

WARIACYJNE UJĘCIE PRZEPIYWÓW TERMODYFUZYJNYCH SPRZEŻONYCH Z POLEM NAPRĘŻEŃ

MAREK WRÓBEL

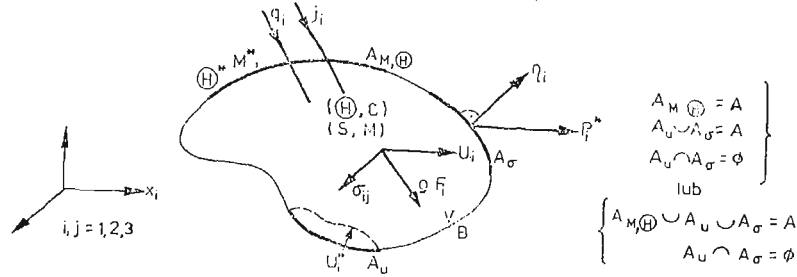
Wyższa Szkoła Inżynierska, Opole

1. Wstęp

Zasady wariacyjne zajmują jedno z centralnych miejsc w zadaniach mechaniki i fizyki ośrodka ciągłego. Wynika to z kilku przyczyn, z których najistotniejsze to możliwość wyprowadzenia równań mechaniki oraz konstruowanie przybliżonych metod rozwiązań szczególnie istotnych przy rozwiązywaniu zadań numerycznych. Stąd problematyka formułowania zasad wariacyjnych dla zadań początkowo-brzegowych w ramach coraz to ogólniejszych teorii była zawsze przedmiotem intensywnych badań. I tak w ramach teorii termo sprężystości do pierwszych prac tego typu zaliczyć należy prace Biota [3, 4]. Rozszerzenie zasad wariacyjnych proponowanych przez Biota znaleźć można w pracach Herrmana [11] Ben-Amoza [2] i Bao-Liana [1]. Wszystkie te prace opierają się na zasadzie Hamiltona. Istotnym krokiem naprzód pozwalającym na bezpośrednie włączenie warunków początkowych do równań pola są zasady wariacyjne typu splotowego zaproponowane przez Gurtina [9, 10]. Prace Gurtina dają możliwość stosowania zasad wariacyjnych w dynamicznych zagadnieniach lepkosprężystości. Obecnie twierdzenia wariacyjne lepkosprężystości znaleźć można w licznych opracowaniach, że wymienimy tu prace Christensena [5], Onata [21], oraz Olszaka i Perzyny [20]. Rozszerzenie zasad wariacyjnych typu Gurtina na zadania termosprężystości znajdujemy w pracy Nickella i Sackmana [19]. Z kolei bardzo ciekawą i przeglądową pracę dotyczącą twierdzeń wariacyjnych termo-lepkosprężystości zaprezentował Reddy [22]. Natomiast wciąż jeszcze znikoma jest liczba prac dotyczących wariacyjnego ujęcia termodyfuzji lepkosprężystej i sprężystej. W zakresie sprężystym wariacyjną formę równań termodyfuzji uzyskali Podstrigacz i Szewczuk [29], lecz najbardziej bogate ujęcie tej problematyki znaleźć można w pracy Szweca i Dasjuka [31]. Natomiast w zakresie lepkosprężystym — korzystając z metod analizy funkcjonalnej i wykorzystując metodykę postępowania Gurtina [10] — interesujące wyniki uzyskał Wyrwał [24]. W opracowaniu tym zaprezentujemy budowę funkcjonau dla zadań sprzężonej termodyfuzji lepkosprężystej. Otrzymany funkcjonau posłuży do analizy sprzężeń przepływów termodyfuzyjnych z polem naprężeń na przykładzie pewnego problemu początkowo-brzegowego. Wydaje się że analiza taka może być celowa, gdyż autorzy niewielu publikacji z zakresu termodyfuzji sprężystej i lepkosprężystej skupiają uwagę na teoretycznych podstawach problemu [13, 17, 18, 29, 31]. Znane

są rozwiązaniami pewnych zagadnień brzegowych [6, 8, 14, 23] lecz brak jest tam przykładów liczbowych obrazujących rozważane procesy i mogących posłużyć do analizy sprzężeń rozpatrywanych wielkości polowych.

Wprowadzamy w analizowanym zadaniu następujące oznaczenia:



Rys. 1. Ciało lepkosprężyste

U_i^*, P_i^* — wektory przemieszczeń i sił zewnętrznych zadane odpowiednio na brzegach A_u i A_σ ciała β

$q F_i$ — siła masowa jednostki objętości ciała β

T_1, C_1 — odpowiednio temperatura i koncentracja w chwili t

T_0, C_0 — odpowiednio temperatura i koncentracja stanu naturalnego

$$\Theta = T_1 - T_0; \quad C = C_1 - C_0$$

K_{ij}, K'_{ij} — odpowiednio tensory przewodności cieplnej i dyfuzyjnej

$E_{ijkl}, \varphi_{ij}, \Phi_{ij}$ — tensory funkcji relaksacji

M — potencjał chemiczny

Θ^*, M^* — różnice temperatur (Θ^*) i potencjał chemiczny (M^*) dane na brzegach A_M i A_Θ ciała β

r_1, r_2 — odpowiednio źródło masy i źródło ciepła w jednostce objętości i na jednostkę czasu

S — entropia

l, m, n — funkcje relaksacji

q_i, j_i — odpowiednio strumienie ciepła i masy

* — symbol oznaczający mnożenie splotowe

$$f_1 * df_2 = \int_0^t f_1(t-\tau) df_2(\tau); \quad f_1 * df_2 = f_2 * df_1$$

$(\dots)_i$ — oznacza pochodną cząstkową

(\dots) — oznacza pochodną względem czasu $\frac{d(\dots)}{dt}$

$H(t)$ — jest funkcją Heaviside'a

2. Budowa funkcjonału dla zadań sprzężonej termodyfuzji lepkosprężystej

Punktem wyjścia do budowy funkcjonału są następujące równania sprzężonej termodyfuzji [13, 17, 18]:

$$\sigma_{ij} = E_{ijkl} * d\varepsilon_{kl} - \varphi_{ij} * d\Theta + \Phi_{ij} * dC, \quad (2.1)$$

$$\varrho S = \varphi_{ij} * d\varepsilon_{ij} + m * d\Theta + l * dC, \quad (2.2)$$

$$M = \Phi_{ij} * d\varepsilon_{ij} - l * d\Theta + n * dC, \quad (2.3)$$

$$\varrho S + \frac{q_{i,i}}{T_0} * H(t) = \frac{\hat{\varrho} r_2}{T_0}, \quad (2.4)$$

gdzie: $\frac{\hat{\varrho} r_2}{T_0} = \frac{\varrho r_2}{T_0} * H(t) + \varrho S(0^+) \cdot H(t),$

$$\dot{C} + j_{i,i} - r_1 = 0, \quad (2.5)$$

$$q_i = -K_{ij} \Theta_{,j}, \quad (2.6)$$

$$j_i = -K'_{ij} M_{,j}, \quad (2.7)$$

$$\sigma_{ij,j} + \varrho F_i = 0, \quad (2.8)$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (U_{i,j} + U_{j,i}), \quad (2.9)$$

$$\sigma_{ij} n_j = P_i^* \quad \text{na } A_\sigma \times [0, \infty], \quad (2.10)$$

$$q_i n_i = q_n^* \quad \text{na } A_q \times [0, \infty], \quad (2.11)$$

$$j_i n_i = j_n^* \quad \text{na } A_j \times [0, \infty], \quad (2.12)$$

$$U_i = U_i^* \quad \text{na } A_u \times [0, \infty], \quad (2.13)$$

$$M = M^* \quad \text{na } A_M \times [0, \infty], \quad (2.14)$$

$$C(0^+) = \tilde{C}_0 \quad \text{na } E, \quad (2.15)$$

$$\varrho S(0^+) = \varrho S_0 \quad \text{na } E. \quad (2.16)$$

Gdzie układ równań problemu (2.1)÷(2.9) jest spełniony w obszarze $E \times [0, \infty)$, przy czym E jest regularnym obszarem trójwymiarowej przestrzeni euklidesowskiej, natomiast $[0, \infty]$ jest przedziałem czasowym.

