MECHANIKA
TEORETYCZNA
I STOSOWANA
1/2, 24, (1986)

ZASTOSOWANIE DYSKRETNEGO MODELU ODKSZTAŁCALNEGO SAMOLOTU DO BADANIA DRGAŃ WŁASNYCH*

ZBIGNIEW DŻYGADŁO
IDZI NOWOTARSKI
ALEKSANDER OLEJNIK

WAT

1. Wstęp

Zastosowanie metody elementów skończonych stwarza szerokie możliwości numerycznej analizy problemów statyki i dynamiki złożonych konstrukcji (por. [1]÷[8]).

W niniejszej pracy przedstawiono dynamiczny model odkształcalnego samolotu do badania częstości i postaci drgań własnych, stosując w odróżnieniu od artykułów [4]÷[7] inny sposób formułowania równań równowagi na poziomie elementu oraz metodę ich składania. W konsekwencji uzyskano możliwość budowy jednolitego matematycznego modelu do analizy drgań własnych struktur o dowolnej konfiguracji geometrycznej i masowej.

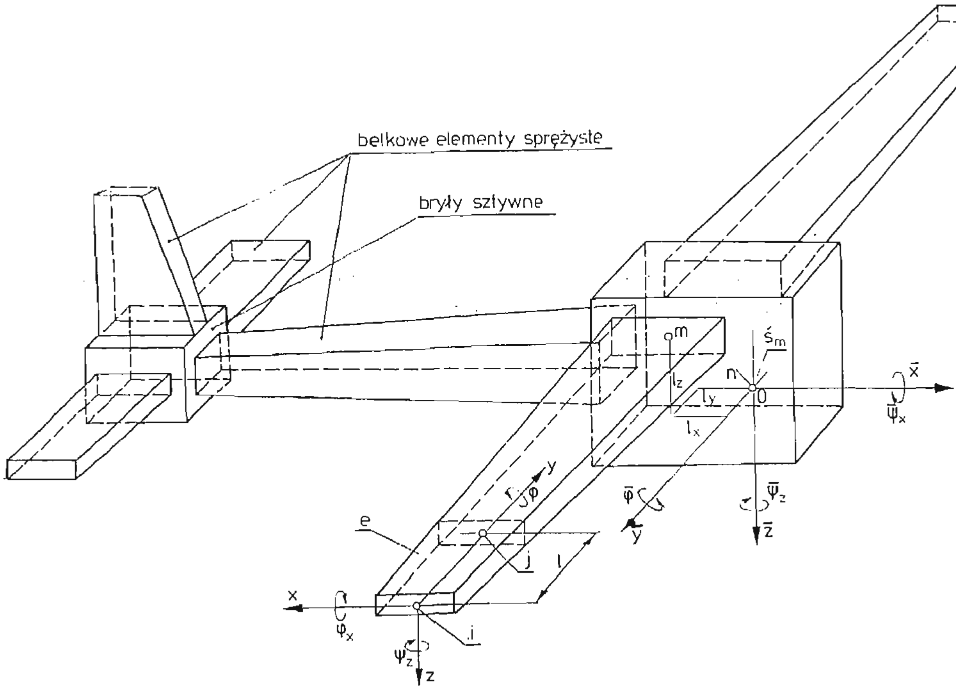
Przyjęto, że skrzydło, środkowa część kadłuba i usterzenia są odkształcalnymi zespołami, których parametry masowe i sztywnościowe zmieniają się w sposób ciągły i skokowy wzdłuż długości. Przednią część kadłuba samolotu traktuje się jako sztywną bryłę, do której są przymocowane odkształcalne zespoły.

Przy tych założeniach, zastosowano jednowymiarową dyskretyzację odkształcalnych zespołów konstrukcyjnych za pomocą przemieszczeniowej metody elementów skończonych. Dokonano podziału struktury na dowolnie usytuowane w przestrzeni odkształcalne elementy belkowe o liniowo zmiennych parametrach geometrycznych i masowych oraz nieodkształcalne elementy w postaci sztywnych brył (rys. 1).

Uwzględniono możliwość analizy drgań samolotu w przypadku skrzydła o dużym wydłużeniu, dowolnym kącie skosu i wzniosu, z podwieszeniami zewnętrznymi oraz w przypadku braku symetrii masowej.

Zastępując rzeczywistą konstrukcję samolotu jej modelem belkowo-bryłowym, sfor-

* Praca przedstawiona na I Ogólnopolskiej Konferencji „Mechanika w Lotnictwie" — Warszawa 19 I 1984 r.

