

## ZASTOSOWANIE FUNKCJI KSZTAŁTU DO OPISU DRGAŃ PRĘTÓW CIENKOŚCIENNYCH O ZAMKNIĘTYM PROFILU

MAREK SPERSKI

*Politechnika Gdańska*

### 1. Wstęp

Z chwilą wprowadzenia do eksploatacji dużych jednostek pływających pojawił się w budownictwie okrętowym problem drgań kadłuba statku, wzbudzanych falowaniem morza oraz wywoływanych przez pracujące na okręcie maszyny. Drgania te są przyczyną powstawania naprężeń dynamicznych, które — poprzez pęknięcie i rozwój szczelin — prowadzą do przedwczesnego zużycia konstrukcji. Zakłócają też pracę precyzyjnych urządzeń instalowanych na okręcie i odbijają się niekorzystnie na zdrowiu załogi, uniemożliwiając wypoczynek.

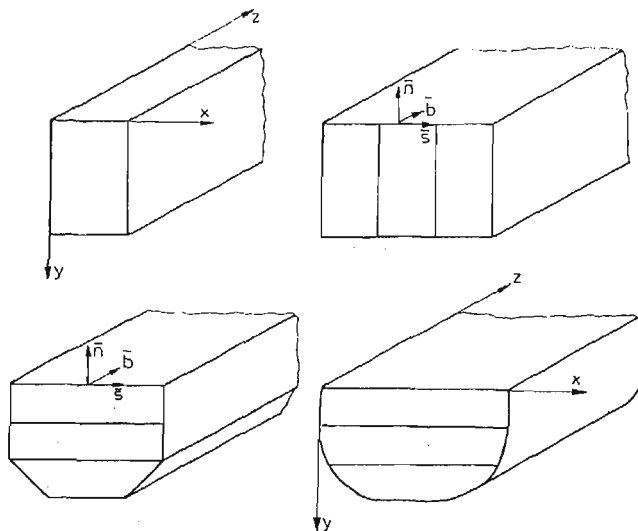
Spotykane w praktyce projektowej metody analizy tzw. drgań ogólnych kadłuba [1], [2] oparte są na modelach prętowych. Modele prętowe, zastosowane do konstrukcji o bardziej skomplikowanych kształtach, często okazują się zawodne. Stosowanie modeli powłokowych, lub dyskretnych o wielu stopniach swobody umożliwia dokładniejszy opis, wiąże się jednak z pracochłonnym, często prowadzącym do pomyłek procesem przygotowywania danych, długim czasem liczenia oraz koniecznością używania maszyn cyfrowych o dużej pamięci operacyjnej.

Mankamenty te skłoniły do poszukiwania innego, w miarę możliwości prostego modelu kadłuba [5], [6] dokładniejszego od modeli belkowych. Jednym z nich jest model ramowo-powłokowy, zaproponowany przez W. Z. Własowa [3] w 1931 r. Oparta na tym modelu teoria, umożliwiająca zamianę cząstkowych, różniczkowych równań równowagi cienkościennego pręta na równania różniczkowe zwyczajne jest dzisiaj stosowana dość powszechnie [4], [11] w obliczeniach statycznych konstrukcji lotniczych, okrętowych i budowlanych.

Praca niniejsza stanowi uogólnienie teorii Własowa na przypadek ruchu. Choć genezą opracowania były problemy budowy okrętów, przedstawiony w nim model może służyć do badania drgań innych konstrukcji inżynierskich, jak skrzydła samolotów, mosty skrzynkowe, lub niektóre typy pojazdów drogowych i szynowych.

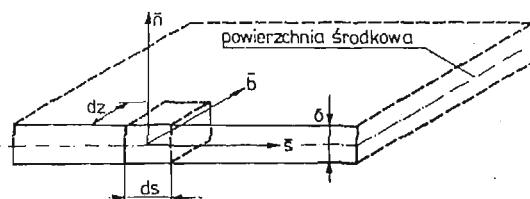
## 2. Założenia teorii

Przedmiotem rozważań jest pryzmatyczny, cienkościenny pręt o skończonej liczbie zamkniętych obwodów w przekroju poprzecznym. Przekrój poprzeczny (rys. 1) składa się z  $N$  węzłów, połączonych między sobą odcinkami prostymi, lub zakrzywionymi. Cała konstrukcja zbudowana jest z płaskich, ortotropowych płyt oraz cienkościennych powłok walcowych, których krawędzie, równoległe do osi pręta, nazywać będziemy liniami węzłowymi.



Rys. 1.

Wzorując się na hipotezie Własowa, składowe  $u$ ,  $v$ ,  $w$ , wektora przemieszczenia  $w$  dowolnie obranego punktu na powierzchni środkowej płyty, lub powłoki (rys. 2), na osie



Rys. 2.

lokalnego układu współrzędnych  $b$ ,  $s$ ,  $n$ :

$$w = u \cdot b + v \cdot s + w \cdot n \quad (2.1)$$

przedstawiamy w postaci wielomianów dwóch zmiennych rozdzielonych:

$$u = \sum_{i=1}^n v_i(z, t) \cdot \varphi_i(s) = \sum_{i=1}^n v_i \varphi_i \quad (2.2)$$

$$v = \sum_{k=1}^r \vartheta_k(z, t) \cdot \psi_k(s) = \sum_{k=1}^r \vartheta_k \psi_k \quad (2.2)$$

[cd.]

$$w = \sum_{l=1}^m \eta_l(z, t) \cdot \chi_l(s) = \sum_{l=1}^m \eta_l \chi_l$$

przy czym funkcje:  $\varphi_i, \psi_k, \chi_l$ , współrzędnej obwodowej  $s$  — nazywane funkcjami kształtu — przyjmiemy jako znane, natomiast funkcje:  $\nu_i, \vartheta_k, \eta_l$ , współrzędnej  $z$  na osi pręta oraz czasu  $t$  będą wielkościami poszukiwanymi.

Na element pręta o gęstości  $\rho$ , modułach sprężystości  $E_1$  (na kierunku podłużnym  $z$ ),  $E_2$  (na kierunku obwodowym  $s$ ), module odkształcenia postaciowego  $G$ , współczynnikach Poisson'a:  $\nu_{21}, \nu_{12}$  i wymiarach:  $\delta \cdot ds \cdot dz$ , działają:

1. Siła bezwładności

$$\mathbf{P}_B = -w \cdot \rho \cdot \delta \cdot ds \cdot dz = -\rho \cdot \delta (\ddot{u}b + \ddot{v}s + \ddot{w}n) ds \cdot dz \quad (2.3)$$

przy czym kropki nad symbolami oznaczają pochodne współrzędnych względem czasu,  $\delta$  zaś jest grubością płyty, lub powłoki.

2. Siła zewnętrzna, będąca jawną funkcją czasu  $t$  i współrzędnych  $z, s$ :

$$\mathbf{p}_z = p_n(z, s, t) \cdot \mathbf{n} + p_s(z, s, t) \cdot \mathbf{s} + p_b(z, s, t) \cdot \mathbf{b} \quad (2.4)$$

3. Wewnętrzne siły sprężyste:

a) na kierunku podłużnym siła normalna:

$$N_b = \int_{-\delta/2}^{\delta/2} \sigma_z dn = \check{E}_1 \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \nu_{21} \frac{\partial v}{\partial s} \right) \quad (2.5a)$$

b) na kierunku obwodowym:

— siła normalna:

$$N_s = \int_{-\delta/2}^{\delta/2} \sigma_s dn = \check{E}_2 \left( \frac{\partial v}{\partial s} + \nu_{12} \frac{\partial u}{\partial z} \right) \quad (2.5b)$$

— siła styczna:

$$S = \int_{-\delta/2}^{\delta/2} \tau_{zs} dn = \check{G} \left( \frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) \quad (2.5c)$$

— moment zginający

$$M = \int_{-\delta/2}^{\delta/2} \sigma_z n dn = -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} + \nu_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) \cong -D \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} \quad (2.5d)$$

gdzie:  $\sigma_z, \sigma_s, \tau_{zs}$  oznaczają naprężenia normalne i styczne, a:

$$\check{E}_1 = \frac{E_1 \delta}{1 - \nu_{21} \cdot \nu_{12}}, \quad \check{E}_2 = \frac{E_2 \delta}{1 - \nu_{21} \nu_{12}}$$

$$\check{G} = G \cdot \delta \quad D = \frac{E_2 \delta^3}{12(1 - \nu_{21} \nu_{12})}$$

— zredukowane stałe materiałowe.