Budowę funkcjonału rozpoczniemy od mechanicznej części problemu. Wstawimy na-prężenia (2.1) do warunku brzegowego (2.10) oraz do równania równowagi (2.8), które następnie mnożymy splotowo przez $(-\delta dU_i)$ i całkujemy po objętości \mathcal{V} . Wykorzystując twierdzenie Gaussa-Ostrogradzkiego o zamianie całki objętościowej na powierzchniową po odpowiednich operacjach uzyskujemy równanie

$$\int_{\mathcal{V}} [E_{ijkl} * d\varepsilon_{kl} * d\delta U_{i,j} - \varphi_{ij} * d\Theta * d\delta U_{i,j} + \Phi_{ij} * dC * d\delta U_{i,j} - \varrho F_i * d\delta U_i] dV - \int_{A_\sigma} [P_i^* * d\delta U_i] dA = 0. \quad (2.17)$$

Z kolei warunek brzegowy na przemieszczenia (2.13) mnożymy splotowo przez (δdP_i) i całkujemy po powierzchni A otrzymując:

$$\int_{A_u} [(U_i^* - U_i) * d\delta P_i] dA = 0. \quad (2.18)$$

Aby zbudować dyfuzyjną część funkcjonału podstawiamy potencjał chemiczny (2.3) do strumienia masy (2.7) a strumień masy do warunku brzegowego (2.12) i bilansu (2.5). Otrzymany bilans masy mnożymy splotowo przez $(-\delta M) = \delta(-\Phi_{ij} * d\varepsilon_{ij} + l * d\Theta + -n * dC)$ i całkujemy po objętości V . Po przekształceniach otrzymujemy:

$$\begin{aligned} & \int_V [-\Phi_{ij} * dC * d\delta\varepsilon_{ij} + l * dC * d\delta\Theta - n * dC * d\delta C + \tilde{C}_0(\Phi_{ij} * d\delta\varepsilon_{ij} - l * d\delta\Theta + \\ & + n * d\delta C) - K'_{ij}(\Phi_{kl} * \Phi_{pr} * d\varepsilon_{kl,j} * d\delta\varepsilon_{pr,i} - \Phi_{kl} * l * d\varepsilon_{kl,j} * d\delta\Theta_{,i} + \\ & + \Phi_{kl} * n * d\varepsilon_{kl,j} * d\delta C_{,i} - \Phi_{kl} * l * d\Theta_{,j} * d\delta\varepsilon_{kl,i} + l * l * d\Theta_{,j} * d\delta\Theta_{,i} + \\ & - l * n * d\Theta_{,j} * d\delta C_{,i} + \Phi_{kl} * n * dC_{,j} * d\delta\varepsilon_{kl,i} - l * n * dC_{,j} * d\delta\Theta_{,i} + \\ & + n * n * dC_{,j} * d\delta C_{,i}) + r_{1i} * (\Phi_{ij} * d\delta\varepsilon_{ij} - l * d\delta\Theta + n * d\delta C)] dV + \\ & - \int_{A_j} [j_n^* * \delta(\Phi_{ij} * d\varepsilon_{ij} - l * d\Theta + n * dC)] dA. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Dla uzyskania cieplnej części funkcjonału wyrażenie na gęstość entropii (2.2) mnożymy splotowo przez $(\delta d\Theta)$ i całkujemy po objętości V otrzymując

$$\int_V [\varrho S * d\delta\Theta - \varphi_{ij} * d\varepsilon_{ij} * d\delta\Theta - m * d\Theta * d\delta\Theta - l * dC * d\delta\Theta] dV = 0. \quad (2.20)$$

Z kolei strumień ciepła (2.6) wstawiamy do warunku brzegowego (2.11) oraz do równania (2.4) które następnie mnożymy przez $(\delta d\Theta)$ i całkujemy po objętości V . Po przekształceniu otrzymujemy

$$\begin{aligned} & \int_V \left[\frac{\varrho r_2}{T_0} * H(t) * d\delta\Theta + \varrho S_0 H(t) * d\delta\Theta - \delta \left(\frac{1}{2} \frac{K_{ij}\Theta_{,j}}{T_0} * H(t) * d\Theta_{,i} + \right. \right. \\ & \left. \left. - \varrho S * d\delta\Theta \right] dV - \int_{A_q} \left[q_n^* * \frac{H(t)}{T_0} * d\delta\Theta \right] dA = 0 \end{aligned} \quad (2.21)$$

Dodajemy teraz do siebie stronami zależności (2.17), (2.18), (2.19), (2.20), (2.21) wstawiając w nich zamiast tensora odkształcenia gradienty przemieszczeń (2.9). Wykorzystując symetrię tensorów E_{ijkl} , φ_{ij} , Φ_{ij} , K'_{ij} , K_{ij} możemy po redukcji wyrazów podobnych wyłączyć znak wariacji przed wyrażenie określające otrzymaną sumę. Wyrażenie to jest poszukiwanym funkcjonałem termodyfuzji lepkosprężystej

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[U_i, C, \Theta] = & \int_V \left[\frac{1}{2} E_{ijkl} * dU_{k,i} * dU_{l,j} - \varphi_{ij} * dU_{l,j} * d\Theta - \frac{1}{2} n * dC * dC + \right. \\ & - \frac{1}{2} m * d\Theta * d\Theta - K'_{ij} \left(\frac{1}{2} \Phi_{kl} * \Phi_{pr} * dU_{k,lj} * dU_{p,ri} - \Phi_{kl} * l * dU_{k,lj} * d\Theta_{,i} + \right. \\ & + \Phi_{kl} * n * dU_{k,lj} * dC_{,i} + \frac{1}{2} l * l * d\Theta_{,j} * d\Theta_{,i} - l * n * d\Theta_{,j} * dC_{,i} + \\ & \left. \left. + \frac{1}{2} n * n * dC_{,j} * dC_{,i} + \tilde{C}_0(\Phi_{ij} * dU_{l,j} - l * d\Theta + n * dC) + \varrho S_0 H(t) * d\Theta + \right. \right. \end{aligned} \quad (2.22)$$

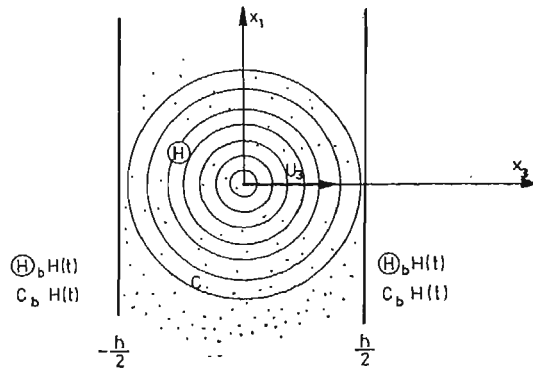
$$\begin{aligned}
 & + \frac{\varrho r_2}{T_0} * H(t) * d\Theta + r_1 * (\Phi_{i,j} * dU_{i,j} - l * d\Theta + n * dC) - \frac{H(t)}{2} * \frac{K_{i,j}}{T_0} \Theta_{,j} * \\
 & * d\Theta_{,i} - \varrho F_i * dU_i \Big] dV - \int_{A_\sigma} [P_i^* * dU_i] dA - \int_{A_u} [(U_i^* - U_i) * dP_i] dA + \\
 & - \int_{A_2} \left[q_n^* * \frac{H(t)}{T_0} * d\Theta \right] dA - \int_{A_j} [j_n^* * (\Phi_{i,j} * dU_{i,j} - l * d\Theta + n * dC)] dA.
 \end{aligned} \tag{2.22}$$

Należy zwrócić uwagę, że funkcjonal powyższy otrzymany został przy założeniu, że potencjał chemiczny określony jest równaniem konstytutywnym (2.3), a związki geometryczne dane są równaniem (2.9). Zbudowany funkcjonal wykorzystany będzie dalej do rozwiązania pewnego zadania początkowo — brzegowego sprzężonej termodyfuzji.

