

OBLICZANIE PŁYT MIKROMORFICZNYCH

SYLWESTER KONIECZNY

Politechnika Łódzka

1. Wstęp

Równania różniczkowe dla teorii Kirchhoffa płyt obciążonych mikrookresowym obciążeniem skupionym lub ciągłym można otrzymać wykorzystując aparat analizy niestandardowej [1], [2], [3]. Skończone deformacje wywołane tym obciążeniem są aproksymowane pewną klasą mikrodeformacji, które z kolei zależą od znanych funkcji mikrookresowych.

Przemieszczenia punktów materialnych w płycie są określane następującą funkcją [2]

$$w(x^1, x^2) = w_0(x^1, x^2) + w_a(x^1, x^2)h^a(x^1, x^2).$$

Funkcje $h^a(x^1, x^2)$ są a priori danymi funkcjami okresowymi spełniającymi warunek

$$\int_{A(x^1, x^2)} h^a(x^1, x^2) da = 0,$$

gdzie $A(x^1, x^2)$ jest obszarem odpowiadającym powtarzającemu się obciążeniu. Nieznane funkcje; w_0, w_a opisują kolejno makrodeformację i tak zwaną mikrodeformację. Postulowane a priori funkcje $h^a(x^1, x^2)$ opisują okresowy charakter mikrodeformacji.

Celem pracy jest podanie podstawowych równań dla płyt mikromorficznych i przeanalizowanie kilku rozwiązań pasm płytowych obciążonych obciążeniem okresowym.

W pracy obowiązuje konwencja sumacyjna, wskaźniki greckie przebiegają ciąg 1, 2, łacińskie 1, 2 ..., n .

2. Podstawowe równania we współrzędnych prostokątnych

Sparametryzujemy płaszczyznę środkową Ω płyty prostokątnym układem współrzędnych x^a . Oś prostopadłą do płaszczyzny Ω oznaczmy przez z . Pod działaniem obciążeń punkty materialne przemieszczają się tylko w kierunku osi z , przy czym przemieszczenia te są niewielkie w porównaniu z wysokością płyty i należą do przestrzeni $C_2(\Omega)$. Niech n_α, t_α będą składowymi wektorów jednostkowych kolejno normalnego i stycznego do brzegu $\partial\Omega$.

Podstawowy układ równań dla płyt mikromorficznych otrzymamy wykorzystując postać wariacyjną [2]

$$\begin{aligned} \oint_{\partial\Omega} (\tilde{q}v_0 + \tilde{r}v_{0,n}) ds + \int_{\Omega} \tilde{p}v_0 da &= \int_{\Omega} \tilde{m}^{\alpha\beta} v_{0,\alpha\beta} da, \\ \oint_{\partial\Omega} (q_a v_a + r^a v_{a,n} + r_n^a v_a) ds + \int_{\Omega} p^a v_a da &= \\ &= \int_{\Omega} (m^a v_a + m^{\alpha\alpha} v_{a,\alpha} + m^{\alpha\beta} v_{a,\alpha\beta}) da. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Równania (2.1) winny być spełnione dla każdego $v_0, v_a \in C_2(\Omega)$. Wielkości $\tilde{q}, \tilde{r}, \tilde{p}, q^a, r^a, r_n^a, p^a$ w (2.1) są zdefiniowane następująco:

$$\begin{aligned} \tilde{q}(x) &\simeq \langle q \rangle_{L(x)}, \\ q^a(x) &\simeq \langle qh^a \rangle_{L(x)}, \\ r_n^a(x) &\simeq \langle rh_{n}^a \rangle_{L(x)}, \\ p^a(x) &\simeq \langle ph^a \rangle_{A(x)}, \\ \tilde{r}(x) &\simeq \langle r \rangle_{L(x)}, \\ r^a(x) &\simeq \langle rh^a \rangle_{L(x)}, \\ \tilde{p}(x) &\simeq \langle p \rangle_{A(x)}, \\ (x) &\equiv (x^1, x^2). \end{aligned} \quad (2.2)$$