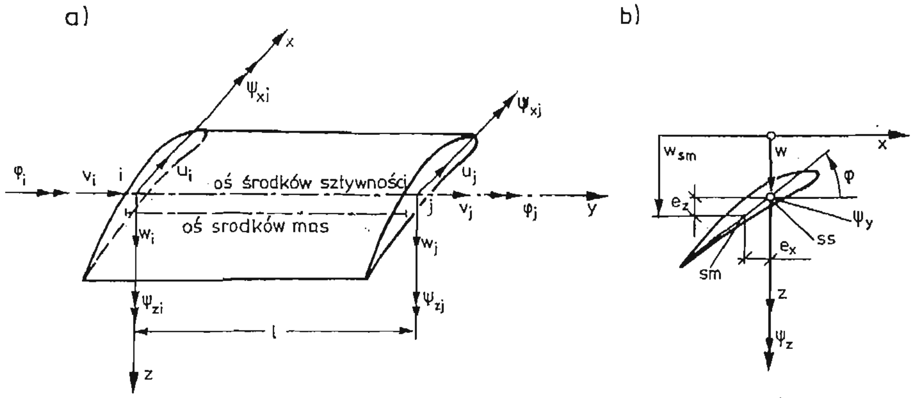


Rys. 1

mułowano ogólną postać równań równowagi dynamicznej, pozwalającą na numeryczną analizę podstawowych charakterystyk dynamicznych układu.

2. Macierz sztywności i mas elementu belkowego

Z rozpatrywanej konstrukcji samolotu (rys. 1) wydzielony element „e" o węzłach i oraz j i długości l, z którym związany jest układ współrzędnych lokalnych $Oxyz$ (rys. 2).



Rys. 2

Wprowadzając bezwymiarową współrzędną $\xi = y/l$, przemieszczenia dowolnego punktu osi sztywności elementu określone są przez składowe wektora f o postaci

$$f(\xi, t) = [u(\xi, t), v(\xi, t), w(\xi, t), \psi_x(\xi, t), \varphi(\xi, t), \psi_z(\xi, t)]^T, \tag{2.1}$$

gdzie: u, v, w oraz ψ_x, φ, ψ_z oznaczają odpowiednio przemieszczenia i obroty względem osi lokalnego układu x, y, z, przy czym

$$\psi_x = \frac{dw}{dy} = \frac{dw}{ld\xi}, \quad \psi_z = \frac{du}{dy} = \frac{du}{ld\xi}, \tag{2.2}$$

Oznaczając wektor przemieszczeń węzłów elementu przez

$$\delta_e(\xi, t) = [\delta_i(\xi, t), \delta_j(\xi, t)]^T, \tag{2.3}$$

zaś jego składowe jako

$$\delta_k(\xi, t) = [\overset{\circ}{u}_k(\xi), \overset{\circ}{v}_k(\xi), \overset{\circ}{w}_k(\xi), \overset{\circ}{\psi}_{x_k}(\xi), \overset{\circ}{\varphi}_k(\xi), \overset{\circ}{\psi}_{z_k}(\xi)]^T e^{i\omega t} = \overset{\circ}{\delta}_k(\xi)\, e^{i\omega t}, \quad k = i, j \tag{2.4}$$

oraz macierz funkcji kształtu przez N, przemieszczenia dowolnego punktu osi sztywności elementu możemy przedstawić w formie

$$f = N\delta_e = N\overset{\circ}{\delta}_e e^{i\omega t} \tag{2.5}$$

Elementy macierzy funkcji kształtu $N(\xi)$ otrzymano wykorzystując liniową funkcję Lagrange'a [8]

$$L_i = 1-\xi, \qquad L_j = \xi \tag{2.6}$$

i dwie funkcje Hermite'a trzeciego stopnia

$$\begin{aligned} H_i &= 1-3\xi^2+2\xi^3, & H_j &= 3\xi^2-2\xi^3, \\ K_i &= (\xi-2\xi^2+\xi^3)\cdot l, & K_j &= (-\xi^2+\xi^3)\cdot l, \end{aligned} \tag{2.7}$$

W związku z tym możemy napisać

$$N = [N_i, N_j] \tag{2.8}$$

gdzie

$$N_k = \begin{bmatrix} H_k & 0 & 0 & 0 & 0 & K_k \\ 0 & L_k & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & H_k & K_k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & H'_k & K'_k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & L_k & 0 \\ H'_k & 0 & 0 & 0 & 0 & K'_k \end{bmatrix}, \quad k = i, j,$$

natomiast indeksem prim oznaczono pierwsze pochodne funkcji (2.7) względem zmiennej ξ.