3. Zastosowanie — o pewnym zadaniu sprzężonej termodyfuzji w warstwie

Sformułujemy teraz zasadniczy w całej pracy PROBLEM: Należy wyznaczyć pola temperatury, koncentracji i przemieszczeń, a w dalszej kolejności odkształceń i naprężeń w warstwie zdeterminowane przez zadane na brzegach wartości temperatury i koncentracji, oraz określić wpływ wzajemnych sprzężeń między rozpatrywanymi polami na ich rozkład.

Rozpatrzmy więc warstwę o grubości h , w której występuje pole temperatury Θ , koncentracji C i przemieszczeń U_i . Zakładamy, że zagadnienie przez nas rozpatrywane jest jednowymiarowe, tzn. wszystkie pola zależą od jednej zmiennej przestrzennej x_3 , oraz że środek jest izotropowy, brak w nim źródeł ciepła i masy oraz sił masowych (rys. 2).



Rys. 2. Warstwa z polem temperatury, koncentracji i przemieszczenia

Przyjmujemy następujące warunki brzegowe pierwszego rodzaju

$$\Theta \left(\pm \frac{h}{2}, t \right) = \Theta_b H(t), \quad C \left(\pm \frac{h}{2}, t \right) = C_b H(t), \tag{3.1}$$

natomiast za warunki początkowe przyjmujemy wartość entropii i koncentracji na całej grubości warstwy równe zero

$$C(x_3, 0) = \tilde{C}_0 = 0, \quad \varrho S(x_3, 0) = \varrho S_0 = 0. \tag{3.2}$$

Wtedy funkcjonal (2.22) dla sprzężonych pól temperatury, koncentracji i przemieszczenia przyjmie postać

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[\Theta, C, U_3] = & \int_{-h/2}^{h/2} \left[\frac{1}{2} E_{3333} * dU_{3,3} * dU_{3,3} - \varphi_{33} * dU_{3,3} * d\Theta + \right. \\ & - \frac{1}{2} n * dC * dC - \frac{1}{2} m * d\Theta * d\Theta - \frac{K'}{2} \Phi_{33} * \Phi_{33} * dU_{3,3} * dU_{3,3} + \\ & - K' \Phi_{33} * l * dU_{3,3} * d\Theta_{,3} + K' \Phi_{33} * n * dU_{3,3} * dC_{,3} + \\ & - \frac{K'}{2} l * l * d\Theta_{,3} * d\Theta_{,3} + K' l * n * d\Theta_{,3} * dC_{,3} + \\ & \left. - \frac{K'}{2} n * n * dC_{,3} * dC_{,3} - \frac{KH(t)}{2T_0} * \Theta_{,3} * d\Theta_{,3} \right] dx_3. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Powyższe zadanie początkowo-brzegowe rozwiążemy zmodyfikowaną metodą bezpośrednią Ritza [30]. Przyjmujemy do rozwiązania następujące funkcje bazy

— dla koncentracji:

$$f_k(x_3) = \cos \frac{\pi(2k-1)}{h} x_3; \quad f_{k,3}(x_3) = -\frac{\pi(2k-1)}{h} \cdot \sin \frac{\pi(2k-1)}{h} x_3, \quad (3.4)$$

— dla temperatury:

$$g_k(x_3) = \cos \frac{\pi(2k-1)}{h} x_3; \quad g_{k,3}(x_3) = -\frac{\pi(2k-1)}{h} \cdot \sin \frac{\pi(2k-1)}{h} x_3, \quad (3.5)$$

— dla przemieszczenia:

$$\begin{aligned} u_k(x_3) = \sin \frac{\pi(2k-1)}{h} x_3; \quad u_{k,3}(x_3) = \frac{\pi(2k-1)}{h} \cdot \cos \frac{\pi(2k-1)}{h} x_3, \\ u_{k,33}(x_3) = -\frac{\pi^2(2k-1)^2}{h^2} \sin \frac{\pi(2k-1)}{h} x_3. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Wartości funkcjonau (3.3) będziemy poszukiwali na kombinacjach liniowych mających postać:

$$\Theta^n(x_3, t) = g_0(t) + \sum_{k=1}^n a_k(t) g_k(x_3), \quad (3.7)$$

$$C^n(x_3, t) = f_0(t) + \sum_{k=1}^n b_k(t) f_k(x_3), \quad (3.8)$$

$$U_3^n(x_3, t) = u_0(t) + \sum_{k=1}^n c_k(t) u_k(x_3), \quad (3.9)$$

gdzie:

$$g_0(t) = \Theta_b H(t), \quad (3.10)$$

$$f_0(t) = C_b H(t), \quad (3.11)$$

$$u_0(t) = \frac{1+\nu}{1-\nu} [(\alpha_c C_b + \alpha_T \Theta_b) H(t) x_3] = U_b H(t) x_3. \quad (3.12)$$

Funkcje g_0, f_0 i u_0 spełniają niejednorodne, natomiast funkcje g_k, f_k i u_k — jednorodne warunki brzegowe; $a_k(t), b_k(t)$ i $c_k(t)$ są tutaj poszukiwanymi funkcjami czasu.

Dzięki zastosowaniu zmodyfikowanej metody bezpośredniej Ritza zadanie szukania ekstremum funkcjonau $\mathcal{F}[\Theta^n, C^n, U_3^n]$ sprowadziło się do zadania poszukiwania ekstremum funkcji, której argumentami są poszukiwane funkcje czasu $a_k(t), b_k(t)$ i $c_k(t)$. Warunek istnienia ekstremum tej funkcji prowadzi do następujących równań Eulera-Lagrange'a

$$-\frac{\pi^2(2k-1)^2}{2h} K'l * l * da_k - \frac{\pi^2(2k-1)^2}{2hT_0} KH(t) * a_k - \frac{h}{2} m * da_k + \quad (3.13)$$

$$-\frac{\pi^2(2k-1)^2}{2h} K'l * n * db_k + \frac{\pi(2k-1)}{2} \varphi_{33} * dc_k + \frac{\pi^3(2k-1)^3}{2h^2} K'\varphi_{33} * l * dc_k =$$

$$= \frac{(-1)^{k+1}2h}{\pi(2k-1)} \cdot (\varphi_{33} * dU_b + m * d\Theta_b) H(t),$$

$$\frac{\pi^2(2k-1)^2}{2h} K'l * n * da_k - \frac{\pi^2(2k-1)^2}{2h} K'n * n * db_k - \frac{h}{2} n * db_k -$$

$$-\frac{\pi^3(2k-1)^3}{2h^2} K'\Phi_{33} * n * dc_k = \frac{(-1)^{k+1}}{\pi(2k-1)} \cdot 2hn * dC_b H(t), \quad (3.14)$$

$$\frac{\pi^3(2k-1)^3}{2h^2} K'\Phi_{33} * l * da_k - \frac{\pi(2k-1)}{2} \varphi_{33} * da_k - \frac{\pi^3(2k-1)^3}{2h^2} K'\Phi_{33} * n * db_k +$$

$$+ \frac{\pi^2(2k-1)^2}{2h} E_{3333} * dc_k - \frac{\pi^4(2k-1)^4}{2h^3} K'\Phi_{33} * \Phi_{33} * dc_k = 2(-1)^{k+1} \cdot$$

$$\cdot (\varphi_{33} * d\Theta_b - E_{3333} * dU_b) H(t). \quad (3.15)$$

Występujące w zadaniu funkcje materiałowe l, m, n przyjmujemy za stałe w czasie:

$$l(t) = lH(t), \quad m(t) = mH(t), \quad n(t) = nH(t), \quad (3.16)$$

oraz zgodnie z [6, 13, 17, 18, 24]:

$$E_{3333} = \frac{15}{14} G(t), \quad \varphi_{33} = \frac{7}{5} \alpha_T E_{3333} = \frac{3}{2} \alpha_T G(t),$$

$$\Phi_{33} = -\frac{7}{5} \alpha_c E_{3333} = -\frac{3}{2} \alpha_c G(t),$$

$$D_T = \frac{K}{mT_0}, \quad D_c = K'n. \quad (3.17)$$

Natomiast z analizy funkcjonau danego zależnością (3.3) bądź układu równań (3.13) ÷ (3.15) wynika kilka funkcji sprzęgających pola termiczne, dyfuzyjne i mechaniczne, które po uwzględnieniu (3.16) i (3.17) można przedstawić w postaci współczynników: 1° współczynnik sprzęgający pole mechaniczne z cieplnym związanym z przepływem ciepła

$$\alpha_{ci} = \frac{3}{2} \alpha_T, \quad (3.18)$$

2° współczynnik sprzęgający pole mechaniczne z ciepłym związanym z przepływem masy

$$\kappa_{c2} = \frac{3}{2} K' l \alpha_c, \quad (3.19)$$

3° współczynnik sprzęgający pole mechaniczne z dyfuzyjnym

$$\kappa_T = \frac{3}{2} D_c \alpha_c, \quad (3.20)$$

4° współczynnik sprzęgający pole ciepłe z dyfuzyjnym

$$\kappa_u = D_c l. \quad (3.21)$$

Wyznaczanie pola temperatury, koncentracji i przemieszczenia w warstwie sprężystej.