Natomiast równania konstytutywne mają postać [2]

$$\begin{bmatrix} \tilde{m}^{\alpha\beta} \\ m^{\alpha\alpha\beta} \\ m^{\alpha\alpha} \\ m^a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle D^{\alpha\beta\mu\nu} \rangle & \langle D^{\alpha\beta\mu\nu} h^b \rangle & 2 \langle D^{\alpha\beta\mu\nu} h_{,\mu}^b \rangle & \langle D^{\beta\mu\nu} h_{,\mu\nu}^b \rangle \\ \langle D^{\alpha\beta\mu\nu} h^a \rangle & \langle D^{\alpha\beta\mu\nu} h^a h^b \rangle & 2 \langle D^{\alpha\beta\mu\nu} h^a h_{,\mu}^b \rangle & \langle D^{\alpha\beta\mu\nu} h^a h_{,\mu\nu}^b \rangle \\ 2 \langle D^{\alpha\beta\mu\nu} h_{,\beta}^a \rangle & 2 \langle D^{\alpha\beta\mu\nu} h_{,\beta}^a h^b \rangle & 4 \langle D^{\alpha\beta\mu\nu} h_{,\beta}^a h_{,\mu}^b \rangle & 2 \langle D^{\alpha\beta\mu\nu} h_{,\beta}^a h_{,\mu\nu}^b \rangle \\ \langle D^{\alpha\beta\mu\nu} h_{,\alpha\beta}^a \rangle & \langle D^{\alpha\beta\mu\nu} h_{,\alpha\beta}^a h^b \rangle & 2 \langle D^{\alpha\beta\mu\nu} h_{,\alpha\beta}^a h_{,\mu}^b \rangle & \langle D^{\alpha\beta\mu\nu} h_{,\alpha\beta}^a h_{,\mu\nu}^b \rangle \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_{0,\mu\nu} \\ W_{b,\mu\nu} \\ W_{b,\nu} \\ W_b \end{bmatrix}. \quad (2.3)$$

We wzorach (2.2) i (2.3) nawiasem $\langle \cdot \rangle$ oznaczono [2]

$$\begin{aligned} \langle \cdot \rangle_{A(x)} &\equiv \frac{1}{\text{powierzchnię } A(x)} \int_{A(x)} (\cdot) da, \\ \langle \cdot \rangle_{L(x)} &\equiv \frac{1}{\text{długość } L(x)} \int_{L(x)} (\cdot) ds. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Podstawowy układ równań otrzymamy podstawiając prawe strony wzorów (2.3) do (2.1). Tym samym