W rozważaniach pominięto jako małe: moment zginający na kierunku podłużnym, moment skręcający oraz siłę styczną na kierunku normalnym. Jak widać, pręt jest zbudowany z materiału ortotropowego, liniowo-sprężystego, o osiach ortotropii  $b, s$ . W opisie nie uwzględniono sił tłumienia, zależnych od prędkości elementu. Wprowadzenie tych sił do różniczkowych równań ruchu nie stanowi problemu, jednak na wstępnym etapie badań nie wydaje się celowe.

### 3. Równania ruchu

Zakładając, że działające na konstrukcję siły bezwładności stanowią składnik obciążenia zewnętrznego, problem sformułowania równań ruchu sprowadzamy do wyznaczenia ekstremum funkcjonału:

$$J = \int_0^L \Omega dz = II + A \quad (3.1)$$

w którym  $II$  oznacza całkowitą energię sprężystą pręta, równą sumie prac sił wewnętrznych na przemieszczeniach  $w$ , natomiast  $A = A_B - A_z$  — sumę prac sił bezwładności i sił zewnętrznych na tych przemieszczeniach.

Energię sprężystą pręta o długości  $L$ :

$$II = -\frac{1}{2} \int_0^L \left[ \oint_s \left( N_b \varepsilon_z + N_s \varepsilon_s + S \gamma_{zs} + \frac{M^2}{D} \right) ds \right] dz \quad (3.2)$$

można, uwzględniając związki (2.5), (2.2) oraz:

$$\begin{aligned} \varepsilon_z &= \frac{\partial u}{\partial z}, & \gamma_{zs} &= \frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial v}{\partial z}, \\ \varepsilon_s &= \frac{\partial v}{\partial s}, & \nu_{21} \check{E}_1 &= \nu_{12} \check{E}_2 = \check{E} \end{aligned}$$

przedstawić w postaci macierzowej:

$$II = -\frac{1}{2} \int_0^L (\check{\nu}^T \mathbf{P} \check{\nu} + \check{\vartheta}^T \mathbf{R} \check{\vartheta} + \check{\nu}^T \mathbf{S} \check{\nu} + 2\check{\vartheta}^T \mathbf{\Theta} \check{\nu} + 2\check{\nu}^T \mathbf{Q} \check{\vartheta} + \check{\vartheta}^T \mathbf{T} \check{\vartheta} + \eta^T A \eta) dz \quad (3.3)$$

gdzie elementy kwadratowych, lub prostokątnych macierzy:  $\mathbf{P}$ ,  $\mathbf{R}$ ,  $\mathbf{S}$ ,  $\mathbf{\Theta}$ ,  $\mathbf{Q}$ ,  $\mathbf{T}$ ,  $A$ , są stałymi współczynnikami:

$$\begin{aligned} P_{ij} &= \oint_s \check{E}_1 \varphi_i \varphi_j ds; & R_{kg} &= \oint_s \check{G} \psi_k \psi_g ds; \\ S_{ij} &= \oint_s \check{G} \frac{d\varphi_i}{ds} \cdot \frac{d\varphi_j}{ds} ds; & \Theta_{ki} &= \oint_s \check{E} \frac{d\psi_k}{ds} \varphi_i ds; \end{aligned}$$

$$Q_{ik} = \oint_s \check{G} \frac{d\varphi_i}{ds} \psi_k ds; \quad T_{kg} = \oint_s \check{E}_2 \frac{d\psi_k}{ds} \cdot \frac{d\psi_g}{ds} ds \quad (3.4)$$

$$A_{hl} = \oint_s D \frac{d^2\chi_h}{ds^2} \cdot \frac{d^2\chi_l}{ds^2} ds$$

$i, j = 1, 2 \dots n$ ;  $k, g = 1, 2 \dots r$ ;  $h, l = 1, 2 \dots m$ ;  $n$  jest liczbą przyjętych do opisu funkcji kształtu  $\varphi_i$ ;  $r$  — liczbą funkcji  $\psi_k$ ;  $m$  — liczbą funkcji  $\chi_i$  (wzór 2.2). Symbol:  $\oint_s$  oznacza całkę wzdłuż zamkniętego konturu opisanego współrzędną obwodową  $s$ , a kreski nad symbolami — pochodne cząstkowe względem zmiennej  $s$ . Elementami macierzy kolumnowych:  $\mathbf{v}$ ,  $\mathfrak{g}$ ,  $\boldsymbol{\eta}$ , są poszukiwane funkcje:  $v_i$ ,  $\vartheta_k$ ,  $\eta_l$ , określające przemieszczenia.

Praca sił bezwładności:

$$A_B = - \int_0^L \left[ \oint_s \rho \delta w \cdot \dot{w} ds \right] dz = - \int_0^L \left[ \oint_s \rho \delta (u\ddot{u} + v\ddot{v} + w\ddot{w}) ds \right] dz \quad (3.5)$$

po uwzględnieniu (2.2) daje się zapisać w postaci:

$$A_B = - \int_0^L (\mathbf{v}^T \mathbf{U} \ddot{\mathbf{v}} + \mathfrak{g}^T \mathbf{V} \ddot{\mathfrak{g}} + \boldsymbol{\eta}^T \mathbf{W} \ddot{\boldsymbol{\eta}}) dz \quad (3.6)$$

przy czym elementy kwadratowych macierzy  $\mathbf{U}$ ,  $\mathbf{V}$ ,  $\mathbf{W}$ , są — jak w poprzednim przypadku — stałymi współczynnikami:

$$U_{ij} = \oint_s \rho \delta \varphi_i \varphi_j ds.$$

$$V_{kg} = \oint_s \rho \delta \psi_k \psi_g ds. \quad (3.7)$$

$$W_{hl} = \oint_s \rho \delta \chi_h \chi_l ds$$

Praca sił zewnętrznych:

$$A_z = \int_0^L \left[ \oint_s (p_b u + p_s v + p_n w) ds \right] dz \quad (3.8)$$

po podstawieniu wzorów (2.2) przyjmuje formę:

$$A = \int_0^L (\mathbf{a}^T \mathbf{v} + \mathbf{b}^T \mathfrak{g} + \mathbf{c}^T \boldsymbol{\eta}) dz \quad (3.9)$$

w której elementami macierzy kolumnowych  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$ , są współczynniki:

$$a_i = \oint_s p_b \varphi_i ds,$$

$$b_k = \oint_s p_s \psi_k ds \quad (3.10)$$

$$c_l = \oint_s p_n \chi_l ds$$

zależne już tylko od współrzędnej  $z$  i czasu  $t$ .

Po podstawieniu wzorów (3.3), (3.6), (3.9) do (3.1) otrzymamy, posługując się równaniami Eulera:

$$\frac{d}{dz} \left( \frac{\partial \Omega}{\partial \dot{\alpha}_j} \right) - \frac{\partial \Omega}{\partial \alpha_j} = 0 \quad (3.11)$$

(za  $\alpha_j$  należy przyjmować kolejno:  $\nu_l, \vartheta_k, \eta_l$ ) poszukiwane równania ruchu:

$$\begin{aligned} \mathbf{U}\ddot{\mathbf{v}} &= \mathbf{P}\ddot{\mathbf{v}} - \mathbf{S}\mathbf{v} + (\mathbf{Q}^T - \mathbf{Q})\dot{\mathbf{g}} - \mathbf{a} \\ \mathbf{V}\ddot{\mathbf{g}} &= \mathbf{R}\ddot{\mathbf{g}} - \mathbf{T}\mathbf{g} + (\mathbf{Q}^T - \mathbf{Q})\dot{\mathbf{v}} - \mathbf{b} \\ \mathbf{W}\ddot{\boldsymbol{\eta}} &= \mathbf{A}\ddot{\boldsymbol{\eta}} + \mathbf{c} \end{aligned} \quad (3.12)$$

Ten sam układ równań można wyprowadzić z zasady Hamiltona, tworząc funkcjonal:

$$\int_0^l \int_0^L L dt = \int_0^l (T + \Pi - A_z) dz \quad (3.13)$$

w którym:

$$T = \frac{1}{2} \int_0^L \left[ \int_s^L \rho \delta(\dot{u}^2 + \dot{v}^2 + \dot{w}^2) ds \right] dz \quad (3.14)$$

jest energią kinetyczną układu. Uwzględniając związki (2.2) przekształcamy wzór (3.14) do postaci macierzowej:

$$T = \frac{1}{2} \int_0^L (\dot{\mathbf{v}}^T \mathbf{U} \dot{\mathbf{v}} + \dot{\mathbf{g}}^T \mathbf{V} \dot{\mathbf{g}} + \dot{\boldsymbol{\eta}}^T \mathbf{W} \dot{\boldsymbol{\eta}}) dz \quad (3.15)$$

i z równań Eulera:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\alpha}_j} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\alpha}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial \alpha_j} = 0 \quad (3.16)$$

otrzymujemy, po podstawieniu (3.15), (3.3), (3.9), do (3.13), równania (3.12).