Jeżeli znane są przemieszczenia elementu, to można wyznaczyć odkształcenia w dowolnym jego punkcie na podstawie zależności

$$\varepsilon(\xi, t) = Lf = LN\overset{\circ}{\delta}_e e^{i\omega t} = B\overset{\circ}{\delta}_e \cdot e^{i\omega t} \tag{2.9}$$

gdzie macierz operatorów $\boldsymbol{L}$ wynosi

$$\boldsymbol{L} = \begin{bmatrix} \frac{1}{l^2}\frac{\partial^2}{\partial\xi^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{l}\frac{\partial}{\partial\xi} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{l^2}\frac{\partial^2}{\partial\xi^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{l}\frac{\partial}{\partial\xi} & 0 \end{bmatrix}$$

Działając zgodnie z (2.9) operatorem $\boldsymbol{L}$ na macierz funkcji kształtu $\boldsymbol{N}$ otrzymano poszukiwaną macierz odkształceń elementu $\boldsymbol{B}$ w postaci

$$\boldsymbol{B} = [\boldsymbol{B}_i, \boldsymbol{B}_j], \tag{2.10}$$

gdzie

$$\boldsymbol{B}_k = \begin{bmatrix} H_k'' & 0 & 0 & 0 & 0 & K_k'' \\ 0 & L_k' & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & H_k'' & K_k'' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & L_k' & 0 \end{bmatrix}, \quad k = i, j$$

przy czym indeksem prim oraz bis oznaczono pierwsze i drugie pochodne funkcji (2.6) i (2.7) względem zmiennej ξ.

Wprowadzimy macierz sprężystości $\boldsymbol{D}$ o postaci

$$\boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} EI_z & 0 & 0 & 0 \\ 0 & EA & 0 & 0 \\ 0 & 0 & EI_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & GI_0 \end{bmatrix},$$

w której oznaczono: $A = A(\xi)$ — pole przekroju poprzecznego elementu, $I_x = I_x(\xi)$, $I_z = I_z(\xi)$, $I_0 = I_0(\xi)$ — geometryczne momenty bezwładności przekroju, odpowiednio względem osi x, z, y oraz E, G — stałe materiałowe. Macierz sztywności elementu zgodnie z powszechnie przyjętą formą zapisu wynosi

$$\boldsymbol{K}^e = l\int_0^1 \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}\boldsymbol{B}d\xi \tag{2.11}$$

W celu wyznaczenia macierzy mas elementu napiszemy wyrażenie na energię kinetyczną w następującej postaci

$$T = \frac{1}{2}l\int_0^1 [m(\dot{u}_{sm}^2+\dot{v}_{sm}^2+\dot{w}_{sm}^2)+I_{m_x}\dot{\psi}_x^2+I_{m_0}\dot{\varphi}^2+I_{m_z}\dot{\psi}_z^2]d\xi \tag{2.12}$$

gdzie oznaczono: $m = m(\xi)$ — masa elementu na jednostkę długości, $I_{m_x} = I_{m_x}(\xi)$, $I_{m_z} = I_{m_z}(\xi)$, $I_{m_0} = I_{m_0}(\xi)$ — masowe momenty bezwładności elementu na jednostkę długości, odpowiednio względem osi x, z, y. Natomiast kropkami oznaczono pochodne względem czasu przemieszczeń środków mas elementu względem środka sztywności, które na podstawie rys. 2b można zapisać jako

$$\begin{aligned} u_{sm}(\xi, t) &= u(\xi, t)+e_z(\xi)\varphi(\xi, t), \\ v_{sm}(\xi, t) &= v(\xi, t)-e_x(\xi)\psi_z(\xi, t), \\ w_{sm}(\xi, t) &= w(\xi, t)+e_x(\xi)\varphi(\xi, t), \end{aligned} \tag{2.13}$$

Po przedstawieniu (2.13) do (2.12) i niezbędnych przekształceniach, wyrażenie na energię kinetyczną elementu można zapisać w następującej macierzowej postaci

$$T = \frac{1}{2} l \int_0^1 \dot{f}^T I_m \dot{f} d\xi \tag{2.14}$$

gdzie $\dot{f}$ jest wektorem uogólnionych prędkości o postaci analogicznej do (2.1), zaś I_m jest macierzą określającą masowe i bezwładnościowe charakterystyki elementu

$$I_m = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 & 0 & me_z & 0 \\ 0 & m & 0 & 0 & 0 & -me_x \\ 0 & 0 & m & 0 & me_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{m_x} & 0 & 0 \\ me_z & 0 & me_x & 0 & I_{m_0}+m(e_x^2+e_y^2) & 0 \\ 0 & -me_x & 0 & 0 & 0 & I_{m_z}+me_x^2 \end{bmatrix} \tag{2.15}$$