$$\begin{aligned} \langle D^{\alpha\beta\mu\nu} \rangle W_{0,\mu\nu\alpha\beta} + \langle D^{\alpha\beta\mu\nu} h^b \rangle W_{b,\mu\nu\alpha\beta} + 2 \langle D^{\alpha\beta\mu\nu} h_{,\mu}^b \rangle W_{b,\nu\alpha\beta} + \langle D^{\alpha\beta\mu\nu} h_{,\mu\nu}^b \rangle W_{b,\alpha\beta} - \tilde{p} &= 0, \\ \langle D^{\alpha\beta\mu\nu} h^a \rangle W_{0,\mu\nu\alpha\beta} + \langle D^{\alpha\beta\mu\nu} h^a h^b \rangle W_{b,\mu\nu\alpha\beta} - 2 \langle D^{\alpha\beta\mu\nu} h_{,\beta}^a \rangle W_{0,\mu\nu\alpha} - 2 \langle D^{\alpha\beta\mu\nu} h_{,\beta}^a h^b \rangle W_{b,\mu\nu\alpha} + \\ + 2 \langle D^{\alpha\beta\mu\nu} h^a h_{,\mu}^b \rangle W_{b,\nu\alpha\beta} + \langle D^{\alpha\beta\mu\nu} h_{,\alpha\beta}^a \rangle W_{0,\mu\nu} + \langle D^{\alpha\beta\mu\nu} h_{,\alpha\beta}^a h^b \rangle W_{b,\mu\nu} + \\ - 4 \langle D^{\alpha\beta\mu\nu} h_{,\beta}^a h_{,\mu}^b \rangle W_{b,\nu\alpha} + \langle D^{\alpha\beta\mu\nu} h^a h_{,\mu\nu}^b \rangle W_{b,\alpha\beta} + 2 \langle D^{\alpha\beta\mu\nu} h_{,\alpha\beta}^a h_{,\mu}^b \rangle W_{b,\nu} + \\ - 2 \langle D^{\alpha\beta\mu\nu} h_{,\beta}^a h_{,\mu\nu}^b \rangle W_{b,\alpha} + \langle D^{\alpha\beta\mu\nu} h_{,\alpha\beta}^a h_{,\mu\nu}^b \rangle W_b - p^a &= 0. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Powyższe równania zachodzą w każdym prostokątnym układzie współrzędnych kartezjańskich i są spełnione dla każdego a . Funkcje \tilde{p} , p^a są znanymi siłami zewnętrznymi obciążającymi płytę oraz $D^{\alpha\beta\mu\nu}$ są znanymi składowymi tensora sztywności sprężystej. Pozostałe funkcje występujące w (2.5) są poszukiwanymi niewiadomymi. Funkcje te w obszarze Ω powinny spełniać równania (2.5) a na brzegu $\partial\Omega$ obszaru Ω powinny spełniać odpowiednie warunki brzegowe. Warunki brzegowe zależą od sposobu podparcia lub obciążenia brzegów płyty. Trzy sposoby podparcia brzegów płyty omówimy poniżej.

1. Brzeg płyty sztywno utwierdzony, gdy warunki brzegowe mają postać

$$\begin{aligned} w_0 &= w_b = 0, \\ w_{0,\alpha} &= w_{b,\alpha} = 0. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Na brzegu $\partial\Omega$ znikają przemieszczenia i obroty płyty.

2. Na brzegu swobodnie podpartym są spełnione następujące warunki:

$$w_0 = w_b = 0,$$

$$\begin{aligned} (\langle D^{\alpha\beta\mu\nu} \rangle w_{0,\mu\nu} + \langle D^{\alpha\beta\mu\nu} h^b \rangle w_{b,\mu\nu} + 2 \langle D^{\alpha\beta\mu\nu} h_{,\mu}^b \rangle w_{b,\nu} + \langle D^{\alpha\beta\mu\nu} h_{,\mu\nu}^b \rangle w_b) n_\alpha n_\beta &= 0, \\ (\langle D^{\alpha\beta\mu\nu} h^a \rangle w_{0,\mu\nu} + \langle D^{\alpha\beta\mu\nu} h^a h^b \rangle w_{b,\mu\nu} + 2 \langle D^{\alpha\beta\mu\nu} h^a h_{,\mu}^b \rangle w_{b,\nu} + \langle D^{\alpha\beta\mu\nu} h^a h_{,\mu\nu}^b \rangle w_b) n_\alpha n_\beta &= 0. \end{aligned} \quad (2.7)$$

