

FUNKCJE SKLEJANE W ZASTOSOWANIU DO FIZYCZNIE I GEOMETRYCZNIE NIELINIOWEJ ANALIZY PŁYT PROSTOKĄTNYCH

HENRYK KOPECKI
JAN SMYKLA

Politechnika Rzeszowska

1. Wstęp

Ustawiczna dążność do minimalizowania ciężaru konstrukcji, w szczególności znajdujących coraz szersze zastosowanie konstrukcji cienkościennych, jak również dążność do zwiększenia ich trwałości i niezawodności wymaga od konstruktora uwzględnienia nieliniowości fizycznej w równaniach konstytutywnych. Efekty nieliniowe zaobserwuje się zarówno w obszarze zaawansowanych deformacji sprężystych, jak i niesprężystych (plastycznych, reologicznych). Rzeczą niezbędną jest również opis deformacji za pomocą teorii nieliniowych w sensie geometrycznym.

Sformułowany w ten sposób problem staje się złożony pod względem matematycznym, a jego rozwiązania ściśle nie są znane.

Spotykane rozwiązania uwzględniające fizyczną i geometryczną nieliniowość w analizie cienkościennych ustrojów nośnych mają charakter przybliżony, przy czym większość współczesnych rozwiązań opiera się na metodach numerycznych, w szczególności metodzie elementów skończonych oraz metodzie różnic skończonych.

W niniejszej pracy przedstawimy nieco odmienne ujęcie w stosunku do wyżej wspomnianych, problemu fizycznie i geometrycznie nieliniowego płyt o konturze prostokątnym. Opierając się na metodzie energetycznej, wyrażenia dla przemieszczeń będziemy aproksymowali bikubicznymi funkcjami sklejanymi, których wartości dyskretne wyznaczymy losową, adaptacyjną metodą poszukiwania minimum funkcjonału. Wyniki rozważań zilustrujemy przykładami numerycznymi. Niektóre z otrzymanych wyników skonfrontujemy z rezultatami własnych badań doświadczalnych, wykonanych metodą mory projekcyjnej.

2. Sformułowanie problemu

Rozważamy cieką płytę o konturze prostokątnym obciążoną równomiernie ciśnieniem zewnętrznym o intensywności p . Płyta zamocowana jest sztywno na brzegach.

Wskutek obciążenia pojawia się w niej stan naprężenia, w którym efekty giętne pomijamy jako małe w porównaniu z naprężeniami w płaszczyźnie środkowej.

Zależności geometryczne opieramy na teorii nieliniowej przy następujących założeniach: odkształcenia w płaszczyźnie płyty są małe, składowe przemieszczenia prostopadła do powierzchni środkowej przyjmuje wartości skończone, obowiązującymi są założenia Kirchhoffa-Love'a, grubość płyty nie zmienia się w trakcie deformacji.

Przyjmujemy układ kartezjańskich współrzędnych, x_k z początkiem w środku płyty, zaś płaszczyznę x_1, x_2 utożsamiamy z płaszczyzną środkową. Płyta posiada dwa boki: $2a$ i $2b$ oraz grubość h . Oś x_1 jest równoległa do boku $2a$.

Związki pomiędzy składowymi tensora odkształcenia i przemieszczeniami odpowiadające powyższym założeniom wyrażają się zależnością:

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{\partial u_\beta}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial w}{\partial x_\alpha} \cdot \frac{\partial w}{\partial x_\beta} \right), \quad (1)$$

Tutaj x_k ($k = \alpha, \beta$) oznaczają współrzędne prostokątne, u_k — składowe przemieszczenia w kierunku linii współrzędnych x_1, x_2 , w — jest ugięciem płyty mierzonym w kierunku normalnym do powierzchni środkowej. Wskaźniki α i β przebiegają wartości 1, 2.

Równanie konstytutywne opisujące własności fizyczne materiału płyty przyjmujemy w formie

$$\varepsilon_{IJ} = \Phi(\sigma_e) S_{IJ}, \quad (2)$$

odpowiadającej deformacji nieliniowo-sprężystej, bądź sprężysto-plastycznej (proces czynny).