Uzależniając prędkości w dowolnym punkcie elementu od przemieszczeń węzłów δ_e i odpowiednio dobranych funkcji kształtu N na podstawie zależności (2.5) można zapisać

$$\dot{f} = i\omega N\delta_e^\circ e^{i\omega t}, \tag{2.16}$$

a następnie po podstawieniu (2.16) do (2.14) otrzymamy

$$T = -\frac{1}{2}\omega^2 e^{i\omega t}(\delta_e^\circ)^T M_e \delta_e^\circ e^{i\omega t},$$

gdzie M_e jest poszukiwaną macierzą mas elementu

$$M_e = l\int_0^1 N^T I_m N d\xi, \tag{2.17}$$

3. Macierz mas nieodkształcalnej części samolotu (sztywnej bryły)

Wykorzystując postępowanie analogicznie do opisanego w p. 2 oraz uwzględniając następujące założenia:

1) środek masy sztywnej bryły jest jednocześnie węzłem elementu,
2) początek układu lokalnego jest umieszczony w węźle.

Macierz mas sztywnej bryły można otrzymać bezpośrednio z (2.15) przyjmując: $e_x = e_y = e_z = 0$; $m = m_B$ — masa sztywnej bryły; $I_{m_x} = I_{m_{xB}}$, $I_{m0} = I_{m_{yB}}$, $I_{m_z} = I_{m_{zB}}$ — masowe momenty bzwładności odpowiednio względem osi x, y, z.

4. Matematyczny model połączenia elementu odkształcalnego i sztywnego

Przyjęty model dyskretyzacji struktury na odkształcalne elementy i sztywne bryły stwarza konieczność opracowania matematycznego modelu połączenia węzła odkształcalnego elementu z węzłem sztywnej bryły, który z fizycznego punktu widzenia pokrywa się z jej środkiem masy. Model fizyczny omawianego połączenia można sprowadzić do połączenia typu sztywnego. Za takim potraktowaniem połączenia skrzydło — kadłub lub usterzenie — kadłub przemawia fakt, że te elementy łączone są za pośrednictwem siłowych elementów konstrukcyjnych płatowca (wzmocnione wręgi i żebra), których sztywność jest wielokrotnie większa od pozostałych elementów konstrukcji.

Jeżeli między węzłami m i n (rys. 1) istnieje sztywne sprzężenie to przemieszczenia węzła n spowodują przemieszczenia węzła m, co w zapisie macierzowym można wyrazić w następującej formie

$$\bar{\delta}_m = \vartheta \bar{\delta}_n \tag{4.1}$$

gdzie macierz ϑ przy założeniu niewielkich przemieszczeń (małych kątów obrotu) wynosi

$$\vartheta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & l_z & -l_y \\ 0 & 1 & 0 & -l_z & 0 & l_x \\ 0 & 0 & 1 & l_y & -l_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \tag{4.2}$$

a wprowadzone oznaczenia l_x, l_y, l_z są równe

$$l_x = \bar{x}_m - \bar{x}_n, \quad l_y = \bar{y}_m - \bar{y}_n, \quad l_z = \bar{z}_m - \bar{z}_n,$$

Tak więc w układzie o M węzłach, w którym przemieszczenia M-N węzłów są związane z przemieszczeniami węzłów sąsiednich zależnością (4.1), przemieszczenia $\bar{\delta}$ możemy wyrazić przez N niezależnych przemieszczeń $\bar{\delta}'$ jako [1]

$$\bar{\delta}_{M\times 1} = \Theta_{M\times N} \bar{\delta}'_{N\times 1}, \tag{4.3}$$

gdzie Θ — macierz koincydencji układu, mająca budowę prostokątnej macierzy pasmowej o elementach składających się z macierzy jednostkowych w przypadkach gdy $\bar{\delta}_m = \bar{\delta}_n$ lub macierzy w przypadku spełnienia relacji (4.1).