Korzystając z równań Eulera (3.11) lub (3.16) warto posłużyć się następującymi regułami różniczkowania:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\mathbf{a}^T \mathbf{A} \mathbf{a})}{\partial \mathbf{a}} &= 2\mathbf{A} \mathbf{a}, & \frac{\partial(\mathbf{a}^T \mathbf{B} \mathbf{b})}{\partial \mathbf{a}} &= \mathbf{B} \mathbf{b}, \\ \frac{\partial(\mathbf{a}^T \mathbf{B} \mathbf{b})}{\partial \mathbf{b}} &= \mathbf{B}^T \mathbf{a}, & \frac{\partial(\mathbf{b}^T \mathbf{a})}{\partial \mathbf{a}} &= \mathbf{b} \end{aligned} \quad (3.17)$$

gdzie  $\mathbf{A}$  jest dowolną macierzą kwadratową,  $\mathbf{B}$  — macierzą prostokątną;  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  — macierzami kolumnowymi.

#### 4. Teoria ramowo-powłokowa

Funkcje kształtu  $\psi_k(s)$ , przyjęte do opisu przemieszczeń stycznych we wzorze (2.2), determinują jednoznacznie przemieszczenia normalne punktów położonych na linii środkowej przekroju poprzecznego pręta. Przyjmując zatem:  $l = k$ ,  $\eta_l = \vartheta_k$ ,  $\chi_k = \chi_k(\psi_k)$

oraz zakładając, że wycinek pręta ograniczony dwoma poprzecznymi przekrojami odległymi od siebie o 1, odkształca się w kierunku poprzecznym do osi pręta, jak płaska rama o kształcie tego przekroju, linię ugięcia tej ramy, utożsamianą z przemieszczeniami normalnymi linii środkowej przekroju pręta, można wyznaczyć z równania (2.5d):

$$M = M_\psi + M_P + M_B = -D \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} \quad (4.1)$$

w którym moment gnący w przekroju ramy przedstawiamy jako sumę trzech wielkości: — momentu  $M_\psi$  wywołanego przemieszczeniami węzłów w płaszczyźnie ramy; — momentu  $M_P$  wywołanego obciążeniami zewnętrznymi  $p_n$  (ciśnieniami normalnymi — wzór (2.4)); — momentu  $M_B$  wywołanego składowymi sił bezwładności na kierunek normalny.

Przyjęcie takich założeń umożliwia połączenie dwóch ostatnich równań macierzowych układu (3.12) w jedno równanie, a zatem zmniejszenie liczby równań opisujących ruch pręta. We wzorze (3.3) na energię sprężystą pręta ulegnie zmianie tylko ostatni składnik, wyrażający pracę momentu gnącego  $M$  na przemieszczeniach  $w$ :

$$\eta \Delta \eta = \int_s^r \frac{M^2}{D} ds \quad (4.2)$$

Moment gnący  $M_P$  wywołany ciśnieniami normalnymi nie zależy od funkcji  $v_i$ ,  $\vartheta_k$ , opisujących przemieszczenia. Dwa pozostałe momenty można przedstawić w postaci:

$$M_\psi = \sum_{k=1}^r \mathfrak{M}_k \vartheta_k; \quad M_B = \sum_{k=1}^r m_k \ddot{\vartheta}_k; \quad (4.3)$$

gdzie  $\mathfrak{M}_k$  jest momentem gnącym wywołanym przemieszczeniami węzłów ramy, zgodnymi z funkcją  $\psi_k$ , natomiast  $m_k \ddot{\vartheta}_k$  — momentem od obciążeń ramy (o węzłach nieprzesuwnych, lecz podatnych na obrót) składowymi normalnymi sił bezwładności:  $-\rho \delta \chi_k \ddot{\vartheta}_k$

Podstawiając wzory (4.1), (4.3), do (4.2) otrzymamy związek:

$$\eta \Delta \eta = \vartheta^T \mathbf{X} \vartheta + 2\vartheta^T \mathbf{\Pi} \ddot{\vartheta} + 2\vartheta^T \mathbf{h} + \ddot{\vartheta}^T \mathbf{Y} \ddot{\vartheta} + 2\ddot{\vartheta} \mathbf{k} + \int_s^r \frac{M_P^2}{D} ds \quad (4.4)$$

w którym elementy kwadratowych macierzy  $\mathbf{X}$ ,  $\mathbf{\Pi}$ , są stałymi współczynnikami:

$$X_{kg} = \int_s^r \frac{\mathfrak{M}_k \mathfrak{M}_g}{D} ds; \quad \Pi_{kg} = \int_s^r \frac{\mathfrak{M}_k m_g}{D} ds$$

a elementy macierzy kolumnowej  $\mathbf{h}$ , również stałe, są równe:

$$h_k = \int_s^r \frac{\mathfrak{M}_k M_P}{D} ds \quad (k, g = 1, 2 \dots r)$$

Trzema ostatnimi składnikami wzoru (4.4) zajmować się dalej nie warto, ponieważ pochodne cząstkowe tych składników względem zmiennych występujących w równaniach Eulera są zerami.

Przyjmując we wzorach (3.6) i (3.9), zgodnie z założeniami podanymi na początku rozdziału:

$$\eta^T \mathbf{W} \ddot{\eta} = \mathcal{G}^T \mathbf{W} \ddot{\mathcal{G}}, \quad \mathbf{c}^T \eta = \mathbf{c}^T \mathcal{G}$$

otrzymamy, korzystając z (3.1) i (3.11), następujący układ równań ruchu:

$$\begin{aligned} \mathbf{U} \ddot{\mathbf{v}} &= \mathbf{P} \ddot{\mathbf{v}} - \mathbf{S} \mathbf{v} + \mathbf{H} \mathcal{G} - \mathbf{a}, \\ \mathbf{Z} \ddot{\mathcal{G}} &= \mathbf{R} \ddot{\mathcal{G}} - \mathcal{E} \mathcal{G} + \mathbf{K} \mathbf{v} - \mathbf{d}, \end{aligned} \quad (4.5)$$

w którym:

$$\begin{aligned} \mathbf{H} &= \mathcal{O}^T - \mathcal{Q}, & \mathbf{Z} &= \mathbf{V} + \mathbf{W} + \mathbf{H}, \\ \mathcal{E} &= \mathbf{T} + \mathbf{X}, & \mathbf{K} &= \mathcal{Q}^T - \mathcal{O}, \end{aligned}$$

są prostokątnymi, lub kwadratowymi macierzami o stałych współczynnikach, zależnych od geometrii przekroju, stałych materiałowych i przyjętych do opisu funkcji kształtu. Natomiast:

$$\mathbf{d} = \mathbf{b} - \mathbf{h} + \mathbf{c}$$

jest macierzą kolumnową, zależną od obciążeń zewnętrznych, funkcji kształtu i współrzędnej  $z$  na osi pręta.

Tworząc macierze kolumnowe:

$$\mathbf{z} = \begin{Bmatrix} \mathbf{v} \\ \mathcal{G} \end{Bmatrix} \quad \text{oraz} \quad \mathbf{f} = \begin{Bmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{d} \end{Bmatrix}$$

układ (4.5) można zapisać w postaci jednego równania macierzowego:

$$\mathbf{A} \ddot{\mathbf{z}} = \mathbf{B} \ddot{\mathbf{z}} + \mathbf{C} \dot{\mathbf{z}} - \mathbf{D} \mathbf{z} - \mathbf{f}, \quad (4.6)$$

w którym  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{D}$ , są macierzami symetrycznymi, natomiast  $\mathbf{C}$  — macierzą kwadratową antysymetryczną:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \begin{bmatrix} \mathbf{U} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Z} \end{bmatrix}, & \mathbf{B} &= \begin{bmatrix} \mathbf{P} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R} \end{bmatrix}, \\ \mathbf{C} &= \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{H} \\ \mathbf{K} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, & \mathbf{D} &= \begin{bmatrix} \mathbf{S} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathcal{E} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Wymiar tych macierzy jest równy  $n+r$ , tj. liczbie przyjętych do opisu funkcji kształtu  $\varphi_i$ ,  $\psi_k$ .