3. Jeżeli brzeg płyty jest swobodny (nie podparty) to warunki brzegowe mają postać:

$$\begin{aligned} (\langle D^{\alpha\beta\mu\nu} \rangle w_{0,\mu\nu\alpha} + \langle D^{\alpha\beta\mu\nu} h^b \rangle w_{b,\mu\nu\alpha} + 2 \langle D^{\alpha\beta\mu\nu} h_{,\mu}^b \rangle w_{b,\nu\alpha} + \langle D^{\alpha\beta\mu\nu} h_{,\mu\nu}^b \rangle w_{b,\alpha}) n_\beta + \\ - (\langle D^{\alpha\beta\mu\nu} \rangle w_{0,\mu\nu} n_\alpha n_\gamma \varepsilon_{\beta\gamma}^\gamma)_{,\tau} - (\langle D^{\alpha\beta\mu\nu} h^b \rangle w_{b,\mu\nu} n_\alpha n_\gamma \varepsilon_{\beta\gamma}^\gamma)_{,\tau} + \\ - (2 \langle D^{\alpha\beta\mu\nu} h_{,\mu}^b \rangle w_{b,\nu} n_\alpha n_\gamma \varepsilon_{\beta\gamma}^\gamma)_{,\tau} - (\langle D^{\alpha\beta\mu\nu} h_{,\mu\nu}^b \rangle w_b n_\alpha n_\gamma \varepsilon_{\beta\gamma}^\gamma)_{,\tau} + \tilde{q} = 0, \\ 2 \langle D^{\alpha\beta\mu\nu} h_{,\beta}^a \rangle w_{0,\mu\nu} + 2 \langle D^{\alpha\beta\mu\nu} h_{,\beta}^a h^b \rangle w_{b,\mu\nu} + 4 \langle D^{\alpha\beta\mu\nu} h_{,\beta}^a h_{,\mu}^b \rangle w_{b,\nu} + \\ + 2 \langle D^{\alpha\beta\mu\nu} h_{,\beta}^a h_{,\mu\nu}^b \rangle w_b n_\alpha - (\langle D^{\alpha\beta\mu\nu} h^a \rangle w_{0,\mu\nu\alpha} + \langle D^{\alpha\beta\mu\nu} h^a h^b \rangle w_{b,\mu\nu\alpha} + \\ + 2 \langle D^{\alpha\beta\mu\nu} h^a h_{,\mu}^b \rangle w_{b,\nu\alpha} + \langle D^{\alpha\beta\mu\nu} h^a h_{,\mu\nu}^b \rangle w_{b,\alpha}) n_\beta + (\langle D^{\alpha\beta\mu\nu} h^a \rangle w_{0,\mu\nu} n_\alpha n_\gamma \varepsilon_{\beta\gamma}^\gamma)_{,\tau} + \\ + (\langle D^{\alpha\beta\mu\nu} h^a h^b \rangle w_{b,\mu\nu} n_\alpha n_\gamma \varepsilon_{\beta\gamma}^\gamma)_{,\tau} + (2 \langle D^{\alpha\beta\mu\nu} h^a h_{,\mu}^b \rangle w_{b,\nu} n_\alpha n_\gamma \varepsilon_{\beta\gamma}^\gamma)_{,\tau} - q^n - r_n^a = 0 \end{aligned} \quad (2.8)$$

Dla brzegu nieobciążonego zachodzi $\tilde{q} = 0$, $q^n = 0$, $r_n^a = 0$. Ponadto na brzegu swobodnym winny być spełnione warunki (2.7).

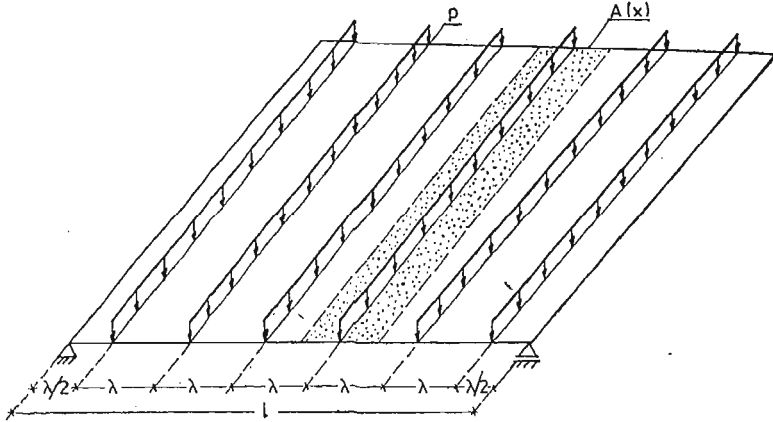
Rozwiązanie zagadnienia brzegowego teorii płyt mikromorficznych polega na wyznaczeniu funkcji w_0 i w_b spełniających w obszarze Ω równania (2.5) a na poszczególnych częściach brzegu $\partial\Omega$ tego obszaru spełniających warunki jednej z postaci (2.6) - (2.8).

