mu_k l + \mu_k l \operatorname{ch}\mu_k l)\frac{1}{\operatorname{sh}\mu_n l};\\
&A_k = -B_k\left[2(1-\nu) + \frac{\tau_k I_0(\varepsilon_k)}{I_1(\tau_k)}\right]; \; -\varepsilon = 2A_0 + \frac{2(1-2\nu)}{1+\nu} RlB_0 + 6RlC_0;\\
&B_k = -\frac{4l^4 I_1(\tau_k)}{k\pi\omega_k}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{M_n\mu_n^2 J_0(\mu_n)\operatorname{th}\mu_n l}{(k^2\pi^2+\mu_n^2 l^2)^2}; \quad F_k = -2\nu M_k \operatorname{th}\mu_k l;\\
&\omega_k = -\frac{2(1-\nu)}{\tau_k} I_1^2(\tau_k) + \tau_k[I_0^2(\tau_k) - I_1^2(\tau_k)]; \quad \tau_k = \frac{k\pi}{l}; \quad l = \frac{H}{R}.
\end{aligned}
\tag{3.7}
$$

Первые условия (2.2) и (2.3) дают возможность определить неизвестную функцию $F(\eta)$ из парных интегральных уравнений

$$
\begin{aligned}
&\varkappa_0[\eta^{-1}F(\eta); \quad \eta \to \varrho] = f(\varrho) \qquad (\varrho \leqslant 1),\\
&\varkappa_0[F(\eta); \quad \eta \to \varrho] = 0 \qquad (\varrho > 1).
\end{aligned}
\tag{3.8}
$$

где

$$
f(\varrho) = -\varepsilon\omega_1(1-\chi_0) + \frac{(1-2\nu)\,\varepsilon\omega_1}{2(1-\nu)}\sum_{k=1}^{\infty}\chi_k J_0(\mu_k\varrho) + \int_0^{\infty}\eta^{-1}F(\eta)G(\eta h)J_0(\eta\varrho)\,d\eta.
$$

Второе условие (2.2) с учетом значения интегралов

$$
\begin{aligned}
&\int_0^1 \varrho I_0(\tau_k\varrho)J_0(\mu_n\varrho)\,d\varrho = \frac{\tau_k l^2 I_1(\tau_k)J_0(\mu_k)}{\mu_n^2 l^2 + \pi^2 k^2};\\
&\int_0^1 \varrho^2 I_1(\tau_k\varrho)J_0(\mu_n\varrho)\,d\varrho = \frac{\tau_k l^2 J_0(\mu_n)}{\mu_n^2 l^2 + k^2\pi^2}\left[I_0(\tau_k) - \frac{2_k\pi I_1(\tau_k)}{\mu_n^2 l^2 + k^2\pi^2}\right];
\end{aligned}
\tag{3.9}
$$

дает зависимость между неизвестной функцией $F(\eta)$ и постоянными χ_0 и $\chi_k (k = 1, 2 \ldots)$

$$
\begin{aligned}
&\int_0^{\infty}\eta^{-1}F(\eta)J_1(\eta)\,d\eta = -\frac{\varepsilon}{4l\omega_2}\chi_0;\\
&\int_0^{\infty}F(\eta)\,d\eta\int_0^1 \varrho J_0(\eta\varrho)J_0(\mu_k\varrho)\,d\varrho = -\frac{\omega_1\cdot\varepsilon\cdot E\cdot\mu_k\chi_k J_0^2(\mu_k)}{\omega_2 8(1+\nu)(1-2\nu)\operatorname{sh}^2\mu_k l}\cdot\\
&\cdot(2\mu_k l + \operatorname{sh}2\mu_k l) + 8\pi^3 E\frac{\omega_1}{\omega_2}l^4\cdot\varepsilon\sum_{m,\,n=1}^{\infty}\frac{\chi_k m^3 I_1(\tau_m)t_{km}t_{mn}}{2(1+\nu)(1-2\nu)\omega_n},
\end{aligned}
\tag{3.10}
$$