Równanie macierzowe (4.6) stanowi układ równań różniczkowych cząstkowych drugiego rzędu, niejednorodnych, o stałych współczynnikach. Znalazienie całek tego układu, przy zadanych warunkach granicznych, umożliwi — po podstawieniu rozwiązań do wzorów (2.2) — wyznaczenie przemieszczeń dowolnie wybranych punktów pręta, w dowolnej chwili  $t$ .

Nietrudno zauważyć, że dla  $\mathbf{f} = \mathbf{0}$  równanie (4.6) opisuje drgania swobodne układu:

$$\mathbf{A} \ddot{\mathbf{z}} = \mathbf{B} \ddot{\mathbf{z}} + \mathbf{C} \dot{\mathbf{z}} - \mathbf{D} \mathbf{z}, \quad (4.7)$$

a dla  $\ddot{\mathbf{z}} = \mathbf{0}$  i  $\mathbf{f} = \mathbf{f}(\mathbf{z})$  — niezależnego od czasu przechodzi w równanie równowagi:

$$\mathbf{B} \ddot{\mathbf{z}} + \mathbf{C} \dot{\mathbf{z}} - \mathbf{D} \mathbf{z} - \mathbf{f} = \mathbf{0}. \quad (4.8)$$



### 5. Warunki graniczne

Jeżeli skrajny przekrój pręta ( $z = a$ ) obciążymy układem sił zewnętrznych:

$$\mathbf{q} = q_b(s, t) \mathbf{n} + q_s(s, t) \mathbf{s} + q_n(s, t) \mathbf{b}, \quad (5.1)$$

funkcjonał całkowitej energii mechanicznej (3.1) powiększy się o składnik:

$$G = \int_s (q_b u + q_s v + q_n w) ds, \quad (5.2)$$

wyrażający pracę tych sił na przemieszczeniach (2.1). Po podstawieniu w miejsce  $u, v, w$ , związków (2.2) oraz — zgodnie z założeniami teorii ramowo—powłokowej:  $\eta_k = \vartheta_k$ , wzór (5.2) przyjmie postać:

$$G = \mathbf{p}^T \mathbf{v} + \mathbf{q}^T \mathfrak{g}, \quad (5.3)$$

przy czym elementy kolumnowych macierzy  $\mathbf{p}, \mathbf{q}$ , są funkcjami czasu:

$$p_i = \int_s q_b \varphi_i ds, \quad (5.4)$$

$$q_k = \int_s q_s \psi_k ds + \int_s \frac{q_n \chi_k}{D} ds.$$

Przyrównanie do zera wariacji funkcyjonału:

$$J_1 = \int_0^L \Omega dz + G, \quad (5.5)$$

prowadzi [7] do wyznaczenia warunku granicznego na brzegu  $z = a$ :

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \alpha_j} = \frac{\partial G}{\partial \alpha_j}, \quad (5.6)$$

gdzie  $\alpha_j$  przyjmuje kolejno wartości:  $v_i, \vartheta_k$  ( $i = 1, 2 \dots n; k = 1, 2 \dots r$ ).

Podstawiając poszczególne składniki funkcji  $\Omega$  (wzory (3.3), (3.6), (3.9)) do wzoru (5.5) można ograniczyć się do wyrazów zawierających pochodne współrzędnych względem zmiennej  $z$ :

$$J_1 = \frac{1}{2} \int_0^L (\mathbf{v}^T \mathbf{P} \mathbf{v} + \mathfrak{g}^T \mathbf{R} \mathfrak{g} + 2 \mathfrak{g}^T \mathbf{\Theta} \mathbf{v} + 2 \mathbf{v}^T \mathbf{Q} \mathfrak{g} + \dots) dz + \mathbf{p}^T \mathbf{v} + \mathbf{q}^T \mathfrak{g} \quad (5.7)$$

i posługując się wzorem (5.6) oraz regułami różniczkowania (3.17) wyznaczyć warunki graniczne:

$$\begin{aligned} \mathbf{P} \mathbf{v} + \mathbf{\Theta}^T \mathfrak{g} &= \mathbf{p}, \\ \mathbf{R} \mathfrak{g} + \mathbf{Q}^T \mathbf{v} &= \mathbf{q}, \end{aligned} \quad (5.8)$$

stanowiące układ równań różniczkowych pierwszego rzędu. Układ ten można przedstawić w formie jednego równania macierzowego:

$$\mathbf{M}_1 \mathbf{x}|_{z=a} = \mathbf{r}, \quad (5.9)$$

w którym:

$$\mathbf{M}_t = \begin{bmatrix} \mathbf{P} & & \boldsymbol{\theta} \\ & \mathbf{R} & \mathbf{Q} \\ & & \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{x} = \{\dot{v} \dot{\vartheta} v \vartheta\}^T, \quad \mathbf{r} = \{\mathbf{p} \mathbf{q}\}^T.$$

Gdy skrajny przekrój pręta jest swobodny (nieobciążony), macierze  $\mathbf{p}$ ,  $\mathbf{q}$ , są zerowe i warunek graniczny dla tego przypadku przyjmuje postać:

$$\mathbf{M}_1 \mathbf{x}|_{z=a} = \mathbf{0}. \quad (5.10)$$

Szytywne utwierdzenie przekroju pręta powoduje, że przemieszczenia (2.2) wszystkich punktów tego przekroju są zerami, a warunek graniczny:

$$\begin{Bmatrix} \dot{v} \\ \dot{\vartheta} \end{Bmatrix} = \mathbf{0}, \quad (5.11)$$

można uważać za szczególny przypadek warunku (5.9).

Przewodując możliwość numerycznego całkowania równań ruchu, warunki graniczne na krańcach pręta zapiszemy w postaci:

$$\mathbf{M} \mathbf{x}|_{z=0} + \mathbf{N} \mathbf{x}|_{z=L} = \mathbf{s}, \quad (5.12)$$

gdzie  $\mathbf{s} = \{\mathbf{r}|_{z=L} \mathbf{r}|_{z=0}\}^T$  jest macierzą kolumnową sił uogólnionych, a  $\mathbf{M}$  i  $\mathbf{N}$  — macierzami kwadratowymi o wymiarach  $2(n+r)$  i elementach będących stałymi współczynnikami.

Do pełnego opisu ruchu, oprócz warunków granicznych na krańcach pręta, należy również podać warunki początkowe, określające położenia i prędkości wszystkich punktów układu w chwili  $t = 0$ . Funkcje zmiennej  $z$ , określające wartości współrzędnych uogólnionych  $v_i$ ,  $\vartheta_k$  na początku ruchu:

$$v_{i0} = v_{i0}(z), \quad \vartheta_{k0} = \vartheta_{k0}(z),$$

powinny spełniać równania równowagi (4.8). Natomiast funkcje określające początkowe prędkości uogólnione:

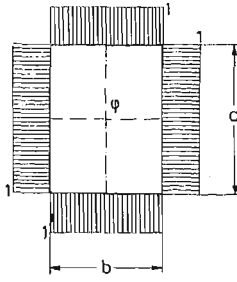
$$\dot{v}_{i0} = \dot{v}_{i0}(z), \quad \dot{\vartheta}_{k0} = \dot{\vartheta}_{k0}(z),$$

muszą być funkcjami ciągłymi.

## 6. Wybór funkcji kształtu

Zasady wyboru funkcji kształtu:  $\varphi_i$ ,  $\psi_k$ , (2.2) pozostają takie same jak w zagadnieniach statycznych [3], [4], [5]. Aby potwierdzić poprawność sformułowanych równań ruchu rozpatrzmy następujące przykłady:

Przykład 6.1. Jeżeli przemieszczenie przekroju poprzecznego jednorodnego pręta o gęstości  $\rho$ , module sprężystości  $E$ , module odkształcenia postaciowego  $G$  i przekroju, jak na rys. 6.1 opiszemy jedną tylko funkcją  $\varphi$ , mającą wartość 1 w każdym punkcie tego



Rys. 6.1.

przekroju oraz założymy, że na układ nie działają żadne siły zewnętrzne, to w równaniu (4.6) tylko dwa współczynniki (3.7) i (3.4):

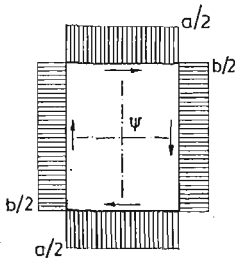
$$U_{11} = U = \oint_s \rho \delta \varphi^2 ds = \rho A,$$

$$P_{11} = P = \oint_s \rho \delta \varphi^2 ds = EA,$$

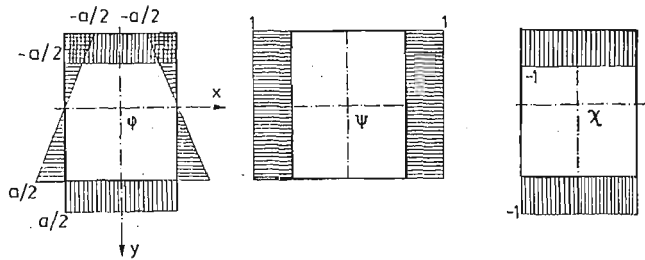
oraz jedna współrzędna  $v_1 = v$  są różne od zera. Symbol  $A$  oznacza powierzchnię przekroju. Otrzymane równanie ruchu:

$$\ddot{v} - \frac{E}{\rho} v'' = 0, \tag{6.1}$$

jest znany równaniem różniczkowym podłużnych drgań swobodnych pręta.