3. Pasma jednokierunkowo obciążone

W wielu zagadnieniach spotykanych w praktyce mamy do czynienia z prostokątnymi płytami w których jedna para przeciwległych brzegów ma długość wielokrotnie większą od drugiej pary. Załóżmy, że sposób podparcia każdego z dłuższych brzegów płyty jest na całej jego długości taki sam (dopuszczamy możliwość, że przeciwległy brzeg może mieć inne podparcie). Obliczenia statyczne mikromorficznych płyt prostokątnych o takim kształcie i sposobie podparcia można wtedy zastąpić w przybliżeniu obliczaniem tzw. pasm płytowych.

Niech rozważane pasmo płytowe będzie obciążone obciążeniem p okresowym o długości okresu λ , rys. 1. Szerokość pasma przyjęto l , a okres powtarzającego się obciążenia $\lambda = l/6$. Funkcje okresowe $h^a(x^1)$ przyjęto w postaci

$$h^a(x^1) = \cos\left(\frac{2\pi a}{\lambda} x^1\right), \quad a = 1, 2, \dots, n \quad (3.1)$$



Rys. 1.

Wykorzystując fakt, że wszystkie poszukiwane funkcje są funkcjami tylko jednej zmiennej, równania (2.5) będą miały postać

$$\begin{aligned} \langle D^{1111} \rangle w_{0,1111} + \langle D^{1111} h^b \rangle w_{b,1111} + 2 \langle D^{1111} h_{,1}^b \rangle w_{b,111} + \langle D^{1111} h_{,11}^b \rangle w_{b,11} - \tilde{p} &= 0, \\ \langle D^{1111} h^a \rangle w_{0,1111} + \langle D^{1111} h^a h^b \rangle w_{b,1111} - 2 \langle D^{1111} h_{,1}^a \rangle w_{0,111} + (2 \langle D^{1111} h^a h_{,1}^b \rangle + \\ - 2 \langle D^{1111} h_{,1}^a h_{,1}^b \rangle) w_{b,111} + \langle D^{1111} h_{,11}^a \rangle w_{0,11} + (\langle D^{1111} h_{,11}^a h^b \rangle + \\ - 4 \langle D^{1111} h_{,1}^a h_{,1}^b \rangle + \langle D^{1111} h^a h_{,11}^b \rangle) w_{b,11} + (2 \langle D^{1111} h_{,11}^a h_{,11}^b \rangle + \\ - 2 \langle D^{1111} h_{,11}^a h_{,11}^b \rangle) w_{b,11} + \langle D^{1111} h_{,11}^a h_{,11}^b \rangle w_{b,11} - p^a &= 0. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Obciążenia \tilde{p} , p^a i składowe tensora sprężystości $D^{\alpha\beta\mu\nu}$ zgodnie z wzorem (2.4) wynoszą

$$\begin{aligned} \tilde{p} = \langle p \rangle &= \frac{1}{\lambda} \int_0^\lambda \delta\left(x^1 - \frac{\lambda}{2}\right) p dx^1 = \frac{p}{\lambda}, \\ p^a = \langle p h^a \rangle &= \frac{1}{\lambda} \int_0^\lambda \delta\left(x^1 - \frac{\lambda}{2}\right) p \cos\left(\frac{2\pi a}{\lambda} x^1\right) dx^1 = \frac{(-1)^a p}{\lambda}, \\ \langle D^{1111} \rangle &= D^{1111}, \\ \langle D^{1111} h^a h^b \rangle &= \begin{cases} \frac{1}{2} D^{1111} & \text{dla } a = b \\ 0 & \text{dla } a \neq b, \end{cases} \\ \langle D^{1111} h^a h_{,11}^b \rangle &= \begin{cases} \frac{-2a^2 \pi^2}{\lambda^2} D^{1111} & \text{dla } a = b \\ 0 & \text{dla } a \neq b, \end{cases} \end{aligned} \quad (3.3)$$