здесь

$$
M_k = -\frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}\frac{\varepsilon R^2}{\mu_k^2}\chi_k \operatorname{cth}\mu_k l, \qquad (k = 1, 2, 3 \ldots).
$$

Используя формулу обращения [19] к (3.8), для определения неизвестной функции $F(\eta)$ приходим к решению интегрального уравнения типа Фредгольма второго рода [10]

$$F(\eta) = -\frac{2\varepsilon\omega_1}{\pi}(1-\chi_0)\sin\eta+\eta\,\frac{\varepsilon\omega_1(1-2\nu)}{\pi(2-\nu)}\sum_{k=1}^{\infty}\chi_k\int_0^1\cos\eta y\cos\mu_k y\,dy+$$

$$+\frac{2}{\pi}\eta\int_0^1\cos\eta y\,dy\int_0^{\infty}F(u)G(uh)\cos uy\frac{du}{u}. \qquad (3.11)$$

Решение (3.11) ищем методом последовательных приближений, взяв за нулевое приближение функцию

$$F^{(0)}(\eta) = -\frac{2\varepsilon\omega_1}{\pi}(1-\chi_0)\sin\eta+\frac{2\varepsilon\omega_1(1-2\nu)}{\pi(1-\nu)}\sum_{k=1}^{\infty}\chi_k\eta\int_0^1\cos\eta y\cos\mu_k y\,dy. \qquad (3.12)$$

Последующие приближения определим по формуле

$$F^{(k)}(\eta) = \frac{2}{\pi}\eta\int_0^1\cos\eta y\,dy\int_0^{\infty}F^{(k-1)}(u)G(uh)\cos uy\frac{du}{u} \qquad (3.13)$$

и решение (3.11) запишем в виде

$$F(\eta) = \sum_{k=0}^{\infty}F^{(k)}(\eta). \qquad (3.14)$$

Используя принцип сжатых отображений [10] можно показать, что процесс последовательных приближений будет сходящимся, если $h > 1$.

Подставив (3.14) с учетом (3.12) — (3.13) в (3.10) после ряда преобразований и значения интегралов

$$\begin{aligned}
\int_0^{\infty}G(t)t^n dt &= 2\Gamma(n+2)\zeta(n+2)\frac{1}{\varkappa}-\\
&-\frac{\Gamma(n+2)}{\varkappa}\left[\left(2-\frac{1}{2^{n+1}}\right)\zeta(n+2)-2\left(1-\frac{1}{2^n}\right)\zeta(n+1)\right]-\\
&-\frac{1}{\varkappa(\varkappa+1)}\left\{\frac{\Gamma(n+3)}{2^{n+1}}+0{,}14\left[\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right)\left(\frac{1}{2^{n+1}}-2\right)\zeta(n+2)+\right.\right.\\
&\left.\left.+2\Gamma(n+1)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^{n+3}}\right]\right\}-\\
&-\frac{0{,}14\Gamma(n+3)}{\varkappa^2(\varkappa+1)}\left(1-\frac{1}{2^{n+3}}\right)\frac{\zeta(n+3)}{2^{n+1}}+2\Gamma(n+1)\left(1-\frac{1}{2^n}\right)\zeta(n+1)
\end{aligned} \qquad (3.15)$$

для определения постоянных χ_k получаем бесконечную систему алгебраических уравнений.

$$\alpha_k\chi_n+\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_{kn}\chi_n = d_k, \quad (k = 0, 1, 2 \ldots), \qquad (3.16)$$

Здесь $\zeta(z)$ — дзета функция Римана, $\Gamma(z)$ — гамма — функция. Ввиду громоздкости выражений для коэффициентов α_k, α_{kn} и d_k пирведем здесь их через квадратуры.