Rys. 6.2.



Rys. 6.3.

Przykład 6.2. Opisując przemieszczenie tego samego pręta jedną funkcją kształtu  $\psi$  przedstawioną na rys. 6.2, obliczamy współczynniki równania ruchu (4.6) wg wzorów (3.7) i (3.4):

$$V_{11} = V = \oint_s \rho \delta \psi^2 ds = \frac{1}{2} \rho \delta ab(a+b),$$

$$R_{11} = R = \oint_s G \delta \psi^2 ds = \frac{1}{2} G \delta ab(a+b).$$

Po podstawieniu tych współczynników oraz  $\vartheta_1 = \vartheta$  do równania (4.6) otrzymujemy równanie drgań skrętnych pręta:

$$\ddot{\vartheta} - \frac{G}{\rho} \vartheta = 0, \quad (6.2)$$

w którym  $\vartheta$  jest kątem obrotu przekroju.

Przykład 6.3. Trzy funkcje;  $\varphi$ ,  $\psi$ ,  $\chi$  przedstawione na rys. 6.3 opisują zgięcie pręta w płaszczyźnie pionowej, przy czym przekrój poprzeczny pręta przemieszcza się jak ciało sztywne, pozostając prostopadły do linii ugięcia. Nietrudno bowiem zauważyć, że składowe przemieszczenia (2.1) są równe:

$$u = y\varphi, \quad v = y\psi, \quad w = y\chi, \quad (6.3)$$

gdzie  $y$  jest przemieszczeniem środka geometrycznego przekroju.

Podstawiając iloczyny (6.3) do wzorów (3.2) i (3.6), otrzymamy funkcjonał (3.1):

$$\int_0^L \Omega dz = -\frac{1}{2} \int_0^L (EJ_x \varphi''^2 + 2\rho J_x y'' \varphi'' + 2\rho A y \varphi'') dz,$$

w którym:

$$J_x = \int_s \delta \varphi^2 ds = 2\delta \left( \frac{a^2 b}{4} - \frac{a^3}{12} \right),$$

jest powierzchniowym momentem bezwładności przekroju względem osi  $x$ , natomiast:

$$A = \int_s \delta(\psi^2 + \chi^2) ds,$$

— polem tego przekroju. Z równania Eulera:

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} \left( \frac{\partial \Omega}{\partial y''} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial \Omega}{\partial y'} \right) + \frac{\partial \Omega}{\partial y} = 0,$$

otrzymujemy znane równanie drgań poprzecznych pręta:

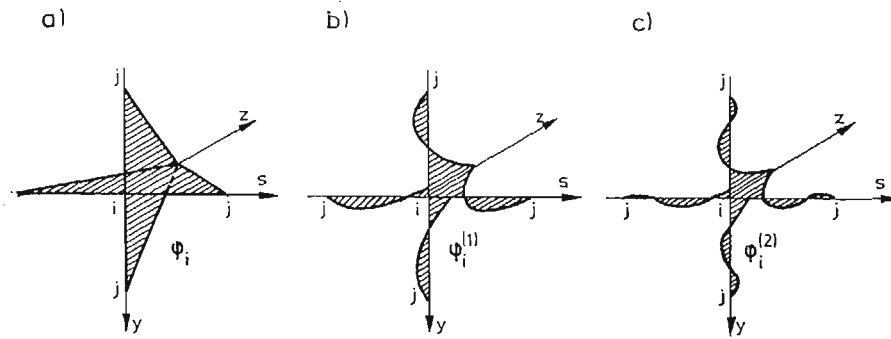
$$EJ_x \varphi'''' + \rho A \ddot{\varphi} - \rho J_x y'' = 0, \quad (6.4)$$

uwzględniające siły bezwładności od obrotu przekroju wokół osi  $x$ .

W podobny sposób można opisać zgięcie pręta w płaszczyźnie poziomej, a także wprowadzić dodatkowe funkcje [3], [10] uwzględniające paczenie przekroju. Funkcje tego typu można jednak przyjmować tylko do obliczeń prętów o przekrojach nieskomplikowanych, złożonych z jednego, lub co najwyżej dwóch prostokątów.

Znacznie dokładniejsze wyniki uzyskuje się, przyjmując do opisu przemieszczeń wzdłużnych funkcje  $\varphi_i$  skonstruowane z wielomianów Legendre'a w taki sposób, aby przyjmowały one wartości 1 w  $i$ -tym węźle przekroju (rys. 6.4) i wartości zero we wszystkich węzłach sąsiednich [5]. Można też na linii środkowej przekroju przyjmować dodatkowe, fikcyjne węzły.

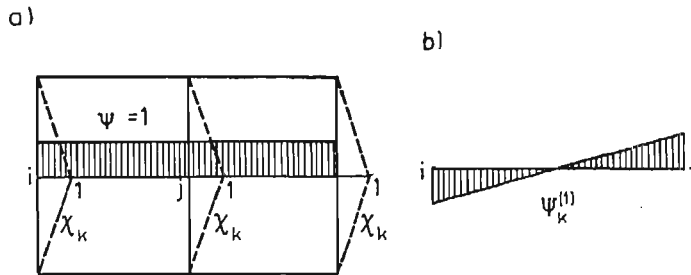
Funkcje  $\psi_k$ ,  $\chi_k$  opisujące przemieszczenia styczne i normalne w płaszczyźnie przekroju konstruuje się przesuwając o wartość 1 w kierunku współrzędnej obwodowej  $s$ , dwa połą-



Rys. 6.4.

czone ze sobą węzły przekroju (rys. 6.5a). Wprowadzając dodatkową funkcję  $\psi_k^{(1)}$ , jak na rys. 6.5b, uwzględniamy w opisie efekt ściskania pręta ramy.

Im większa jest liczba przyjętych funkcji kształtu, tym opis jest dokładniejszy. Wzrostowi tej dokładności towarzyszy jednak wzrost liczby równań ruchu, a zatem rozwiązanie problemu staje się bardziej skomplikowane. Z tego względu, w obliczeniach statycznych, konstruktorzy ograniczają swój wybór do funkcji przedstawionych na rys. 6.4a i 6.5a, nazywanych funkcjami Własowa pierwszego rodzaju.



Rys. 6.5.

## 7. Całkowanie równań

Jeżeli pręt jest obciążony układem sił harmonicznymi o takich samych fazach i częstościach:  $f = g \cos \omega t$ , równanie ruchu (4.6) przyjmuje postać:

$$\mathbf{A}\ddot{\mathbf{z}} = \mathbf{B}\dot{\mathbf{z}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{z}} - \mathbf{D}\mathbf{z} - \mathbf{g} \cos \omega t. \quad (7.1)$$

Przewidując szczególne rozwiązanie tego równania w formie:

$$\mathbf{z} = \mathbf{y} \cos \omega t$$

otrzymamy, po podstawieniu do (7.1) układ równań różniczkowych zwyczajnych:

$$\mathbf{B}\dot{\mathbf{y}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{y}} + \mathbf{G}\mathbf{y} = \mathbf{g}, \quad (7.2)$$

w którym:

$$\mathbf{G} = \omega^2 \mathbf{A} - \mathbf{D}.$$

Całkując ten układ numerycznie [11] z uwzględnieniem warunków brzegowych (5.12) wyznaczmy maksymalne przemieszczenia (amplitudy) poszczególnych punktów konstrukcji. Natomiast powtarzając obliczenia wielokrotnie, dla różnych częstości  $\omega$  i rejestrując podczas całkowania tylko przemieszczenia maksymalne, można wyznaczyć częstości rezonansowe. Są nimi te wielkości  $\omega$  przy których przemieszczenia osiągają wartości bardzo duże.