Dla ciała sprężystego funkcja relaksacji jest stała w czasie:

$$G(t) = EH(t), \quad (3.22)$$

a jej transformata Laplace'a ma postać:

$$\bar{G}(p) = E \frac{1}{p}, \quad (3.23)$$

gdzie p jest parametrem transformacji. Dokonując na układzie równań (3.13)÷(3.15) transformacji Laplace'a i uwzględniając zależności (3.16)÷(3.23) obliczamy wartości poszukiwanych funkcji w przestrzeni obrazu. Dokonując następnie retransformacji Laplace'a po wstawieniu do (3.7)÷(3.12) otrzymujemy poszukiwane wielkości polowe Θ^n , C^n , U_3^n

$$\Theta^n(x_3, t) = \Theta_b \left[H(t) + \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^n a_k(t) \cos \frac{\pi(2k-1)}{h} x_3 \right], \quad (3.24)$$

$$C^n(x_3, t) = C_b \left[H(t) + \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^n b_k(t) \cos \frac{\pi(2k-1)}{h} x_3 \right], \quad (3.25)$$

$$U_3^n(x_3, t) = U_b \left[H(t) x_3 + \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^n c_k(t) \sin \frac{\pi(2k-1)}{h} x_3 \right], \quad (3.26)$$

gdzie:

$$a_k(t) = A \left[\frac{p_{1k}^2 + p_{1k} A_1 + A_2}{(p_{1k} - p_{2k})(p_{1k} - p_{3k})} e^{p_{1k} t} + \frac{p_{2k}^2 + p_{2k} A_1 + A_2}{(p_{2k} - p_{1k})(p_{2k} - p_{3k})} \cdot e^{p_{2k} t} + \frac{p_{3k}^2 + p_{3k} A_1 + A_2}{(p_{3k} - p_{1k})(p_{3k} - p_{2k})} e^{p_{3k} t} \right], \quad (3.27)$$

$$b_k(t) = B \left[\frac{p_{1k}^2 + p_{1k} B_1 + B_2}{(p_{1k} - p_{2k})(p_{1k} - p_{3k})} e^{p_{1k} t} + \frac{p_{2k}^2 + p_{2k} B_1 + B_2}{(p_{2k} - p_{1k})(p_{2k} - p_{3k})} \cdot e^{p_{2k} t} + \frac{p_{3k}^2 + p_{3k} B_1 + B_2}{(p_{3k} - p_{1k})(p_{3k} - p_{2k})} e^{p_{3k} t} \right], \quad (3.28)$$

$$c_k(t) = \tilde{C} \left[\frac{p_{1k}^2 + p_{1k} C_1 + C_2}{(p_{1k} - p_{2k})(p_{1k} - p_{3k})} e^{p_{1k} t} + \frac{p_{2k}^2 + p_{2k} C_1 + C_2}{(p_{2k} - p_{1k})(p_{2k} - p_{3k})} \cdot e^{p_{2k} t} + \frac{p_{3k}^2 + p_{3k} C_1 + C_2}{(p_{3k} - p_{1k})(p_{3k} - p_{2k})} e^{p_{3k} t} \right]. \quad (3.29)$$

Występujące w zależnościach (3.27) ÷ (3.29) wielkości $A, A_1, A_2, A_3, B, B_1, B_2, B_3, \bar{C}, C_1, C_2, C_3$ są funkcjami stałych materiałowych oraz współczynników sprzęgających (3.18 ÷ (3.21). Natomiast wielkości p_{ik} ($i = 1, 2, 3$) są pierwiastkami równania trzeciego stopnia, które rozwiązano metodą Cardana.

Pole odkształceń otrzymamy z zależności na tensor odkształcenia Cauchy'ego (2.9), a pole naprężeń z równania tworzącego na tensor naprężenia (2.1). Po rachunkach i przekształceniach otrzymujemy

$$\varepsilon_{33}^n(x_3, t) = U_b \left[H(t) + \frac{4}{h} \sum_{k=1}^n (2k-1) c_k(t) \cos \frac{\pi(2k-1)}{h} x_3 \right], \quad (3.30)$$

$$\sigma_{11}^n(x_3, t) = \sigma_{22}^n(x_3, t) = \frac{E}{1-2\nu} \left\{ \frac{\nu}{1+\nu} \varepsilon_{33}^n(x_3, t) - [\alpha_c C^n(x_3, t) + \alpha_T \Theta^n(x_3, t)] \right\}, \quad (3.31)$$

$$\sigma_{33}^n(x_3, t) = 0, \quad (3.32)$$

gdzie występujące w (3.30) i (3.31) wielkości dane są odpowiednio zależnościami (3.29) oraz (3.24) i (3.25), natomiast ν jest współczynnikiem Poissona.

4. Realizacja numeryczna i zestawienie wyników

W oparciu o przedstawione rozwiązanie analityczne opracowano program na EMC •ODRA 1204 w języku Algol 60. Do przeprowadzenia obliczeń wykorzystano następujące wartości odpowiednich współczynników (po sprowadzeniu do jednostek SI):

— współczynniki dyfuzji D_c [12, 25, 26] i przewodności cieplnej D_T [7, 16]

$$D_c = 6 \cdot 10^{-6} [\text{m}^2/\text{h}], \quad D_T = 4 \cdot 10^{-3} [\text{m}^2/\text{h}], \quad (4.1)$$

— współczynniki materiałowe m [7, 16] n, l [27, 28]

$$m = 7862,5 [\text{J}/\text{m}^3 \text{K}^2], \quad n = 134,2 [\text{J}/\text{m}^3 \text{kg}^2], \quad (4.2)$$

$$l = 1305,4 [\text{J}/\text{kgK}],$$

— współczynniki rozszerzalności cieplnej α_T [7, 16] i dyfuzyjnej α_c [12, 15]

$$\alpha_T = 4,7 \cdot 10^{-6} [1/\text{K}], \quad \alpha_c = 1,25 \cdot 10^{-5} [\text{m}^3/\text{kg}], \quad (4.3)$$

— moduł sprężystości podłużnej E [16] i współczynnik Poissona ν [15]

$$E = 2 \cdot 10^{10} [\text{Pa}], \quad \nu = \frac{1}{6} [-], \quad (4.4)$$

— warunki brzegowe [7, 15]

$$\Theta_b = 40,0 [\text{K}], \quad C_b = 10,8 [\text{kg}/\text{m}^3]. \quad (4.5)$$

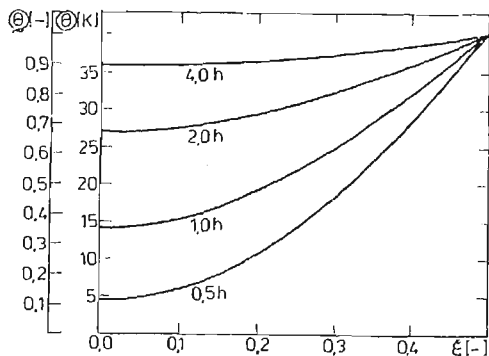
Wyniki numeryczne przedstawiono w postaci graficznej na rysunkach 3÷15. Mając na uwadze ograniczoną objętość pracy zilustrowano tu tylko najistotniejsze z nich. Ze względu na symetrię zadania (rys. 2) na wykresach przedstawiono jedynie wyniki przebiegu procesów dla połowy rozpatrywanej warstwy. Aby umożliwić lepszą analizę ilościową prezentowanych wyników wprowadzono następujące zmienne bezwymiarowe

$$\xi = \frac{x_3}{h}, \quad \varrho = \frac{\theta}{\theta_b}, \quad \zeta = \frac{C}{C_b}, \quad \varrho = \frac{\sigma}{\sigma_b}, \quad (4.6)$$

przy czym dla temperatury i koncentracji poziomem odniesienia są zadane wartości temperatury i koncentracji na brzegach, natomiast dla naprężeń poziom ustalonych naprężeń osiągniętych w rozpatrywanym procesie.