$$\alpha_0 = d_0 = \frac{2}{\pi}\left[1 + \frac{\pi}{2}\sum_{i=1}^{\infty}\int_0^{\infty}\frac{\sin u}{u^2}G(uh)p_{i-1}(u)\,du\right]$$

$$\alpha_{0n} = \frac{\omega_1(1-2\nu)}{\pi(1-\nu)}\left[\beta_1(\mu_n) + \frac{2}{\pi}\sum_{i=}^{\infty}\int_0^{\infty}\frac{\sin u}{u^2}G(uh)q_{i-1}(\mu_n, u)\,du\right]$$

$$\alpha_{k0} = \frac{2}{\pi}\left[\beta_1(\mu_k) + \frac{2}{\pi}\sum_{i=1}^{\infty}\int_0^{\infty}\frac{\beta_1(u, \mu_k)}{u}G(uh)p_{i-1}(u)\,du\right];$$

$$\alpha_{kn} = \frac{1-2\nu}{\pi(1-\nu)}\left[\beta_1(\mu_k, \mu_n) + \right.$$

$$\left. + \frac{2}{\pi}\sum_{i=1}^{n}\int_0^{\infty}\frac{\beta_1(u, \mu_k)}{u}G(uh)q_{i-1}(u, \mu_n)\,du\right] + \tag{3.17}$$

$$+ \frac{8E(1-\nu)}{1+\nu}\,\frac{\pi^3 l^4}{\omega_1\omega_2}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{m^3 I_1^2(\tau_m)\,t_{km}\cdot t_{mn}}{\omega_m};$$

$$\alpha_{k0} = d_k; \qquad \alpha_{00} = \frac{E}{8l\omega_1\omega_2};$$

$$\alpha_k = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\,\frac{\mu_k J_0^2(\mu_k)}{4\omega_2 \operatorname{sh}^2\mu_k l}\,(2\mu_k l + \operatorname{sh}\mu_k l),$$

где

$$t_{km} = \frac{\mu_k^2 J_0(\mu_k)}{(\pi^2 m^2 + \mu_k^2 l^2)^2}; \tag{3.18}$$

$$\beta_1(\mu_k) = \int_0^{\infty} J_1(\eta)\,d\eta\int_0^1 \cos\eta y\cos\mu_k y\,dy =$$

$$= \int_0^1 \varrho J_0(\mu_k\varrho)\,d\varrho\int_0^{\infty} J_0(\eta\varrho)\sin\eta\,d\eta = \frac{\sin\mu_k}{\mu_k};$$

$$\int_0^{\infty}\eta\cos\eta y\,dy\int_0^1\cos\mu_n y\,dy\int_0^1\varrho J_0(\eta\varrho)J_0(\mu_k\varrho)\,d\varrho =$$

$$= \frac{1}{\mu_n^2 - \mu_k^2}(\mu_n\cos\mu_k\sin\mu_n - \mu_k\sin\mu_k\cos\mu_n) = \beta_1(\mu_k, \mu_n);$$

$$p_0(\eta) = \sin\eta; \qquad q_0(\mu_k, \eta) = \eta\int_0^1\cos uy\cos\mu_k y\,dy.$$

Заметим, что для вычисления квадратур входящих в (3.17) и последующие выражения для напряжений и смещений функции аппроксимируем их приближенным значениям

$$
\begin{gathered}
1-\frac{1}{\varkappa+1}\,\frac{x}{\operatorname{sh} x}-\frac{0{,}14}{\varkappa(\varkappa-1)}\,\frac{x}{\operatorname{ch} x} \qquad (n_1=n_z),\\
1-\frac{\varkappa}{1+\dfrac{\xi_1}{\xi_2}\varkappa}\,\frac{\operatorname{sh}\xi_1 x}{\operatorname{ch}\xi_1 x}-\frac{0{,}28\,\varkappa^2\dfrac{\xi_1}{\xi_2}}{1+\dfrac{\xi_1}{\xi_2}\varkappa}\,\frac{\operatorname{sh}\xi_1 x}{\operatorname{ch}\xi_2 x} \qquad (n_1\neq n_2),
\end{gathered} \tag{3.19}
$$