$$\langle D^{1111} h_{,1}^a h_{,1}^b \rangle = \begin{cases} \frac{2a^2 \pi^2}{\lambda^2} D^{1111} & \text{dla } a = b \\ 0 & \text{dla } a \neq b, \end{cases}$$

$$\langle D^{1111} h_{,11}^a h^b \rangle = \langle D^{1111} h^a h_{,11}^b \rangle,$$

$$\langle D^{1111} h_{,11}^a h_{,11}^b \rangle = \begin{cases} \frac{8a^4 \pi^4}{\lambda^4} D^{1111} & \text{dla } a = b \\ 0 & \text{dla } a \neq b. \end{cases}$$

Pozostałe składowe są równe zeru. Składowa $D^{1111} = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \equiv D$ (materiał pasma jest izotropowy).

Podstawiając wyrażenia (3.3) do równania (3.1), otrzymamy

$$Dw_{0,1111} = \frac{p}{\lambda}$$

$$w_{a,1111} - \frac{24a^2 \pi^2}{\lambda^2} w_{a,11} + \frac{16a^4 \pi^4}{\lambda^4} w_a = \frac{(-1)^a 2p}{\lambda D} \quad (3.4)$$

Całki ogólne równań (3.4) mają postać ($x^1 \equiv x$)

$$w_0 = \frac{p}{24\lambda D} x^4 + C_1 \frac{x^3}{6} + C_2 \frac{x^2}{2} + C_3 x + c_4,$$

$$w_a = A_1 \sinh r_1 x + A_2 \cosh r_1 x + A_3 \sinh r_2 x + A_4 \cosh r_2 x + \frac{(-1)^a \lambda p}{8a^4 \pi^4 D}. \quad (3.5)$$

gdzie oznaczono:

$$r_1 = 2 \sqrt{3-2\sqrt{2}} \cdot \frac{a\pi}{\lambda},$$

$$r_2 = 2 \sqrt{3+2\sqrt{2}} \cdot \frac{a\pi}{\lambda}, \quad (3.6)$$

Przyjmijmy, że brzegi pasma płytowego są swobodnie podparte o warunkach brzegowych (2.7)

$$\begin{aligned} w_0(0) &= w(l) = 0, \\ w_a(0) &= w_a(l) = 0, \\ w_{0,11}(0) &= w_{0,11}(l) = 0, \\ w_{a,11}(0) &= w_{a,11}(l) = 0. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Po obliczeniu stałych, (3.5) zapiszemy w postaci:

$$w_0(x) = \frac{p}{24\lambda D} (x^4 - 2lx^3 + l^3x),$$

$$w_a(x) = \left[\frac{-3 - 2\sqrt{2} + (6\sqrt{2} - 3) \cosh r_1 l}{2\sqrt{2} \sinh r_1 l} \sinh r_1 x + \right.$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{3-6\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} \cosh r_1 x + \frac{3-2\sqrt{2} + (3-2\sqrt{2}) \cosh r_2 l}{2\sqrt{2} \sinh r_2 l} \sinh r_2 x + \\
 & + \frac{2\sqrt{2}-3}{2\sqrt{2}} \cosh r_2 x + 2 \left] \cdot \frac{(-1)^a p \lambda^3}{16\pi^4 a^4 D}.
 \end{aligned} \quad (3.8)$$