Tutaj ε_{IJ} oznaczają składowe tensora odkształcenia, S_{IJ} są składowymi dewiatora naprężenia, zaś δ_{IJ} oznacza symbol Kroneckera. $\Phi(\sigma_e)$ jest nieliniową funkcją intensywności naprężenia σ_e , którą przyjmujemy w postaci dwuparametrowego związku

$$\Phi(\sigma_e) = \frac{3}{2} A \sigma_e^{m-1}, \quad \text{gdzie} \quad \sigma_e^2 = \frac{3}{2} (S_{IJ} S_{IJ}). \quad (3)$$

A i m są stałymi materiałowymi, zaś

$$S_{IJ} = \sigma_{IJ} - \frac{1}{3} \sigma_{kk} \delta_{IJ}. \quad (4)$$

Dla płaskiego stanu naprężenia tensory naprężenia i odkształcenia możemy przedstawić w formie:

$$[\sigma_{IJ}] = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad [\varepsilon_{IJ}] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & 0 \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & -(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}) \end{bmatrix}, \quad (5)$$

zaś intensywność odkształcenia wyrażamy poprzez składowe dewiatora odkształcenia

$$\varepsilon_e^2 = \frac{2}{3} (e_{IJ} e_{IJ}), \quad \text{gdzie} \quad e_{IJ} = \varepsilon_{IJ} - \frac{1}{3} \varepsilon_{kk} \delta_{IJ}. \quad (6)$$

Z racji założonej w równaniu konstytutywnym nieściśliwości składowe stanu odkształcenia spełniają warunek

$$\varepsilon_{kk} = 0. \quad (7)$$

3. Metoda rozwiązania

Określenia składowych stanu naprężenia oraz ugięcia płyty dokonamy metodą energetyczną. W tym celu wyznaczmy energię potencjalną płyty [4]

$$V = h \iiint [\sigma_{x_1} d\epsilon_{x_1} + \sigma_{x_2} d\epsilon_{x_2} + 2\sigma_{x_1 x_2} d\epsilon_{x_1 x_2}] dx_1 dx_2 - p \iint w dx_1 dx_2, \quad (8)$$

Człon pierwszy wyraża energię odkształcenia płyty, drugi zaś pracę sił zewnętrznych. Ze względu na przyjęty sposób zamocowania pomijamy pracę reakcji oddziaływania brzegu na płytę.

Do równania (8) podstawiamy związki fizyczne (3), (2) uwzględniając jednocześnie zależności (4) i (5). Po jednokrotnym scałkowaniu członu pierwszego równanie to przyjmuje postać:

$$V = \frac{m}{m+1} \cdot \frac{h}{\sqrt{A}} \int_{-a}^a \int_{-b}^b \epsilon_e^{\frac{m+1}{m}} dx_1 dx_2 - p \int_{-a}^a \int_{-b}^b w dx_1 dx_2. \quad (9)$$

Wyrażenia dla przemieszczeń $u_1(x_1, x_2)$, $u_2(x_1, x_2)$ i $w(x_1, x_2)$ przyjmujemy w formie bikubicznych funkcji sklejanych. Funkcje te oznaczamy następująco [1]:

$$S_{\pi}(u_1; x, y), \quad S_{\pi}(u_2; x, y), \quad S_{\pi}(w; x, y). \quad (10)$$

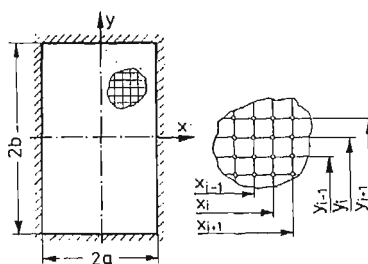
Dla uproszczenia zapisu tutaj i w dalszych rozważaniach przyjmujemy oznaczenia $x_1 = x$, $x_2 = y$.

Rozpatrywana płyta tworzy na płaszczyźnie x, y prostokąt:

$$D = \{(x, y): -a \leq x \leq a, \quad -b \leq y \leq b\}, \quad (11)$$

w którym wyróżniamy dyskretną siatkę węzłów

$$\pi = \{(x_i, y_j): -a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = a, \quad -b = y_0 < y_1 < \dots < y_m = b\}. \quad (12)$$



Rys. 1. Oznaczenia współrzędnych przyjętego układu

Interpolacja każdej z trzech składowych przemieszczenia $u_1(x, y)$, $u_2(x, y)$, $w(x, y)$ będzie polegała na określeniu w w/w obszarze prostokątnym funkcji, spełniającej warunek $f \in C^2(D)$. Funkcja ta w każdym prostokątnym podobszarze jest wielomianem trzeciego stopnia, postaci [1], [5]

$$f(x, y) = f_{ij}(x, y) = \sum_{k=0}^3 \sum_{l=0}^3 a_{ki}^{jl} (x_i - x)^k (y_j - y)^l, \quad (13)$$

przyjmując na brzegach obszaru wartości zerowe. Zakładamy, że wartości zerowe przyjmuje również druga pochodna funkcji, względem normalnej do brzegu [5], [6], [8].