где $\xi_1=\sqrt{n_2}-\sqrt{n_1}$; $\xi_2=\sqrt{n_2}+\sqrt{n_1}$, а $\varkappa$ имеет вид

$$
\varkappa=\begin{cases} s-s_0 & n_1=n_2,\\ \dfrac{s+s_3}{s-s_3} & n_1\neq n_2. \end{cases}
$$

В системе (3.16) коэффициенты α_k и α_{kn} зависят от величины ω_1 и ω_2, характеризующих структуру упругого потенциала, высоты цилиндра H и толщины слоя h_1, а свободные члены d_k — только от корней характеристических уровней (3.6). Можно показать, что система (3.16) для упругих потенциалов гармонического типа, Бартенева — Хазановича и Трелоара является квазирегулярной, и её решение может быть найдено методом редукции с урезанной системой. Аналогичное доказательство можна провести и для потенциалов произвольной структуры.

Определив χ_k можно вычислить напряжения и перемещения в любой точке как цилиндра так и слоя. Переходя к безразмерной координате $\zeta=y_3/R$ приведем формулы для σ_{zz} и u_z а также u_3 на границе полупространства $y_3=0$. ($\tilde{Q}_{33}$ — неприводится в виду (2.2)).

$$
\begin{aligned}
u_z(\varrho,\zeta)=&-\varepsilon\frac{\delta\omega_1+\pi\omega_2\zeta}{\delta\omega_1+\pi\omega_1 l}-\varepsilon\frac{(1-2\nu)}{2\omega_1(1-\nu)}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\chi_k J_1(\mu_k\varrho)}{\operatorname{sh}^2\mu_n l}\,r_k+\\
&+\frac{4\varepsilon\pi l}{\omega_1(1-2\nu)}\sum_{k,n=1}^{\infty}\frac{k t_{kn}\chi_k}{\omega_k}(\beta_k a_k-2(1-\nu)/b_k)\sin\beta_n\zeta.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\sigma_z(\varrho,\zeta)=&-\frac{\varepsilon E}{Rl}\left[\frac{\pi l\omega_2}{\delta\omega_1+\pi l\omega_2}+\frac{l\omega_1^{-1}}{(1+\nu)(1-2\nu)}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\mu_k\chi_k J_0(\mu_k\varrho)}{\operatorname{sh}^2\mu_k l}\cdot c_k\right]\\
u_3(\varrho,0)=&\left[\frac{\delta\omega_1}{\delta\omega_1+\pi l\omega_2}\arcsin\frac{1}{\varrho}-\frac{1-2\nu}{2(1-\nu)\omega_1}\sum_{k=1}^{\infty}\chi_k\frac{J_0(\mu_k\varrho)}{\mu_k}\right]-\\
&-\frac{1}{\omega_1}\sum_{k=0}^{\infty}\int_0^{\infty}F^{(k)}(\eta)J_0(\eta\varrho)\,d\eta \qquad (\varrho<1);
\end{aligned} \tag{3.20}
$$

$$u_3(\varrho,0) = -\frac{2\varepsilon}{\pi}\left[\frac{\delta\omega_1}{\delta\omega_1+\pi l\omega_2}\arcsin\frac{1}{\varrho}-\right.$$

$$-\frac{1-2\nu}{2(1-\nu)\omega_1}\sum_{k=1}^{\infty}\chi_k\left[J_0(\mu_k\varrho)\arcsin\frac{1}{\varrho}+\right. \tag{3.20}$$

$$\left.\left.+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{J_{2n}(\mu_k\varrho)}{n}\sin\left(2n\arcsin\frac{1}{\varrho}\right)\right]-\frac{1}{\omega_1}\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\infty}\eta^{-1}F^{(k)}\cdot\right.$$