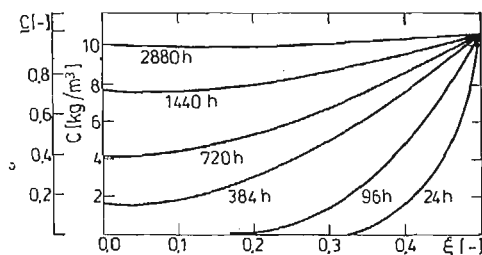
W trakcie analizy prezentowanych wykresów korzystać należy z wprowadzonych współczynników sprzęgających (3.18)÷(3.21). Każdy z nich w zależności od rozpatrywanego zadania przybierać może bowiem wartość równą lub różną od zera. W ten sposób zadanie ogólne w sposób naturalny dzieli się na szesnaście elementarnych przypadków. I tak np. zadaniu zupełnie rozprężonemu odpowiada przypadek $\kappa_u = \kappa_T = \kappa_{c2} = \kappa_{c1} = 0$, natomiast zadaniu w którym występuje pełne sprzężenie rozpatrywanych pól — przypadek $\kappa_u \neq \kappa_T \neq \kappa_{c2} \neq \kappa_{c1} \neq 0$.

Brak pełnego kompletu danych dla innych technologii sprawił, że przyjęto beton jako rozpatrywany ośrodek. Należy jednak pamiętać, że w toku rozwiązania postawionego problemu początkowo-brzegowego poczyniliśmy szereg założeń upraszczających, z których najistotniejsze to pominięcie źródeł ciepła i masy, oraz przyjęcie stałych (uśrednionych) funkcji materiałowych określających własności fizyczne betonu. Okazuje się, że w sytuacjach, gdy zmiany temperatury i koncentracji wywołane reakcjami hydratacji są małe w porównaniu ze zmianami tych wielkości spowodowanymi przepływami ciepła i masy, to zaniedbanie źródeł ciepła i masy jest uzasadnione. Przyjęcie takiego uproszczenia jest na podstawie analizy prac [25, 26, 28] obszernie uzasadnione w pracy [6]. W tejże pracy [6] autor w oparciu o badania Malininy [28] i wyniki prezentowane przez Aleksandrowskiego [25] uzasadnia przyjęcie stałych (uśrednionych) wartości współczynników



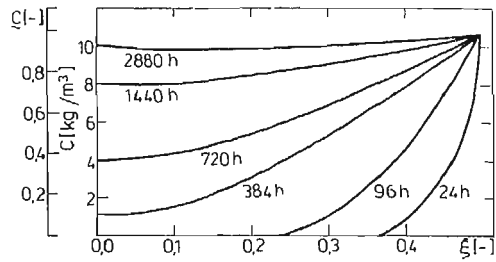
Rys. 3. Rozkład temperatury w warstwie dla przypadku:

$$\kappa_u = \kappa_T = \kappa_{c2} = \kappa_{c1} = 0$$

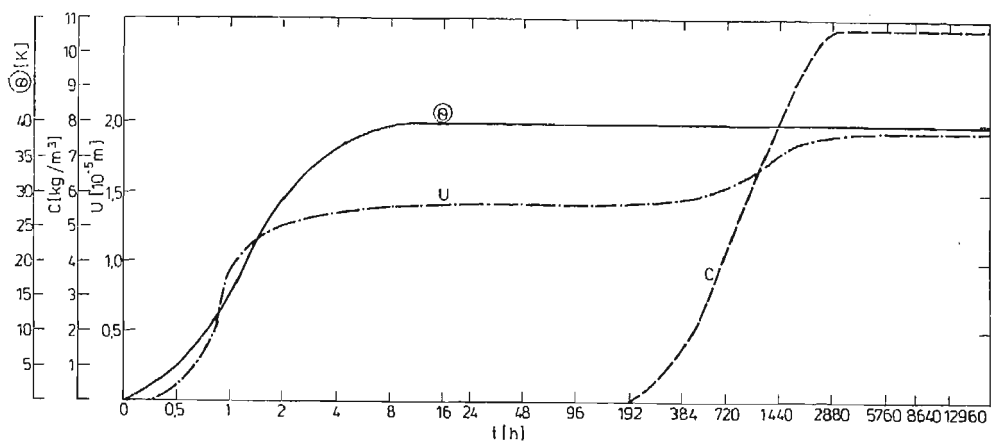


Rys. 4. Rozkład koncentracji w warstwie dla przypadku:

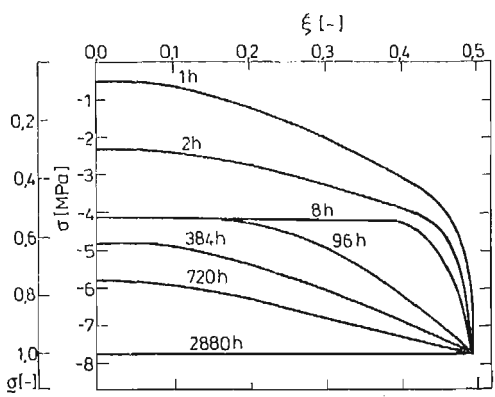
$$\kappa_u = \kappa_T = \kappa_{c2} = \kappa_{c1} = 0$$



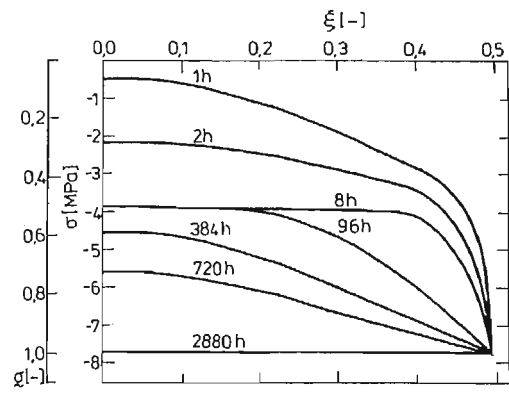
Rys. 5. Rozkład koncentracji w warstwie sprężystej dla przypadku:
 $\kappa_u \neq 0; \quad \kappa_T \neq 0; \quad \kappa_{c2} \neq 0, \kappa_{c1} \neq 0$



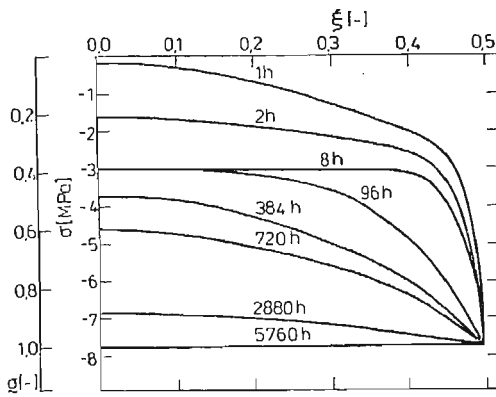
Rys. 6. Rozkład wielkości połowych w warstwie sprężystej przy wartości $\xi = 0,1$ dla przypadku:
 $\kappa_u \neq 0; \quad \kappa_T \neq 0; \quad \kappa_{c2} \neq 0; \quad \kappa_{c1} \neq 0$



Rys. 7. Rozkład naprężeń w warstwie sprężystej dla przypadku:
 $\kappa_u = \kappa_T = \kappa_{c2} = \kappa_{c1} = 0$

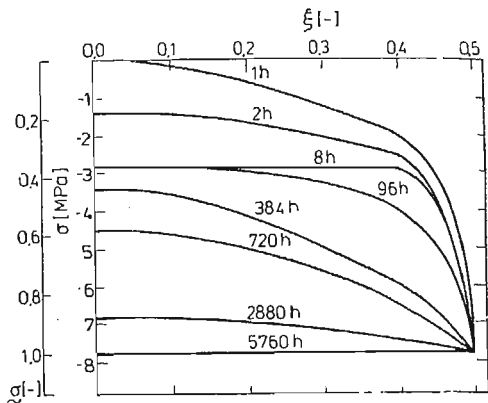


Rys. 8. Rozkład naprężeń w warstwie sprężystej dla przypadku:
 $\kappa_u \neq 0; \quad \kappa_T = \kappa_{c2} = \kappa_{c1} = 0$