Wykorzystując (4.3) na etapie formułowania podstawowego równania równowagi metody elementów skończonych macierze sztywności i mas wynoszą

$$\begin{aligned} \bar{K}' &= \Theta^{\mathrm{T}} \bar{K} \Theta, \\ \bar{M}' &= \Theta^{\mathrm{T}} \bar{M} \Theta, \end{aligned} \tag{4.4}$$

Przytoczone postępowanie, zwane zwężaniem obiektu, pozwala za pomocą równań (4.4) dokonać sprzężenia między elementami sztywnym i odkształcalnymi rozpatrywanej struktury.

5. Końcowy układ równań

Postępując w sposób analogiczny do omówionego w p. 2-3 w odniesieniu do wszystkich elementów rozpatrywanego układu i wykorzystując zasadę transformacji elementu belkowego opisaną w pracy [8] oraz ogólnie przyjęty proces agregacji, a następnie proces zwężania obiektu zgodnie z p. 4 (równanie 4.4) ostatecznie otrzymamy

$$(\bar{K}'-\omega^2\bar{M}')\bar{\delta}^0 = 0, \tag{5.1}$$

Zerowanie się wyznacznika charakterystycznego układu równań

$$\det(\bar{K}'-\omega^2\bar{M}') = 0 \tag{5.2}$$

daje poszukiwane wartości częstości drgań własnych, a odpowiadające im wektory własne reprezentują postacie tych drgań.

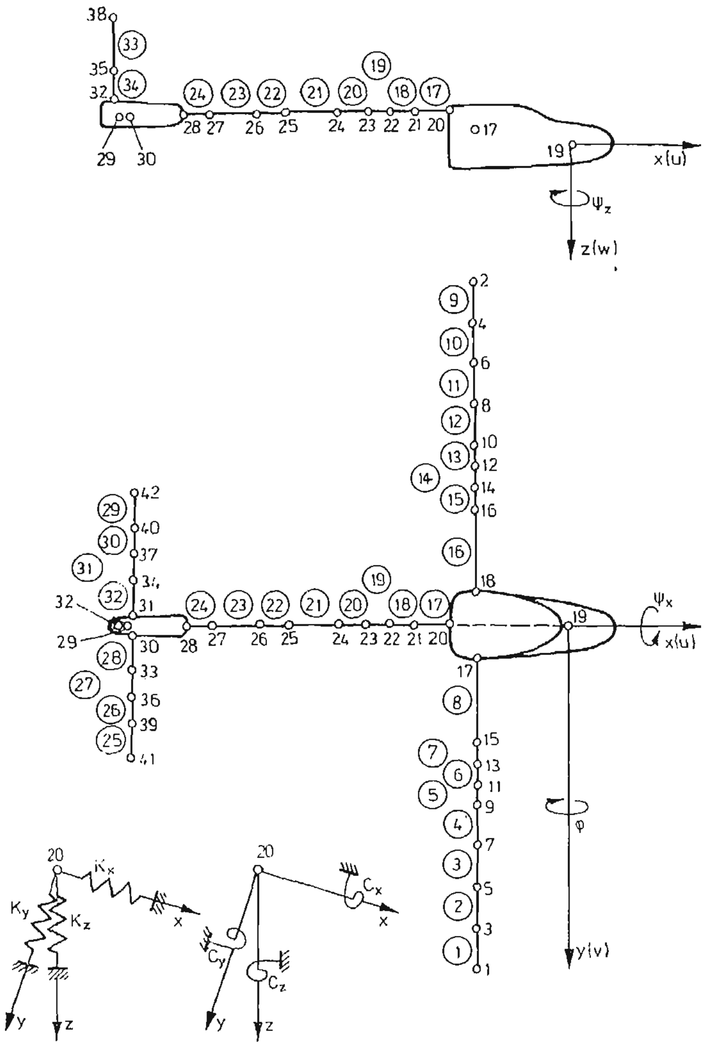
6. Analiza numeryczna

Opracowano algorytm numerycznych obliczeń, zredagowano program DSP1 w języku FORTRAN na EMC ODRA 1305. Sprawdzono poprawność działania programu oraz zbieżność opracowanej metody. Obliczenia testujące prowadzono na przykładzie hipotetycznego samolotu (stałe rozkłady mas i sztywności wzdłuż długości odkształcalnych zespołów), otrzymane wyniki porównywano z wynikami zamieszczonymi w pracach [4]÷[6].