$$\left.\cdot(\eta)G(\eta h)J_0(\eta\varrho)d\eta\right], \quad (\varrho<1).$$

Здесь введены следующие обозначения

$$\begin{aligned} r_k &= -2(1-\nu)\operatorname{sh}\mu_k l\operatorname{sh}\mu_k(l-\zeta)+\mu_k[l\operatorname{sh}\mu_k\zeta-\zeta\operatorname{sh}\mu_k l\operatorname{ch}\mu_k(l-\zeta)];\\ c_k &= \operatorname{sh}\mu_k l\operatorname{ch}\mu_k(l-\zeta)+\mu_k[l\operatorname{ch}\mu_k\zeta+\zeta\operatorname{sh}\mu_k l\operatorname{sh}\mu_k(l-\zeta)];\\ a_k &= \varrho I_1(\tau_k\varrho)I_1(\tau_k)-I_0(\tau_k)I_0(\tau_k\varrho); \end{aligned} \tag{3.21}$$

$b_k = \varrho I_1(\tau_k\varrho)I_1(\tau_k)$; $\delta = \dfrac{E}{E_1}$ — для сжимаемых тел, $\delta = \dfrac{E}{c_{10}}$ — для несжимаемых тел.

Из условия равновесия цилиндра получаем зависимость для вычисления внешней силы в зависимости от заданной осадки в виде

$$P = \pi^2\varepsilon RE\left(\pi l+\delta\frac{\omega_1}{\omega_2}\right)+\frac{4\pi\omega_2}{R}\int_0^R\varrho\,d\varrho\int_0^{\infty}F(\eta)J_0(\eta\varrho)d\eta. \tag{3.22}$$

Из полученных решений можно получить ряд частных случаев. Так, устремив $\nu_1\to -1$ (жёсткий слой) формулы (3.20) дают решение задачи сопротивления материалов о сжатии кругового цилиндра осевой силой, если $\nu\to -1$ из (3.21) получаем выражение для перемещения точек слоя при давлении на него жесткого штампа [8]. При $h_1\to\infty$ формулы (3.20) и (2.21) переходят в [5].

4. Численный анализ

Решения (3.20) и (3.21) зависят от постоянных χ_k, которые определяются из системы (3.16). Квазирегулярность этой системы не зависит от l, h и δ. Следовательно, они пригодны для любых их значений. Все расчеты реализованы на ЭВМ ЕС—1022 для $\nu_1 = \nu = 0{,}3$, $l = 10$, $h = 4$. В таблице I приводится вичисления силы, которую нужно приложить к штампу в зависимости от заданного перемещения торца цилиндра ε. Сравнение с [10] показывает о значительном влиянии начальных напряжений на напряженно-деформируемое состояние взаимодействующих тел.

Таблица 1. $h = 4 \quad \delta = 8$

λ_1	Гармонический потенциал	Потенциал Трелоара
0,6	0,201	0,398
0,7	0,281	0,406
0,8	0,293	0,409
0,9	0,310	0,442
1	0,159	0,159
1,1	0,342	0,445
1,2	0,341	0,531