Jako przykład rozpatrzmy pręt o przekroju złożonym ze skończonej liczby prostokątów, jednym końcem utwierdzony, na drugim zaś obciążony układem sił skupionych:  $\mathbf{p}_0 \cos \omega t$ . Przyjmijmy, dla uproszczenia obliczeń, że składowe binormalne tych sił są przyłożone w węzłach przekroju, a składowe styczne działają wzdłuż linii łączących poszczególne węzły. Wprowadzając do opisu funkcje Własowa pierwszego rodzaju (rys. 6.4a i 6.5a) stwierdzamy, że wektor sił uogólnionych w równaniu (5.9) jest:

$$\mathbf{r} = \mathbf{p}_0 \cos \omega t, \quad (7.3)$$

gdź wartości funkcji  $\varphi_i, \psi_k$  (wzór 5.4) w punktach przyłożenia sił są równe 1.

Równanie amplitud (7.2) ma zatem postać:

$$\mathbf{B}\mathbf{y} + \mathbf{C}\mathbf{y} + \mathbf{G}\mathbf{y} = \mathbf{0}, \quad (7.4)$$

a warunki graniczne (5.12):

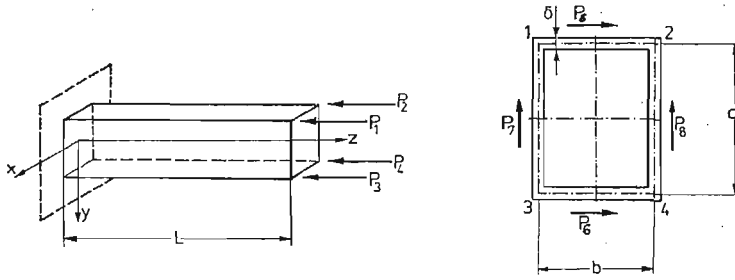
$$\left[ \begin{array}{cccc} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array} \right] \begin{Bmatrix} \mathbf{y} \\ \mathbf{y} \end{Bmatrix}_{z=0} + \left[ \begin{array}{cc|cc} \mathbf{P} & & & \\ & \mathbf{R} & \mathbf{Q}^T & \\ \hline & & & \\ & & & \end{array} \right] \begin{Bmatrix} \mathbf{y} \\ \mathbf{y} \end{Bmatrix}_{z=L} = \left\{ \mathbf{P}_0 \right\}. \quad (7.5)$$

W miejsca niewypełnione w równaniu (7.5) należy wpisać macierze zerowe.  $\mathbf{I}$  oznacza macierz jednostkową.

Gdy przekrojem pręta jest jeden prostokąt, układ (7.4) składa się z ośmiu równań różniczkowych zwyczajnych drugiego rzędu. Dla przekroju dwuobwodowego (dwa prostokąty) liczba tych równań wzrasta do 11, a dla przekroju złożonego z czterech prostokątów wynosi już 15.

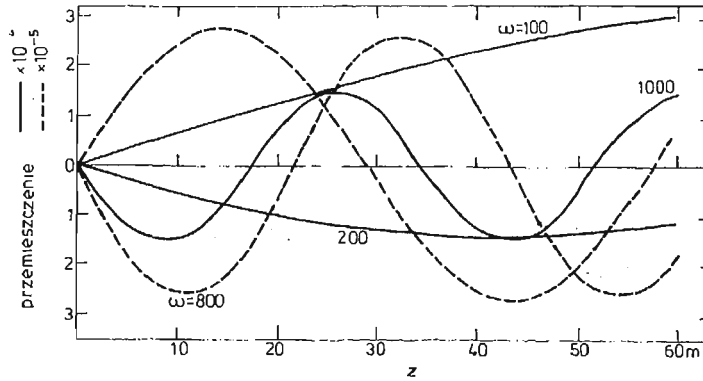
## 8. Przykłady obliczeń numerycznych

Mając na względzie kontrolę poprawności opisanej metody, obliczono współczynniki równania (7.4) dla wspornika o przekroju prostokątnym, obciążonego na końcu układem sił skupionych:  $P_1 \cos \omega t$ , jak na rys. 8.1. Dane liczbowe:  $L = 60$ ;  $a = 20$ ;  $b = 10$ ;  $\delta = 0,1$ ;  $E_1 = 2,1 \cdot 10^5$ ;  $E_2 = 2,1 \cdot 10^5$ ;  $\nu_{21} = \nu_{12} = 0,3$ ;  $G = 8,1 \cdot 10^4$ ;  $\rho = 7,6 \cdot 10^{-3}$ . Jednostki podstawowe: MN, m, s. Równania całkowano metodą Oluremiego-Olaofe [8] uogólnioną przez J. Więckowskiego [11] na równania macierzowe z osobliwą macierzą  $\mathbf{C}$ .

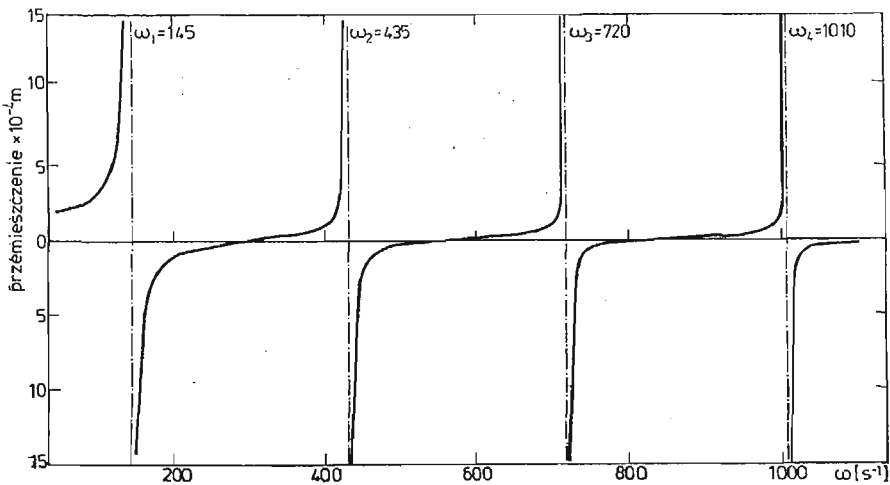


Rys. 8.1.

Przykład 8.1.  $P_1 = P_2 = P_3 = P_4 = 1$ ;  $P_5 = P_6 = P_7 = P_8 = 0$ . Dla każdej wartości  $\omega$  otrzymano jednakowe przemieszczenia podłużne wszystkich punktów danego przekroju oraz wszystkie przemieszczenia poprzeczne równe zero. Przykład przedstawia zatem drgania podłużne pręta. Na rys. 8.2 przedstawiono obliczone amplitudy przemiesz-



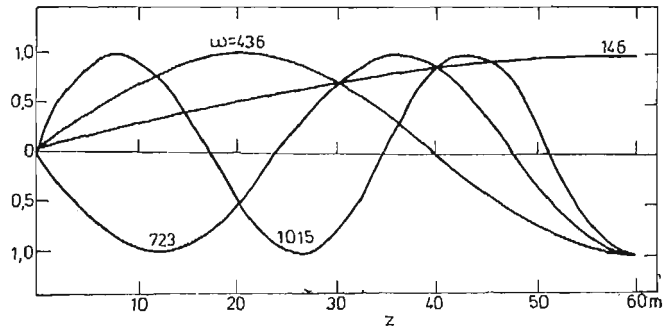
Rys. 8.2.



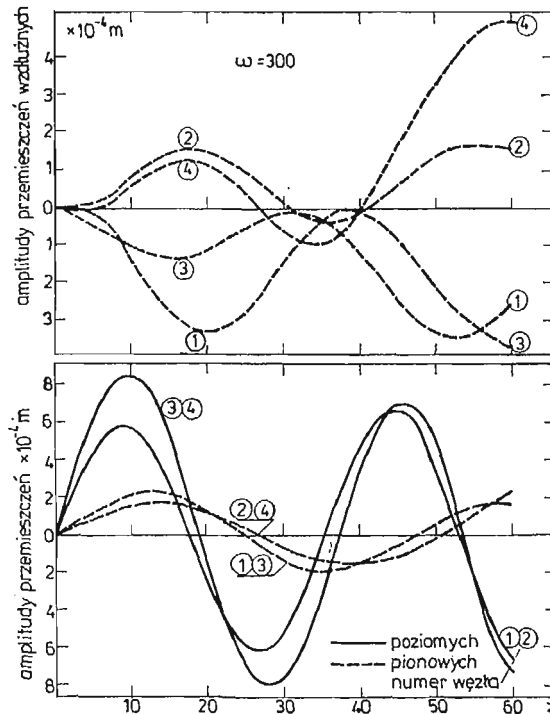
Rys. 8.3.

czeń przekrojów wzdłuż osi pręta, dla kilku przypadkowo wybranych częstości  $\omega$ . Częstość  $\omega = 1000$  jest bliska częstości rezonansowej, bowiem otrzymany dla niej wykres amplitud przypomina czwartą postać drgań własnych.