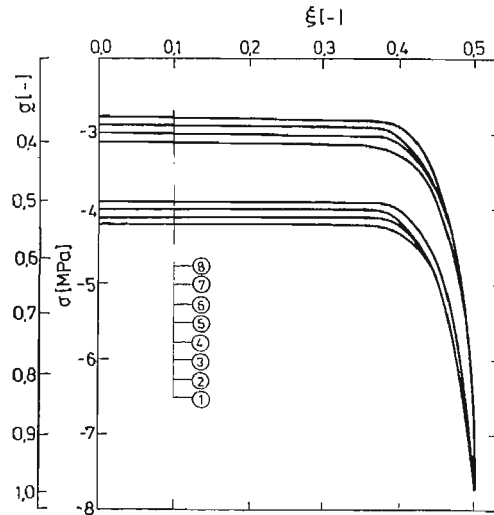
Rys. 9. Rozkład naprężeń w warstwie sprężystej dla przypadku:

$$\kappa_{c1} \neq 0; \quad \kappa_u = \kappa_T = \kappa_{c2} = 0$$



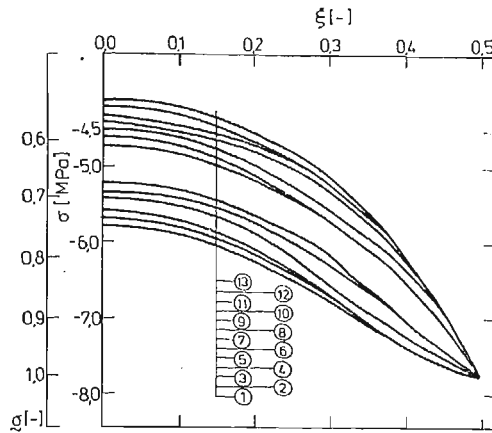
Rys. 10. Rozkład naprężeń w warstwie sprężystej dla przypadku:

$$\kappa_u \neq \kappa_{c1} \neq 0; \quad \kappa_T = \kappa_{c2} = 0$$



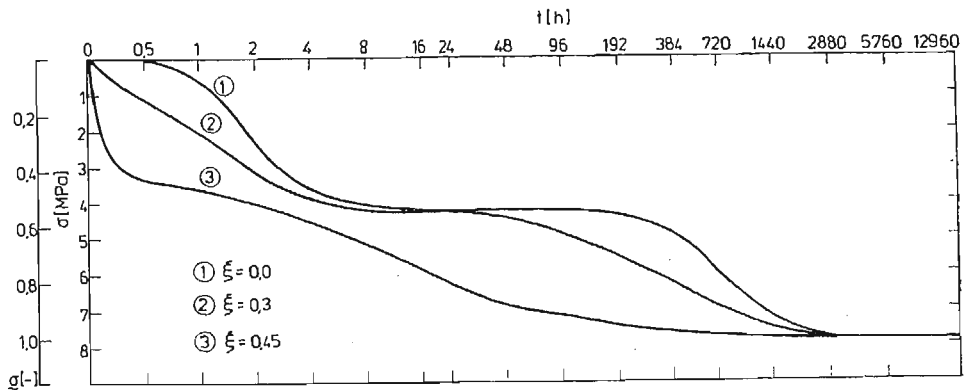
Rys. 11. Rozkład naprężeń w warstwie dla czasu $t = 8h$

1	$\begin{cases} \kappa_u = 0 \\ \kappa_T = 0 \\ \kappa_{c2} \neq 0 \\ \kappa_{c1} = 0 \end{cases}$	\wedge	$\begin{cases} \kappa_u = 0 \\ \kappa_T \neq 0 \\ \kappa_{c2} \neq 0 \\ \kappa_{c1} = 0 \end{cases}$	2	$\begin{cases} \kappa_u = 0 \\ \kappa_T = 0 \\ \kappa_{c2} = 0 \\ \kappa_{c1} = 0 \end{cases}$	\wedge	$\begin{cases} \kappa_u = 0 \\ \kappa_T \neq 0 \\ \kappa_{c2} = 0 \\ \kappa_{c1} = 0 \end{cases}$
3	$\begin{cases} \kappa_u \neq 0 \\ \kappa_T = 0 \\ \kappa_{c2} \neq 0 \\ \kappa_{c1} = 0 \end{cases}$	\wedge	$\begin{cases} \kappa_u \neq 0 \\ \kappa_T \neq 0 \\ \kappa_{c2} \neq 0 \\ \kappa_{c1} = 0 \end{cases}$	4	$\begin{cases} \kappa_u \neq 0 \\ \kappa_T = 0 \\ \kappa_{c2} = 0 \\ \kappa_{c1} = 0 \end{cases}$	\wedge	$\begin{cases} \kappa_u \neq 0 \\ \kappa_T \neq 0 \\ \kappa_{c2} = 0 \\ \kappa_{c1} = 0 \end{cases}$
5	$\begin{cases} \kappa_u = 0 \\ \kappa_T = 0 \\ \kappa_{c2} \neq 0 \\ \kappa_{c1} \neq 0 \end{cases}$	\wedge	$\begin{cases} \kappa_u = 0 \\ \kappa_T \neq 0 \\ \kappa_{c2} \neq 0 \\ \kappa_{c1} \neq 0 \end{cases}$	6	$\begin{cases} \kappa_u = 0 \\ \kappa_T = 0 \\ \kappa_{c2} = 0 \\ \kappa_{c1} \neq 0 \end{cases}$	\wedge	$\begin{cases} \kappa_u = 0 \\ \kappa_T \neq 0 \\ \kappa_{c2} = 0 \\ \kappa_{c1} \neq 0 \end{cases}$
7	$\begin{cases} \kappa_u \neq 0 \\ \kappa_T = 0 \\ \kappa_{c2} \neq 0 \\ \kappa_{c1} \neq 0 \end{cases}$	\wedge	$\begin{cases} \kappa_u \neq 0 \\ \kappa_T \neq 0 \\ \kappa_{c2} \neq 0 \\ \kappa_{c1} \neq 0 \end{cases}$	8	$\begin{cases} \kappa_u \neq 0 \\ \kappa_T = 0 \\ \kappa_{c2} = 0 \\ \kappa_{c1} \neq 0 \end{cases}$	\wedge	$\begin{cases} \kappa_u \neq 0 \\ \kappa_T \neq 0 \\ \kappa_{c2} = 0 \\ \kappa_{c1} \neq 0 \end{cases}$



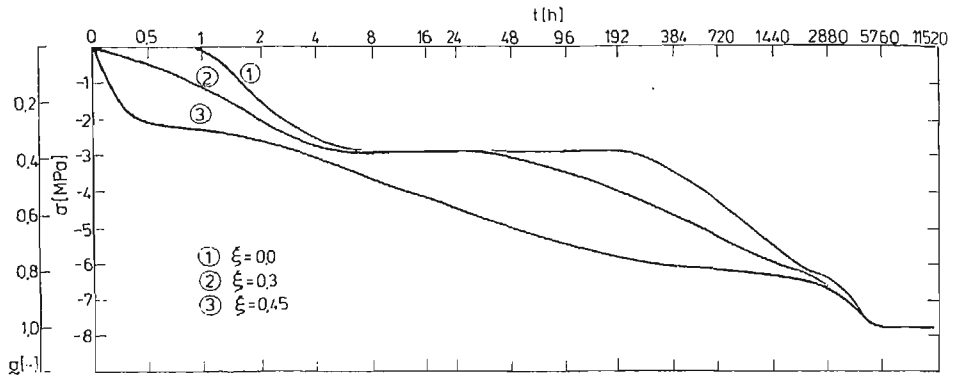
Rys. 12. Rozkład naprężeń w warstwie sprężystej dla czasu $t = 720h$