Tabela 1

	k	CZĘSTOŚĆ [Hz] Θ_1	Θ_2	Θ_3	Symetryczna postać	Niesymetr. postać
Częstości drgań podpór sprężystych	1	0,01702	0,053826	0,17011		*
	2	0,02238	0,070783	0,22373	*	
	3	0,025627	0,081086	0,25631	*	
	4	0,026936	0,085223	0,26940	*	
	5	0,031354	0,099253	0,31376		*
	6	0,037490	0,118460	0,37440		*
Częstości drgań odkształcalnych zespołów	7	7,553	7,555	7,559	*	
	8	11,265	11,268	11,270		*
	9	12,771	12,773	12,775	*	
	10	15,005	15,005	15,005		*
	11	17,863	17,863	17,863		*
	12	19,211	19,211	19,211	*	
	13	19,833	19,833	19,833		*
	14	20,834	20,834	20,834		*
	15	21,499	21,499	21,499	*	

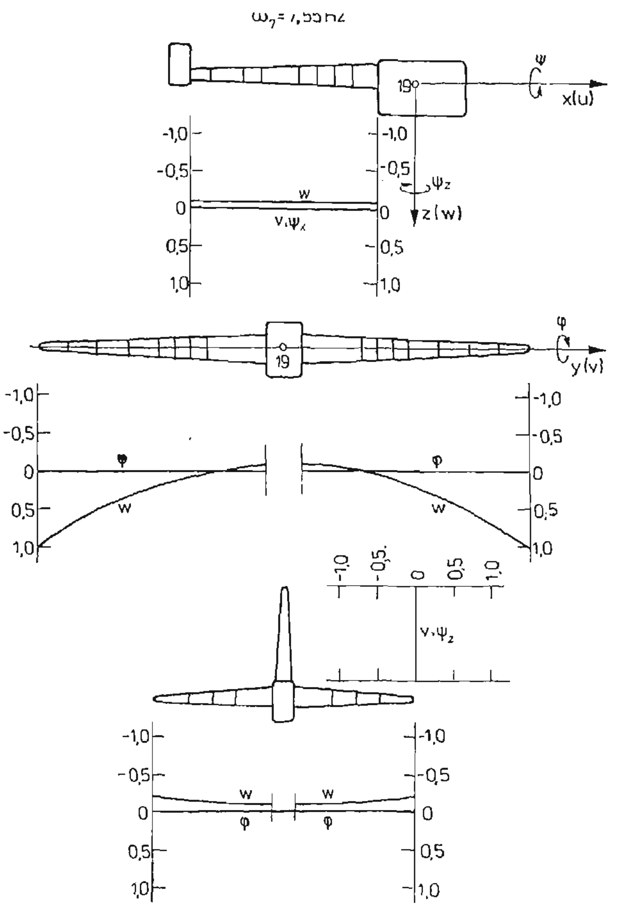
Przyjęto do obliczeń: $\Theta = \Theta(k_x, k_y, k_z, c_x, c_y, c_z)$; $\Theta_2 = \Theta_1 \cdot 10$; $\Theta_3 = \Theta_1 \cdot 100$



Rys. 3

Analizie numerycznej poddano samolot szkolno-bojowy z napędem odrzutowym. Wartości parametrów masowych i sztywnościowych przyjęto analogicznie jak w pracach [4]÷[6].

Odkształcalne zespoły samolotu podzielono na 34 elementy (rys. 3) o różnej długości, zależnie od rozkładów masy i sztywności. Całą konstrukcję podparto w węźle 20 — w pobliżu środka masy samolotu. Podparcie zamodelowano sześcioma sprężynami, trzema k_x, k_y, k_z — pracującymi na zginanie i trzema c_x, c_y, c_z — pracującymi na skręcanie| Przez realizację takiego podparcia w sposób „naturalny" spełniono warunek brzegowy. Wpływ sztywności sprężyn na częstości drgań zespołów samolotu przedstawiono w tabeli 1. Z otrzymanych rezultatów widać, że zmiana sztywności podparcia ma jedynie wpływ na częstości drgań masy przedniej części samolotu, natomiast wpływ na częstości drgań



Rys. 4

zespołów odkształcalnych jest nieznaczny. Takie zachowanie konstrukcji zostało zapewnione przez dobranie odpowiednich sztywności podpór. W praktyce wymaganie to jest traktowane jako warunek minimum użyteczności stanowiska na którym prowadzone są badania rezonansowe samolotu.

Na rys. 4÷6 przedstawiono wyniki obliczeń częstości ω_7, ω_9, ω_{15} i odpowiadających im postaci (pierwsze sześć częstości odpowiada drganiom masy przedniej części samolotu). Wykresy przedstawiają przebiegi linii ugięcia i skręcenia odkształcalnych zespołów samolotu.