Amplitudy przemieszczeń skrajnego przekroju pręta ( $z = 60$ ) obliczone dla różnych częstości  $\omega$  wykreślono na rys. 8.3. Częstości:  $\omega_1 = 145$ ,  $\omega_2 = 435$ ,  $\omega_3 = 720$ ,  $\omega_4 = 1010$ , przy których przemieszczenia osiągają wartości nieskończenie duże są częstościami rezonansowymi układu. Znane są częstości własne swobodnych drgań podłużnych wspornika wg teorii technicznej (równanie 6.1):



Rys. 8.4.



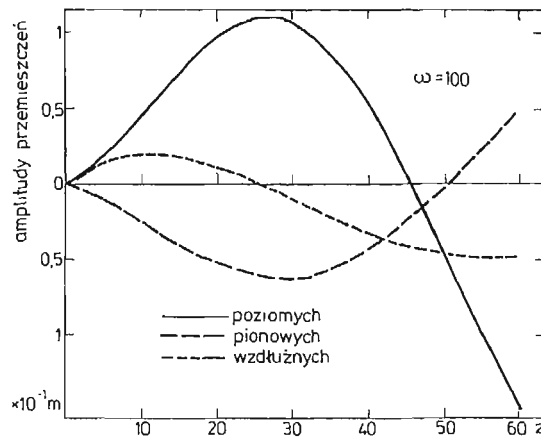
Rys. 8.5.



$$\omega_n = \frac{\pi}{2L} \sqrt{\frac{E_1}{\rho}} (2n-1), \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Podstawiając w miejsce  $E_1$  zredukowaną stałą  $E = E_1/(1-\nu_{21} \cdot \nu_{12})$  jak w (2.5a) oraz pozostałe dane liczbowe z naszego przykładu, otrzymamy wielkości:  $\omega_1 = 144,3$ ;  $\omega_2 = 432,8$ ;  $\omega_3 = 721,3$ ;  $\omega_4 = 1009,8$ ; równe praktycznie częstościom rezonansowym badanego pręta. Dzieliąc natomiast amplitudy przemieszczeń punktów na liniach węzłowych, obliczone dla częstości bliskich rezonansowych:  $\omega_1 = 146$ ,  $\omega_2 = 436$ ,  $\omega_3 = 723$ ,  $\omega_4 = 1015$ , przez wartość amplitudy przemieszczenia przekroju skrajnego, otrzymamy wykresy (rys. 8.4) przedstawiające główne postacie drgań własnych układu.

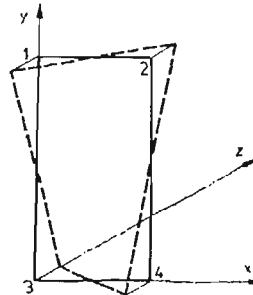
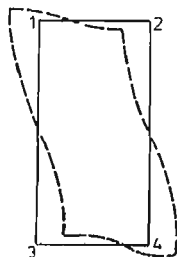
Przykład 8.2.  $P_1 = 4$ ,  $P_2 \dots P_8 = 0$ . Pozioma siła harmoniczna przyłożona w węzle 1 (rys. 8.1) skrajnego przekroju, wywołuje drgania podłużne, sprzężone ze zginaniem ukośnym i deformacją przekroju. Na ogół, przy dowolnie obranej częstości wymuszenia (rys. 8.5), amplitudy przemieszczeń poszczególnych węzłów przekroju są różne. Jeżeli jednak częstość siły wymuszającej zbliża się do rezonansu (rys. 8.6), amplitudy przemieszczeń wszystkich czterech linii węzłowych stają się w przybliżeniu jednakowe, choć ruch podłużny dwóch sąsiadujących ze sobą węzłów odbywa się w przeciwnych kierunkach. Inne są też częstości rezonansowe niż w poprzednim przykładzie.



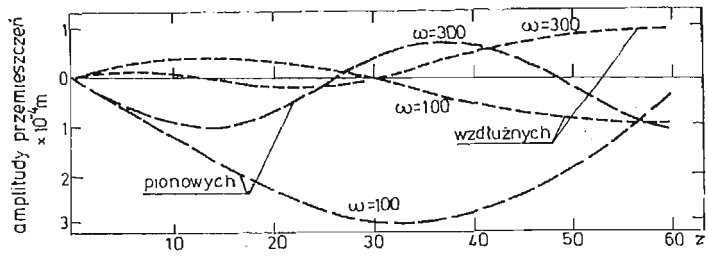
Deformacja skrajnego przekroju

a) poprzeczna

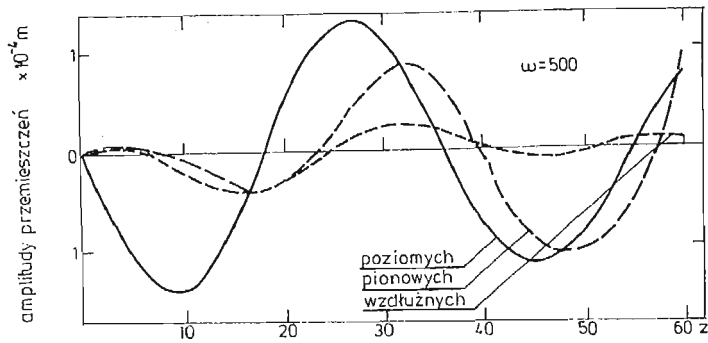
b) podłużna



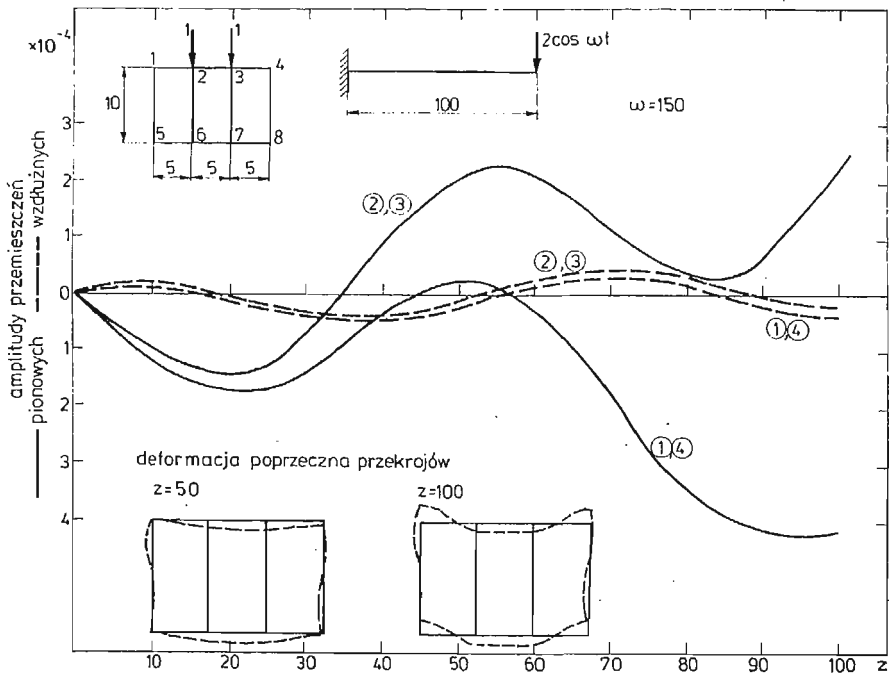
Rys. 8.6.



Rys. 8.7.



Rys. 8.8.



Rys. 8.9.

Przykład 8.3. Układ sił harmonicznycych o amplitudach:  $P_1 \dots P_6 = 0$ ,  $P_7 = P_8 = 1$ , wywołał drgania giętne wspornika w płaszczyźnie pionowej, o takich samych amplitudach przemieszczeń wszystkich czterech węzłów przekroju. Na rys. 8.7 pokazano amplitudy przemieszczeń linii węzłowych przy dwóch różnych częstościach sił wymuszających.