$$\begin{array}{l}
 1 \left\{ \begin{array}{l} \kappa_U = 0 \\ \kappa_T = 0 \\ \kappa_{c2} = 0 \\ \kappa_{c1} = 0 \end{array} \right. \wedge \begin{array}{l} \kappa_U = 0 \\ \kappa_T = 0 \\ \kappa_{c2} \neq 0 \\ \kappa_{c1} = 0 \end{array} \quad 2 \left\{ \begin{array}{l} \kappa_U \neq 0 \\ \kappa_T = 0 \\ \kappa_{c2} \neq 0 \\ \kappa_{c1} = 0 \end{array} \right. \quad 3 \left\{ \begin{array}{l} \kappa_U \neq 0 \\ \kappa_T = 0 \\ \kappa_{c2} = 0 \\ \kappa_{c1} = 0 \end{array} \right. \\
 \\
 5 \left\{ \begin{array}{l} \kappa_U = 0 \\ \kappa_T \neq 0 \\ \kappa_{c2} = 0 \\ \kappa_{c1} = 0 \end{array} \right. \wedge \begin{array}{l} \kappa_U \neq 0 \\ \kappa_T \neq 0 \\ \kappa_{c2} \neq 0 \\ \kappa_{c1} = 0 \end{array} \quad 4 \left\{ \begin{array}{l} \kappa_U = 0 \\ \kappa_T \neq 0 \\ \kappa_{c2} \neq 0 \\ \kappa_{c1} = 0 \end{array} \right. \quad 6 \left\{ \begin{array}{l} \kappa_U \neq 0 \\ \kappa_T \neq 0 \\ \kappa_{c2} = 0 \\ \kappa_{c1} = 0 \end{array} \right. \\
 \\
 7 \left\{ \begin{array}{l} \kappa_U = 0 \\ \kappa_T = 0 \\ \kappa_{c2} \neq 0 \\ \kappa_{c1} \neq 0 \end{array} \right. \quad 8 \left\{ \begin{array}{l} \kappa_U = 0 \\ \kappa_T = 0 \\ \kappa_{c2} = 0 \\ \kappa_{c1} \neq 0 \end{array} \right. \quad 9 \left\{ \begin{array}{l} \kappa_U \neq 0 \\ \kappa_T = 0 \\ \kappa_{c1} = 0 \\ \kappa_{c2} \neq 0 \end{array} \right. \wedge \begin{array}{l} \kappa_U \neq 0 \\ \kappa_T = 0 \\ \kappa_{c2} \neq 0 \\ \kappa_{c1} \neq 0 \end{array} \\
 \\
 10 \left\{ \begin{array}{l} \kappa_U = 0 \\ \kappa_T \neq 0 \\ \kappa_{c2} \neq 0 \\ \kappa_{c1} \neq 0 \end{array} \right. \quad 11 \left\{ \begin{array}{l} \kappa_U = 0 \\ \kappa_T \neq 0 \\ \kappa_{c2} = 0 \\ \kappa_{c1} \neq 0 \end{array} \right. \quad 12 \left\{ \begin{array}{l} \kappa_U \neq 0 \\ \kappa_T \neq 0 \\ \kappa_{c2} \neq 0 \\ \kappa_{c1} \neq 0 \end{array} \right. \quad 13 \left\{ \begin{array}{l} \kappa_U \neq 0 \\ \kappa_T \neq 0 \\ \kappa_{c2} = 0 \\ \kappa_{c1} \neq 0 \end{array} \right.
 \end{array}$$

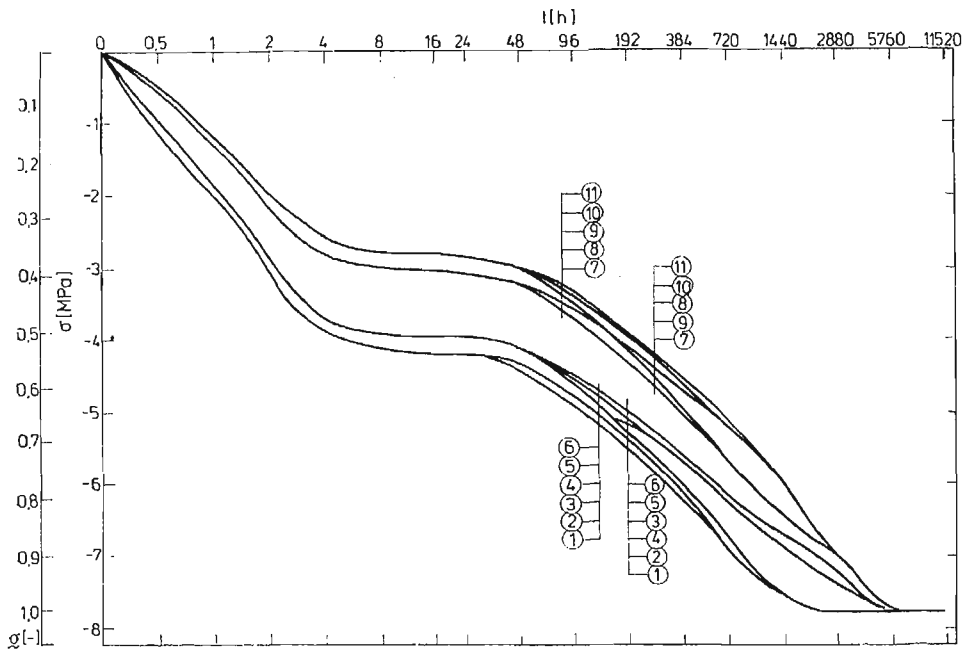


Rys. 13. Warstwa sprężysta
Rozkład naprężeń w czasie dla przypadku:

$$\kappa_U = \kappa_T = \kappa_{c2} = \kappa_{c1} = 0$$



Rys. 14. Warstwa sprężysta. Rozkład naprężeń w czasie dla przypadku:
 $\kappa_u \neq \kappa_T \neq \kappa_{c1} \neq \kappa_{c2} \neq 0$



Rys. 15. Warstwa sprężysta. Rozkład naprężeń w czasie dla $\xi = 0,3$

1	$\begin{cases} \kappa_u = 0 \\ \kappa_T = 0 \\ \kappa_{c2} \neq 0 \\ \kappa_{c1} = 0 \end{cases}$	2	$\begin{cases} \kappa_u = 0 \\ \kappa_T = 0 \\ \kappa_{c2} = 0 \\ \kappa_{c1} = 0 \end{cases}$	3	$\begin{cases} \kappa_u = 0 \\ \kappa_T \neq 0 \\ \kappa_{c2} = 0 \\ \kappa_{c1} = 0 \end{cases}$	^	$\begin{cases} \kappa_u = 0 \\ \kappa_T \neq 0 \\ \kappa_{c2} \neq 0 \\ \kappa_{c1} = 0 \end{cases}$
4	$\begin{cases} \kappa_u \neq 0 \\ \kappa_T = 0 \\ \kappa_{c2} = 0 \\ \kappa_{c1} = 0 \end{cases}$	6	$\begin{cases} \kappa_u \neq 0 \\ \kappa_T \neq 0 \\ \kappa_{c2} = 0 \\ \kappa_{c1} = 0 \end{cases}$	8	$\begin{cases} \kappa_u = 0 \\ \kappa_T \neq 0 \\ \kappa_{c2} = 0 \\ \kappa_{c1} \neq 0 \end{cases}$	^	$\begin{cases} \kappa_u = 0 \\ \kappa_T \neq 0 \\ \kappa_{c2} \neq 0 \\ \kappa_{c1} \neq 0 \end{cases}$
5	$\begin{cases} \kappa_u \neq 0 \\ \kappa_T = 0 \\ \kappa_{c2} \neq 0 \\ \kappa_{c1} = 0 \end{cases}$	^	$\begin{cases} \kappa_u \neq 0 \\ \kappa_T \neq 0 \\ \kappa_{c2} \neq 0 \\ \kappa_{c1} = 0 \end{cases}$	9	$\begin{cases} \kappa_u \neq 0 \\ \kappa_T = 0 \\ \kappa_{c2} = 0 \\ \kappa_{c1} \neq 0 \end{cases}$	v	$\begin{cases} \kappa_u \neq 0 \\ \kappa_T = 0 \\ \kappa_{c2} \neq 0 \\ \kappa_{c1} \neq 0 \end{cases}$
7	$\begin{cases} \kappa_u = 0 \\ \kappa_T = 0 \\ \kappa_{c2} = 0 \\ \kappa_{c1} \neq 0 \end{cases}$	^	$\begin{cases} \kappa_u = 0 \\ \kappa_T = 0 \\ \kappa_{c2} \neq 0 \\ \kappa_{c1} \neq 0 \end{cases}$	10	$\begin{cases} \kappa_u \neq 0 \\ \kappa_T \neq 0 \\ \kappa_{c2} = 0 \\ \kappa_{c1} \neq 0 \end{cases}$	11	$\begin{cases} \kappa_u \neq 0 \\ \kappa_T \neq 0 \\ \kappa_{c2} = 0 \\ \kappa_{c1} \neq 0 \end{cases}$

dyfuzji i termodyfuzji. Kolejnym mankamentem prezentowanego rozwiązania jest fakt, że beton — w początkowym etapie dojrzewania — wykazuje własności lepkosprężyste. Analizowane w pracy zadanie początkowo-brzegowe należy więc traktować jako pierwsze przybliżenie tego złożonego problemu.