Rzędne $w_a(x)$ obliczone z (3.8) są bardzo małe. Dla $r_1 l \geq 5$ $w_a(x)$ można zapisać w postaci

$$w_a(x) \simeq \frac{(-1)^a p \lambda^3}{8\pi^4 a^4 D}. \quad (3.9)$$

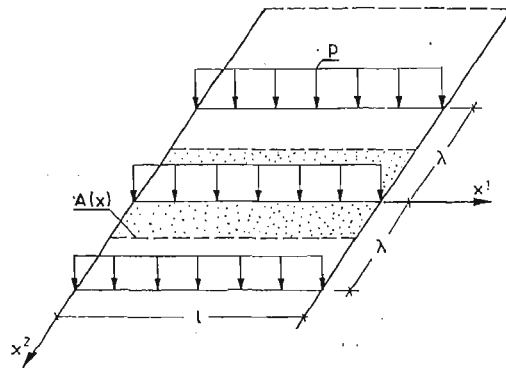
Przemieszczenie pionowe dowolnego punktu rozważanego pasma ma postać

$$w(x) = \frac{p}{24\lambda D} (x^4 - 2l^3 + l^3 x) + \sum_{a=1}^n \frac{(-1)^a p \lambda^3}{8\pi^4 a^4 D} \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} ax\right), \quad (3.10)$$

a maksymalne przemieszczenie dla $x = \frac{l}{2}$ wynosi

$$w_{max} = \frac{5pl^4}{384\lambda D} \left[1 + \sum_{a=1}^n \frac{0,0985}{a^4} \left(\frac{\lambda}{l}\right)^4 \right]. \quad (3.11)$$

Z rozwiązania (3.9) wynika wniosek, że pasma płytowe obciążone mikrookresowym obciążeniem jak na rys. 1. można rozwiązywać obciążając je równomiernie o intensywności p/λ . Błąd w ugięciach jaki popełnimy wówczas jest nie większy od $\sum_{a=1}^n \frac{0,0985}{a^4} \left(\frac{\lambda}{l}\right)^4$.



Rys. 2.

Rozpatrzmy jeszcze pasmo płytowe przedstawione na rys. 2. Funkcje $h^a(x^2)$ przyjmujemy w następujący sposób

$$h^a(x^2) = \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} ax^2\right). \quad (3.12)$$

Równania przemieszczeniowe (2.5) sprowadzają się do postaci

$$\begin{aligned} \langle D^{1111} \rangle w_{0,1111} + \langle D^{1111} h^b \rangle w_{b,1111} + 2 \langle D^{1121} h_{,2}^b \rangle w_{b,111} + \langle D^{1122} h_{,22}^b \rangle w_{b,11} - \tilde{p} = 0, \\ \langle D^{1111} h^a \rangle w_{0,1111} + \langle D^{1111} h^a h^b \rangle w_{b,111} - 2 \langle D^{1211} h_{,2}^a \rangle w_{0,111} + \\ + 2 \langle \langle D^{1121} h^a h_{,2}^b \rangle - \langle D^{1211} h_{,2}^a h^b \rangle \rangle w_{b,111} + \langle D^{2211} h_{,22}^a \rangle w_{0,11} + \\ + \langle \langle D^{2211} h_{,22}^a h^b \rangle - 4 \langle D^{1221} h_{,2}^a h_{,2}^b \rangle + \langle D^{1122} h^a h_{,22}^b \rangle \rangle w_{b,11} + \\ + 2 \langle \langle D^{2221} h_{,22}^a h_{,2}^b \rangle - \langle D^{1222} h_{,2}^a h_{,22}^b \rangle \rangle w_{b,1} + \langle D^{2222} h_{,22}^a h_{,22}^b \rangle w_b - p^a = 0. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Składowe tensorów sprężystości i intensywności obciążeń \tilde{p} , p^a mają takie same wartości jak w poprzednim przypadku. Równania (3.13) będą miały postać