Литература

1. А. Н. Гузь, *Устойчивость трехмерных деформируемых тел.* Киев, Наук. думка. 1971, 276 с.
2. А. Н. Гузь, *Устойчивость упругих тел при конечных деформациях.* Киев, Наук. думка, 1973, 272 с.
3. А. Н. Гузь, *Устойчивость упругих тел при всесторонем сжатии.* Киев, Наук. думка, 1979, 144 с.
4. А. Н. Гузь, *Механика хрупкого разрушения материалов с начальными напряжениями.* Киев, Наук. думка, 1983, 286 с. 34 - 40.
5. А. Н. Гузь, В. Б. Рудницкий, *Контактная задача о давлении упругого штампа на упругое полупространство с начальными напряжениями.* Прикл. механика, 1984, 20, № 8, с. 3 - 11.
6. А. Н. Гузь, В. Б. Рдницкий, *Контактные задачи для полуплоскости с начальными напряжениями усиленной накладкой.* Прикл. механика, 1985, 21, № 3,
7. А. Н. Гузь, В. Б. Рудницкий, *Периодическая контактная задача для полуплоскости с начальными напряжениями, усиленной упругими накладками.* Докл. АН СССР, 1985, № 2.
8. С. Ю. Бабич, *Контактпаяя задача теории упругости для слоя с начальными напряжениями.* Прикл. механика, 1984, 20, № 6.
9. В. М. Александров, В. С. Порошин, *Контактная задача для предварительно напряженного физически нелинейного упругого слоя.* Инж. ж. МТТ, 1984, № 6, с. 79 - 85.
10. Д. В. Грилицкий, Я. М. Кизыма, *Осесимметричные контактные задачи теории упругости и термоупругости.* Львов, Изд-во Львовс. ун-та. 1981, 135 с.
11. Я. С. Уфленд, *Интегральные преобразования в задачах теории упругости.* Изд-во „Наука", Л. 1968, 402 с.
12. И. И. Ворович, В. М. Александров, В. А. Бабешко, *Неклассические смешанные задачи теории упругости.* Из-во „Наука", М., 1974, 455 с.
13. В. М. Александров, С. М. Мхитарян, *Контактные задачи для тел с тонкими покритилми и прослойками.* М. М, „Наука", Главная редакция физико-математической литературы, 1983, 488 с.
14. Г. Я. Попов, *Контактные задачи для линейно-деформируемого основания.* Киев, Одесса, Вища школа. Главное изд-во, 1982, 168 с.
15. Г. Я. Попов, *Концентрация упругиб напряжений возле штампов разрезов тонких включений и подкреплений.* М., Наука. Главная редакциа физико-математической литературы, 1982, 344 с.
16. *Развитие теории контактных задач в СССР.* Изд-во „Наука", М., 1976, 492 с.
17. S. Rajit, R. S. Dhaliwal, B. M. Sing, J. G. Rokne, *Axisymmetric contact and crack problems for an initially stressed Neo-Hooken elastic layer.* Int. J. Eng. Sci., 1980, 18, Nr 1.
18. M. A. Biot, *Mechanics of incremental deformations.* New York, John Willey and Sons, 1965, 504 p.
19. B. Noble, *The solution of Bessel function dual integral equations by a multiplying factor method.* Proc. Cambridge Philos. Soc. 59, N2, 1963, pp. 147 - 159.

S t r e s z c z e n i e

KONTAKTOWE ODDZIAŁYWANIE SPRĘŻYSTEGO STEMPLA ZE WSTĘPNIE NAPRĘŻONĄ WARSTWĄ

W ramach zlinearyzowanej teorii sprężystości podano rozwiązanie mieszanego zagadnienia brzegowego opisującego wciskanie sprężystego walca we wstępnie naprężoną warstwę. Zagadnienie rozwiązano w postaci ogólnej dla teorii dużych (skończonych) wstępnych deformacji oraz różnych teorii małych wstępnych deformacji przy dowolnej strukturze potencjału sprężystego. Przy pomocy transformacji zagadnienie sprowadzono do quasiregularnego układu równań algebaicznych. Podano przykład numeryczny.

S u m m a r y

CONTACT INTERACTION OF AN ELASTIC PUNCH AND A PRESTRESSED LAYER

Within the framework of the linearized elasticity the solution of mixed boundary value problem for an elastic cylinder pressing into a prestressed layer is given. The problem is solved in the general form for the theory of large (finite) initial deformations and various theories of small deformations with an arbitrary structure of elastic potential. By using transformation the given problem is reduced to the quasi-regular system of algebraic equations. The numerical example is considered.

Praca wpłynęła do Redakcji dnia 6 stycznia 1986 roku.