Ze względu na ograniczoną objętość pracy nie będziemy tu przeprowadzali szczegółowej analizy otrzymanych wyników numerycznych. Warto jednak zaznaczyć, że pozostające w dobrej zgodności z wynikami innych badaczy problemu. I tak jeżeli chodzi o wpływ sprzężeń na rozwój pola cieplnego, oraz sprzężenia cieplno-dyfuzyjne — z pracami [6, 25, 26, 28], natomiast w zakresie zagadnień sprzężenia pola mechanicznego z polem koncentracji z pracą [24].

Otrzymane wyniki numeryczne w sensie opisanych wcześniej założeń upraszczających nabierają znaczenia jako wyniki ilościowe obrazujące wpływ sprzężeń rozpatrywanych pól na siebie. Mogą się one okazać pomocne w rozstrzygnięciu dylematu, czy dane zadanie początkowo — brzegowe rozwiązywać jako niesprężone, czy też analizować bardziej złożone zadanie sprzężone.

Literatura

1. BAO-LIAN FU, *Ob obobščennych variacionnyh principach termouprugosti*, Scienta — Sinica 13, 9, 1964.
2. M. BEN AMOZ, *On a variational theorem in coupled thermoelasticity*, J. Appl. Mech. 32, 4, 1965.
3. M. A. BIOT, *Thermoelasticity and irreversible thermodynamics*, J. Appl. Phys. 3, 27, 1956.
4. M. A. BIOT, *New thermoelastical reciprocity relations with application to thermal stresses*, J. Aero/Space Sciences 7, 26, 1969.
5. R. M. CHRISTENSEN, *Variational and minimum theorems for the linear theory of viscoelasticity*, Z. Angew. Math. Phys. 19, 233, 1968.
6. F. GAJDA, *Sprężenie cieplno-dyfuzyjne w ciałach lepkosprężystych*, dysertacja doktorska, Politechnika Wrocławska 1983.
7. F. GRUDZIŃSKI, *Procesy cieplne w technologii betonów*, Warszawa 1976.
8. K. GRYSA, R. SZCZEPAŃSKI, *O płaskim quasi-statycznym zagadnieniu termodyfuzji dla sprężystego walca kołowego*, Mech. Teoret. i Stos. 2, 17, 1979.
9. M. E. GURTIN, *Variational principles in the linear theory of viscoelasticity*, Arch. Rat. Mech. Anal., 13, 179, 1963.
10. M. E. GURTIN, *Variational principles for linear elastodynamics*, Arch. Rat. Mech. Anal., 17, 1, 1964.
11. G. HERRMAN, *On variational principles in thermoelasticity and heat conduction*, Q. Appl. Math. 2, 21, 1963.
12. J. KASPERKIEWICZ, *Dyfuzja wilgoci i deformacje skurczowe w betonie*, PWN, Warszawa 1972.
13. J. KUBIK, *Analogie i podobieństwo w liniowych ośrodkach odkształcalnych*, Z. N. Pol. Śl. Bud. 38, Gliwice 1975.
14. R. MOKRYK, Z. OLESIAK, *Termodyfuzja w zagadnieniu kontaktu warstwy i półprzestrzeni sprężystej*, Mech. Teoret. i Stos., 3/4, 20, 1982.
15. A. MITZEL, *Reologia betonu*, PWN, Warszawa 1972.
16. A. M. NEVILLE, *Właściwości betonu*, PWN, Warszawa 1977.
17. W. NOWACKI, *Certain problems of thermodiffusion in solids*, A. M. S. 23, 6, 1971.
18. W. NOWACKI, *Termodyfuzja w ciele stałym*, Mech. Teoret. i Stos. 2, 13, 1975.
19. R. E. NICKELL, J. L. SACKMAN, *Variational principles for linear coupled thermoelasticity*, Q. Appl. Math. 1, 26, 1968.
20. W. OLSZAK, P. PERZYNA, *Variational theorems in general viscoelasticity*, Ing. Arch. 28, 1959.
21. E. T. ONAT, *On a variational principle in linear viscoelasticity*, I. Mech. 1, 135, 1962.

22. J. N. REDDY, *Variational principles for linear coupled dynamic theory of thermoelasticity*, Int. J. Eng. Science 14, 605, 1976.
23. J. STEFANIAK, J. JANKOWSKI, *Płaskie fale harmoniczne i dyfuzja w ciele stalym*, Mech. Teoret. i Stos. 18, 3, 1980.
24. J. WYRWAŁ, *Wariacyjne ujęcie termodyfuzji lepkosprężystej*, dysertacja doktorska, Politechnika Krakowska 1979.
25. С. В. АЛЕКСАНДРОВСКИЙ, *Расчет бетонных и железобетонных конструкций на температурные и влажностные воздействия*, Стройиздат 1966.
26. Л. Я. ВОЛОСЯН, *Тепло-и массообмен при термообработке бетонных и железобетонных изделий*, Минск 1973.
27. А. В. ЛЬКОВ, *Теоретические основы строительной физики*, Минск 1961.
28. Л. А. МАЛИНИНА, *Тепловлажностная обработка тяжёлого бетона*, Москва 1977.
29. Я. С. ПОДСТРИГАЧ, П. Р. ШЕВЧУК, *Вариационная форма уравнений термодиффузионных процессов в деформируемом теле*, Прикл. Мех. и Мат. 33, 4, 1969.
30. П. В. ЦОЙ, *Методы расчета отдельных задач теплопереноса*, Москва 1971.
31. Р. Н. ШВЕЦ, Я. М. ДАСЮК, *О вариационных теоремах термодиффузии деформируемых твердых тел*, Мат. Физ. 22, 1977.

Резюме

ВАРИАЦИОННАЯ ФОРМА ТЕРМОДИФФУЗИОННЫХ ПЕРЕПЛИВОВ СВЯЗАННЫХ С ПОЛЕМ НАПРЯЖЕНИЯ

В работе построено функционал для задач сопряженной вязкоупругой термодиффузии. Основой построения функционала являются уравнение балансов, производящие уравнения, уравнения потоков массы и тепла, а также граничные условия задачи. Затем обсуждено термодиффузионные перепливы связанные с механическим полем в однородном изотропном упругом слое. Процесс вызывают данные величины температуры и концентрации на краях слоя, так же как происходит в классическом процессе запаривания бетона. Для решения проблемы использовано построенный функционал и применено модифицированный непосредственный метод Ритца.

Summary

THE VARIATIONAL FORMULATION OF HEAT AND MASS TRANSFER CONJUGATED WITH STRESS FIELD

The functional for problems of the coupled viscoelastic thermodifusion is formulated. The basis for the construction of the functional constitute: balance equations, constitutive equations, mass and heat flux equations and boundary conditions of the problem. Next the problem of the heat and mass transfer coupled with the stressfield in a homogenous and isotropic layer is treated. The process is generated by the values of the temperature and concentration on the boundary like in the classical technological processes. The solution is based on the formulated functional and on a modified direct Ritz method.

Praca wpłynęła do Redakcji dnia 18 września 1985 roku.