Przykład 8.4.  $P_1 \dots P_4 = 0$ ,  $P_5 = 1$ ,  $P_6 = -1$ ,  $P_7 = 2$ ,  $P_8 = -2$ . Dwie pary sił o takich samych amplitudach momentów, przyłożone do skrajnego przekroju, wywołują drgania skrętne wspornika, połączone z paczeniem oraz deformacją poprzeczną konturu. Amplitudy przemieszczeń wszystkich czterech węzłów przekroju są zawsze jednakowe a węzły sąsiadujące ze sobą poruszają się na kierunku wzdłużnym w przeciwne strony. Rys. 8.8 przedstawia amplitudy przemieszczeń linii węzłowych przy częstości wymuszenia  $\omega = 500$ , znajdującej się pomiędzy czwartą, a piątą częstością rezonansową.

Przykład 8.5. Dwie pionowe siły harmoniczne, przyłożone w węzłach 2 i 3 (rys. 8.9) przekroju składającego się z trzech prostokątów wywołały drgania giętne wspornika, połączone z deformacją poprzeczną i paczeniem przekroju; amplitudy skrajnych węzłów konturu różnią się od amplitud przemieszczeń węzłów wewnętrznych. W stosunku do poprzednich przykładów zmieniono tylko wymiary przekroju poprzecznego ( $a = 10$ ,  $b = 15$ ) oraz długość pręta ( $L = 100$ ), pozostawiając takie same grubości i stałe materiałowe.

## 9. Wnioski

Przy odpowiednio dobranych funkcjach kształtu model ramowo-powłokowy Własowa prowadzi do takich samych wyników, jak powszechnie znane modele prętowe. W ogólnym jednak przypadku przedstawiona metoda umożliwi opis dokładniejszy, uwzględnia bowiem rozmaite postacie deformacji poprzecznej i paczenia przekroju. Mankamentem teorii Własowa jest — jak wiadomo — odbiegający od rzeczywistości rozkład naprężeń stycznych w przekroju cienkościennego pręta. W wypadku zastosowania omawianej teorii do opisu drgań, przyjęcie niepoprawnego rozkładu naprężeń stycznych nie powinno mieć istotnego wpływu na obliczenia częstości rezonansowych, gdyż w równaniach ruchu występują tylko wypadkowe tych naprężeń.

Znalezienie ogólnego rozwiązania równań ruchu (4.6), poprzez wartości i funkcje własne, jest — jak dotąd — możliwe tylko w najprostszych przypadkach [9], [10]. Gdy przekrój pręta jest bardziej skomplikowany, rozmywa się przejrzystość opisu jaką dawała teoria techniczna, a znaczna liczba wartości własnych i podstawowych form wydłuża czas liczenia i angażuje pamięć maszyny cyfrowej. Zastosowana w pracy metoda bezpośrednia, prowadząca do rozwiązania szczególnego, umożliwia jednak oszacowanie częstości rezonansowych i wskazanie najbardziej niebezpiecznych miejsc konstrukcji.

Pozornie najprostszy problem numerycznego całkowania układu równań różniczkowych zwyczajnych o stałych współczynnikach okazał się w danym przypadku niełatwy, ze względu na błędy maszynowych zaokrążeń. Zawiodły metody wielokrokowe połączone z tworzeniem macierzy bazowej, a metody różnicowe wymagały przy wyższych częstościach zbyt dużej pamięci maszyny. Zastosowana metoda [11] polegająca na rozwinięciu przewidywanych rozwiązań w szereg wielomianów Czebyszewa, umożliwia wyznaczenie pierwszych kilkunastu częstości rezonansowych cienkościennego pręta

o przekroju złożonym z co najwyżej 8 - 10 prostokątów. Nadal więc problemem jest znalezienie dostatecznie szybkiej i dokładnej metody całkowania równań.

Jeżeli poszczególne węzły przekroju są połączone liniami prostymi (pręt cienkościenny o przekroju złożonym z wielokątów), proces obliczania na maszynie cyfrowej współczynników równania macierzowego (7.5) oraz warunków granicznych (5.12) można zautomatyzować. W pracy [5] przedstawiono algorytm, umożliwiający automatyczną generację równań ruchu cienkościennego pręta o przekroju złożonym ze skończonej liczby prostokątów, po wprowadzeniu danych, zawierających wymiary geometryczne i stałe materiałowe poszczególnych elementów konstrukcji.

Możliwe jest zastosowanie hipotezy Własowa do opisu drgań prętów cienkościennych o przekroju zmiennym odcinkami, przy czym niektóre odcinki takiej konstrukcji mogą być prętami cienkościennymi o profilu otwartym. Równania ruchu tych ostatnich są znane [1], [2], [3], a sprzężenie układów równań opisujących drgania poszczególnych odcinków umożliwia warunki graniczne (5.12).

#### Literatura

1. J. WIĘCKOWSKI, *Mechanika konstrukcji okrętowych*, Wyd. Politechniki Gdańskiej 1985.
  2. R. E. D. BISHOP, W. G. PRICE, *Hydroelasticity of Ships*, Cambridge University Press, 1979.
  3. В. Э. Власов, *Избранные Труды*, Т. III, ГИФМЛ, Москва 1960.
  4. Z. GÓRECKI, *Zastosowanie półbezmomentowej teorii powłok w obliczeniach statycznych ortotropowych, liniowo-sprężystych prętów cienkościennych, przyzmatycznych, o przekroju wieloobwodowym, zamkniętym*, *Mechanika Teoretyczna i Stosowana* 3/4, 20, 1982.
  5. M. SPERSKI, *Zastosowanie hipotezy Własowa do opisu drgań prętów cienkościennych o zamkniętym profilu*, *Prace Badawcze Instytutu Okrętowego Politechniki Gdańskiej* 1250//MR-360, 1979 (niepublikowana).
  6. H. MAJEWSKI, *Zastosowanie zasady Hamiltona do wyprowadzenia równań ruchu belki cienkościennej z uwzględnieniem deformacji konturu*, *Materiały IX Sympozjum: Drgania w Układach Fizycznych*, Poznań — Błażejewko 1980.
  7. I. M. GELFAND, S. W. FOMIN, *Rachunek wariacyjny*, PWN, Warszawa 1970.
  8. G. OLUREMI-OLAOFE, *On the Tchebyschev method of solution of ordinary differential equations*, *J. of Math. Anal. and Appl.* 1, 1977.
  9. M. SPERSKI, *Drgania własne prętów cienkościennych i wieloobwodowym, zamkniętym przekroju*, *Prace Badawcze Instytutu Okrętowego Politechniki Gdańskiej* 1374//MR-436 1980 (niepublikowana).
  10. H. MAJEWSKI, *Zastosowanie metody elementów skończonych do analizy drgań belek cienkościennych o przekroju dwuobwodowym z uwzględnieniem deformacji konturu*, *Praca doktorska*, Politechnika Gdańska 1985 (niepublikowana).
  11. J. WIĘCKOWSKI i inni, *Wdrożenie półbezmomentowej teorii powłok do obliczeń kadłubów bezgrodzio- wych*, *Prace Badawcze Instytutu Okrętowego Politechniki Gdańskiej* 1148/79 (niepublikowana).
- Egzemplarze wymienionych prac niepublikowanych są dostępne w Bibliotece Głównej, lub jej filii przy Intytucie Okrętowym Politechniki Gdańskiej.

#### Р е з ю м е

#### ПРИМЕНЕНИЕ ФУНКЦИЙ ВЛАСОВА ДЛЯ ОПИСАНИЯ КОЛЕБАНИЙ ТОНКОСТЕННЫХ СТЕРЖНЕЙ-ОБОЛОЧЕК ЗАКРЫТОГО ПРОФИЛЯ

В работе представлено обобщение теории Власова на случай движения. Интегрирование сформулированных, дифференциальных уравнений на вычислительной машине, позволяет определить ответ конструкции на вынуждение гармоническими силами, а также найти критические частоты.

## S u m m a r y

## USE OF SHAPE FUNCTIONS TO THE DESCRIPTION OF VIBRATION OF THE THIN-WALLED BARS WITH CLOSED SECTION

The motion equations of orthotropic elastic bar with multicircuit closed section have been formulated. The numerical integration of the differential equations of motion enables to determine the structure response caused by the system of harmonic forces excitation as well as the calculation of the resonance frequencies.

*Praca wpłynęła do Redakcji dnia 28 maja 1986 roku.*

---