W powyższym związku $f(x, y)$ oznacza dowolną z w/w trzech składowych przemieszczenia.

Współczynniki funkcji aproksymujących będziemy mogli określić dopiero po wyznaczeniu wartości tychże funkcji w węzłach siatki. W dowolnym prostokątnym podob-szarze

$\{x, y: x_{i-1} \leq x \leq x_i, y_{j-1} \leq y \leq y_j\}$ każda z funkcji sklejanych jest bikubicznym wielomianem postaci [5]

$$\begin{aligned} S_n(f; x, y) = \hat{f}_{ij}(x, y) = & \frac{\partial^2 \hat{f}(x_{i-1}, y)}{\partial x^2} \left\{ \frac{1}{6h_i} [(x_i - x)^3 - h_i^2(x_i - x)] \right\} + \\ & + \frac{\partial^2 \hat{f}(x_i, y)}{\partial x^2} \left\{ \frac{1}{6h_i} [(x - x_{i-1})^3 - h_i^2(x - x_{i-1})] \right\} + \\ & + \hat{f}(x_{i-1}, y) \frac{(x_i - x)}{h_i} + \hat{f}(x_i, y) \frac{(x - x_{i-1})}{h_i}, \end{aligned} \quad (14)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \hat{f}(x_{i-1}, y)}{\partial x^2} = & \frac{\partial^4 \hat{f}(x_{i-1}, y_{j-1})}{\partial x^2 \partial y^2} \left\{ \frac{1}{6\tau_j} [(y_j - y)^3 - \tau_j^2(y_j - y)] \right\} + \\ & + \frac{\partial^4 \hat{f}(x_{i-1}, y_j)}{\partial x^2 \partial y^2} \left\{ \frac{1}{6\tau_j} [(y - y_{j-1})^3 - \tau_j^2(y - y_{j-1})] \right\} + \\ & + \frac{\partial^2 \hat{f}(x_{i-1}, y_{j-1})}{\partial x^2} \frac{(y_j - y)}{\tau_j} + \frac{\partial^2 \hat{f}(x_{i-1}, y_j)}{\partial x^2} \frac{(y - y_{j-1})}{\tau_j}, \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \hat{f}(x_i, y)}{\partial x^2} = & \frac{\partial^4 \hat{f}(x_i, y_{j-1})}{\partial x^2 \partial y^2} \left\{ \frac{1}{6\tau_j} [(y_j - y)^3 - \tau_j^2(y_j - y)] \right\} + \\ & + \frac{\partial^4 \hat{f}(x_i, y_j)}{\partial x^2 \partial y^2} \left\{ \frac{1}{6\tau_j} [(y - y_{j-1})^3 - \tau_j^2(y - y_{j-1})] \right\} + \\ & + \frac{\partial^2 \hat{f}(x_i, y_{j-1})}{\partial x^2} \frac{(y_j - y)}{\tau_j} + \frac{\partial^2 \hat{f}(x_i, y_j)}{\partial x^2} \frac{(y - y_{j-1})}{\tau_j}, \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \hat{f}(x_{i-1}, y) = & \frac{\partial^2 \hat{f}(x_{i-1}, y_{j-1})}{\partial y^2} \left\{ \frac{1}{6\tau_j} [(y_j - y)^3 - \tau_j^2(y_j - y)] \right\} + \\ & + \frac{\partial^2 \hat{f}(x_{i-1}, y_j)}{\partial y^2} \left\{ \frac{1}{6\tau_j} [(y - y_{j-1})^3 - \tau_j^2(y - y_{j-1})] \right\} + \\ & + \hat{f}(x_{i-1}, y_{j-1}) \frac{(y_j - y)}{\tau_j} + \hat{f}(x_{i-1}, y_j) \frac{(y - y_{j-1})}{\tau_j}, \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \hat{f}(x_i, y) = & \frac{\partial^2 \hat{f}(x_i, y_{j-1})}{\partial y^2} \left\{ \frac{1}{6\tau_j} [(y_j - y)^3 - \tau_j^2(y_j - y)] \right\} + \\ & + \frac{\partial^2 \hat{f}(x_i, y_j)}{\partial y^2} \left\{ \frac{1}{6\tau_j} [(y - y_{j-1})^3 - \tau_j^2(y - y_{j-1})] \right\} + \\ & + \hat{f}(x_i, y_{j-1}) \frac{(y_j - y)}{\tau_j} + \hat{f}(x_i, y_j) \frac{(y - y_{j-1})}{\tau_j}. \end{aligned} \quad (18)$$

Tutaj i w dalszych rozważaniach przyjęto oznaczenia:

$$h_i = x_i - x_{i-1}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (19)$$

$$\tau_j = y_j - y_{j-1}, \quad j = 1, 2, \dots, m. \quad (20)$$

Występujące we wzorach (15), (16), (17), (18) wyrażenia: $\frac{\partial^4 \hat{f}(x_i, y_i)}{\partial x^2 \partial y^2}$, ..., będące współczynnikami aproksymujących wielomianów określimy dalej, tymczasem zakładając, że wartości poszukiwanych funkcji w węzłach są znane.