$$\begin{aligned} w_{0,1111} &= \frac{p}{\lambda D}, \\ w_{a,1111} - (2\nu + 4) \frac{4a^2 \pi^2}{\lambda^2} w_{a,11} + \frac{16a^4 \pi^4}{\lambda^4} w_a &= \frac{(-1)^a 2p}{\lambda D}, \end{aligned} \quad (3.14)$$

gdzie ν jest współczynnikiem Poissona. Rozwiązanie równań (3.14) możemy zapisać

$$\begin{aligned} w_0 &= \frac{p}{24\lambda D} x^4 + C_1 \frac{x^3}{6} + C_2 \frac{x^2}{2} + C_3 x + C_4, \\ w_a &= A_1 \sinh r_1 x + A_2 \cosh r_1 x + A_3 \sinh r_2 x + A_4 \cosh r_2 x + \frac{(-1)^a p \lambda^3}{8\pi^4 a^4 D}, \end{aligned} \quad (3.15)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} r_1 &= \sqrt{2 - \nu - \sqrt{\nu^2 - 4\nu + 3}} \cdot \frac{2\pi a}{\lambda}, \\ r_2 &= \sqrt{2 - \nu + \sqrt{\nu^2 - 4\nu + 3}} \cdot \frac{2\pi a}{\lambda}. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Na każdym z brzegów $x = 0$ i $x = l$ winno być spełnionych po cztery warunki brzegowe. Przyjmując, że brzeg jest swobodnie podparty, całki ogólne (3.15) są następujące:

$$\begin{aligned} w_0 &= \frac{p}{24\lambda D} (x^4 - 2lx^3 + l^3 x), \\ w_a &= \left(r_2^2 \frac{1 - \cosh r_1 l}{\sinh r_1 l} \sinh r_1 x + r_2^2 \cosh r_1 x + r_1^2 \frac{\cosh r_2 l - 1}{\sinh r_2 l} \sinh r_2 x + \right. \\ &\quad \left. - r_1^2 \cosh r_2 x + r_1^2 - r_2^2 \right) \cdot \frac{1}{r_1^2 - r_2^2} \cdot \frac{(-1)^a p \lambda^3}{8\pi^4 a^4 D}. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Jeżeli $r_1 l \geq 5$ to wyrażenie (3.17) staje się identyczne jak (3.9). Z obydwóch przeanalizowanych przypadków wynika wniosek, że jeżeli $\lambda < l$ to, pasma płytowe obciążone obciążeniem mikrookresowym można rozwiązywać obciążając je równomiernie o intensywności p/λ wówczas wpływ funkcji $w_a(x) h^a(x)$ na ugięcie jest mały (może być pominięty). Natomiast wpływ funkcji $w_a(x) h^a(x)$ na siły wewnętrzne nie może być pominięty ponieważ w zależności od charakteru funkcji $h^a(x)$ może on być bardzo duży.

Literatura

1. A. ROBINSON, *Nonstandard analysis and philosophy*, Selected Papers, Vol. 2, North—Holland, Amsterdam 1979.
2. CZ. WOŹNIAK, *Nonstandard analysis in mechanics*, Advances in Mechanics 1985.
3. CZ. WOŹNIAK, *Micromorphic aspects of finite deformations in the light of the nonstandard analysis*, Proc. of Int. Symp. on Physical Basis and Modelling of Finite Deformations of Aggregates, Paris, October 1985 (in press).

Резюме**РАСЧЁТ МИКРОМОРФНЫХ ПЛИТ**

В работе рассмотрено дифференциальные уравнения теории плит Кирхгоффа. Плиты нагружены микроморфическими сплошными нагрузками, а также точечными силами. В выводе уравнений применено метод нестандартного анализа. Подробно рассмотрен пример полосы.

Summary**CALCULATION OF MICROMORPHIC PLATES**

In the paper the differential equations of Kirchhoff's plate theory been derived. The considered plates are loaded by microperiodic continuous loads or point loads. The derivation is based on the nonstandard analysis. The plate strip has been analysed in details.

Praca wpłynęła do Redakcji dnia 27 listopada 1985 roku