W wyniku przeprowadzonych obliczeń można stwierdzić, że:

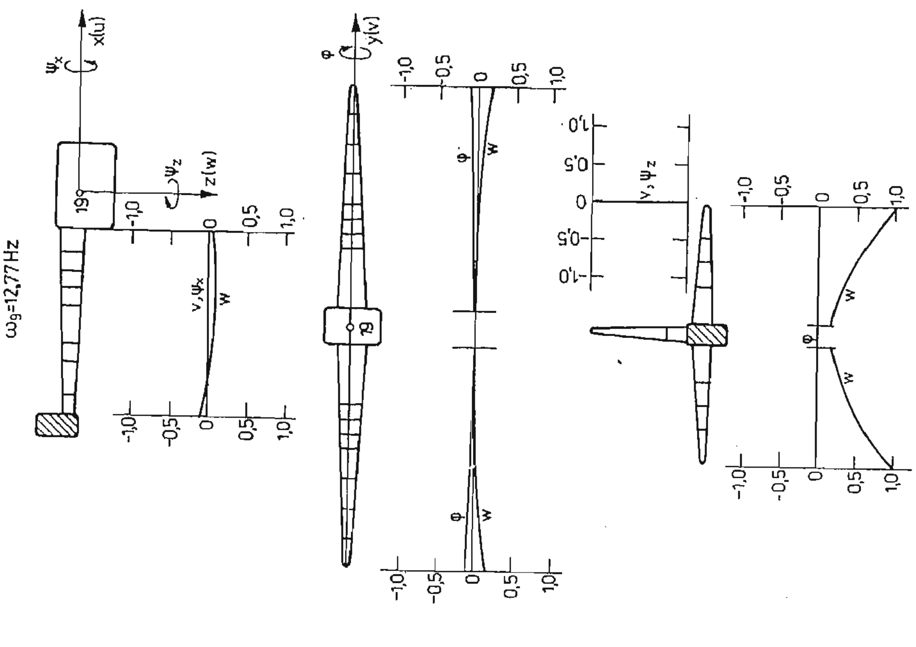
$\omega_1 \div \omega_6$ — częstości drgań masy przedniej części samolotu;

ω_7 — jest pierwszą częstością drgań giętnych skrzydła w ruchu symetrycznym;

ω_9 — jest pierwszą częstością drgań giętnych usterzenia wysokości w ruchu symetrycznym;

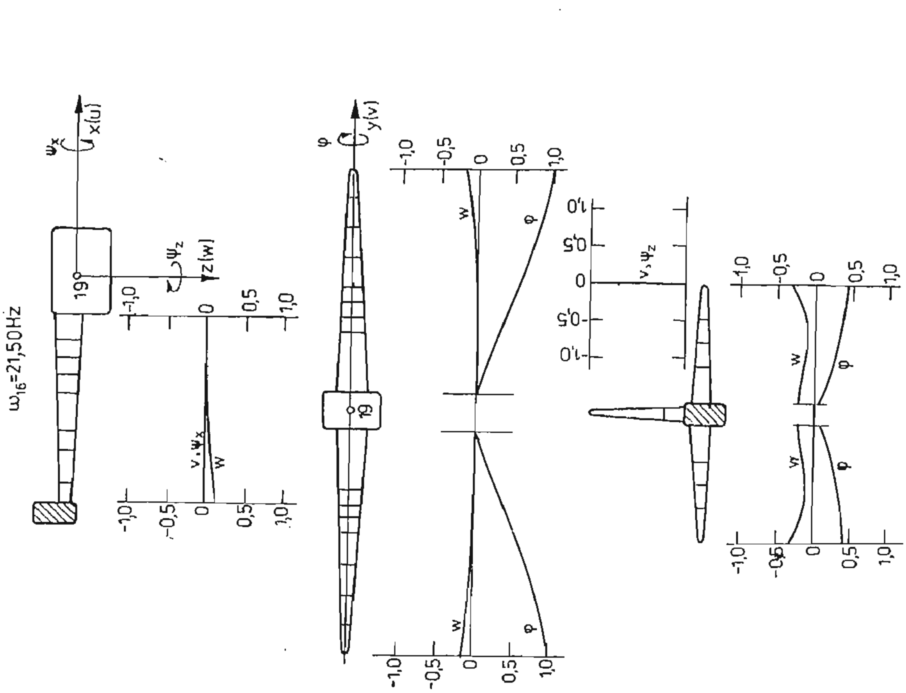
ω_{15} — jest pierwszą częstością drgań skrętnych skrzydła w ruchu symetrycznym.

Zaproponowana metoda jest bardzo skutecznym narzędziem obliczania częstości



ω9=12,77Hz
ψx
x(u)
ψz
z(w)
v, ψx
w
φ
y(v)
v, ψz

Rys. 5



ω16=21,50Hz
ψx
x(u)
ψz
z(w)
v, ψx
w
φ
y(v)
v, ψz

Rys. 6

i postaci drgań samolotu ze skrzydłami o dużym wydłużeniu. Wyniki obliczeń na EMC realizowane są szybko i dokładnie. Przedstawionym programem, stosując jednowymiarową dyskretyzację, można prowadzić obliczenia dowolnie przestrzennie rozgałęzionych konstrukcji samolotów.

Literatura

1. Z. DŻYGADŁO, I. NOWOTARSKI, *Statyczne obliczenia wirujących układów powłokowo-płytowych metodą elementów skończonych.* Biul. WAT, XXX, 4, 1981.
2. Z. DŻYGADŁO, *Dynamiczny model wirującej niejednorodnej tarczy turbiny gazowej do analizy giętnych drgań za pomocą elementów skończonych.* Biul. WAT, XXVI, 3, 1977.
3. Z. DŻYGADŁO, A. OLEJNIK, *Zastosowanie metody elementów skończonych do analizy samowzbudnych i wymuszonych drgań wieloprzęsłowej powłoki cylindrycznej w opływie naddźwiękowym.* Biul. WAT, XXVIII, 7, 1979.
4. J. BŁASZCZYK, Z. DŻYGADŁO, *Dynamiczny model odkształcalnego samolotu do badania drgań własnych metodą elementów skończonych.* Biul. WAT, XXVI, 4, 1977.
5. Z. DŻYGADŁO, J. BŁASZCZYK, *Analiza podłużnych drgań własnych odkształcalnego samolotu metodą elementów skończonych.* Biul. WAT, XXVII, 7, 1978.
6. Z. DŻYGADŁO, J. BŁASZCZYK, *Numeryczna analiza sprzężonych podłużno-bocznych drgań własnych niesymatrycznego samolotu.* Biul. WAT XXXI, 3, 1982.
7. J. BŁASZCZYK, *Analiza podłużnych drgań własnych odkształcalnego samolotu z zewnętrznymi podwieszeniami metodą elementów skończonych.* Biul. WAT, XXXI, 5, 1983.
8. J. SZMELTER i in., *Programy metody elementów skończonych.* Arkady, Warszawa 1973.

Резюме

ПРИМЕНЕНИЕ ДИСКРЕТНОЙ МОДЕЛИ ДЕФОРМИРУЕМОГО САМОЛЕТА ДЛЯ АНАЛИЗА СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ

Представлен метод анализа частот и вида собственных колебаний упругого самолета. Способ анализа является обобщением методики разработанной в предыдущих работах [4 - 7] и опирается на применении одномерной дискретизации деформируемых конструкционных агрегатов при помощи метода конечных элементов в перемещениях.

Разработана динамическая модель телобалкового типа, для которой выведены уравнения динамического равновесия диформируемых и жестких частей самолета, а также приведены условия сопрягающие эти уравнения.

Разработана программа на языке ФОРТРАН IV для расчетов на машине Одра 1305.

Расчеты проведены для гипотетического самолета с постоянным распределением параметров вдоль длины деформируемых частей, а также при использовании данных учебного самолета с реактивным приводом.

На основе полученных результатов можно констатировать, что предлагаемый метод является эффективным инструментом расчета частот и видов собственных колебаний самолета.

Summary

APPLICATION OF A DISCRETE MODEL OF A DEFORMABLE AEROPLANE FOR NATURAL VIBRATION ANALYSIS

In this paper a method of numerical analysis of frequencies and modes of natural vibrations of a deformable aeroplane is presented. The method constitutes a generalization of that employed in Refs. [4 - 7].

A one — dimensional discretisation of deformable structural units is applied by making use of the displacement finite element technique.

A dynamic model composed of deformable beams and rigid bodies has been proposed. The equations of dynamic equilibrium for deformable and rigid parts of the aeroplane have been derived together with the conditions of the coupling between those equations.

The program is prepared in the FORTRAN IV language for calculations on the ODRA 1305 computer.

The calculations were performed for a hypothetical aircraft with constant distributions of parameters over the length of deformable units, and by using the data of a training jet — aircraft.

Making use of the results obtained it can be stated that the method suggested constitutes an effective instrument for calculating frequencies and forms of the aircraft natural vibrations.

Praca została złożona w Redakcji dnia 12 lutego 1985 roku.