W węzłach tych funkcje sklejane przyjmują wartości, które oznaczamy:

$$\begin{aligned} S_n(w; x_i, y_j) &= w_{ij}, \\ S_n(u_1; x_i, y_j) &= u_{1ij}, \\ S_n(u_2; x_i, y_j) &= u_{2ij}, \quad i = 0, 1, \dots, n, \quad j = 0, 1, \dots, m. \end{aligned} \quad (21)$$

Ze względu na symetrię geometryczną oraz symetrię zewnętrznego obciążenia płyty punkty x_i położone są symetrycznie względem punktu $x_k = 0$, zaś punkty y_j — symetrycznie względem $y_l = 0$, wobec czego

$$n = 2k, \quad m = 2l. \quad (22)$$

Zgodnie z przyjętymi założeniami przemieszczenia na brzegach przyjmują wartości zerowe:

$$u_1(x, y)|_{(x, y) \in \Gamma} = 0, \quad u_2(x, y)|_{(x, y) \in \Gamma} = 0, \quad w(x, y)|_{(x, y) \in \Gamma} = 0, \quad (23)$$

gdzie Γ oznacza brzeg prostokątnego obszaru D .

Zakładamy dalej, że funkcje sklejane spełniają warunek brzegowy [1], [5]

$$\frac{\partial^2 S_n(u_i; x, y)}{\partial \nu^2} \Big|_{x, y \in \Gamma} = 0, \quad i = 1, 2; \quad \frac{\partial^2 S_n(w; x, y)}{\partial \nu^2} \Big|_{x, y \in \Gamma} = 0, \quad (24)$$

gdzie przez ν oznaczono normalną zewnętrzną do brzegu.

Przemieszczenie u_1 jest antysymetryczne względem osi y zaś na samej osi przyjmuje wartości zerowe. Podobnie przemieszczenie u_2 jest antysymetryczne względem osi x . Warunki te znajdują wyraz w zapisie:

$$u_1(0, y_j) = 0, \quad u_2(x_i, 0) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad j = 1, 2, \dots, m \quad (25)$$

Formułujemy macierze przemieszczeń \mathbf{W} , $\mathbf{U1}$, $\mathbf{U2}$ przyjmując, że pierwszy wskaźnik oznacza numer punktu rzędnej x , drugi zaś numer punktu odciętej y . Zatem wartości funkcji w , u_1 , u_2 na siatce prostokąta D możemy zapisać w postaci:

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & w_{1,1} & w_{1,2} & \dots & w_{1,l} & \dots & w_{1,m-1} & 0 \\ 0 & w_{2,1} & w_{2,2} & \dots & w_{2,l} & \dots & w_{2,m-1} & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & w_{k,1} & w_{k,2} & \dots & w_{k,l} & \dots & w_{k,m-1} & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & w_{n-1,1} & w_{n-1,2} & \dots & w_{n-1,l} & \dots & w_{n-1,m-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (26)$$

$$\mathbf{U1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & u_{1,1} & u_{1,2} & \dots & u_{1,l} & \dots & u_{1,m-1} & 0 \\ 0 & u_{2,1} & u_{2,2} & \dots & u_{2,l} & \dots & u_{2,m-1} & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & u_{k-1,1} & u_{k-1,2} & \dots & u_{k-1,l} & \dots & u_{k-1,m-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & u_{k+1,1} & u_{k+1,2} & \dots & u_{k+1,l} & \dots & u_{k+1,m-1} & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & u_{n-1,1} & u_{n-1,2} & \dots & u_{n-1,l} & \dots & u_{n-1,m-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (27)$$

$$\mathbf{U2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & u_{2,1} & u_{2,2} & \dots & u_{2,l-1} & 0 & u_{2,l+1} & \dots & u_{2,m-1} & 0 \\ 0 & u_{2,1} & u_{2,2} & \dots & u_{2,l-1} & 0 & u_{2,l+1} & \dots & u_{2,m-1} & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & u_{2,k} & u_{2,k} & \dots & u_{2,l-1} & 0 & u_{2,l+1} & \dots & u_{2,m-1} & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & u_{2,n-1} & u_{2,n-1} & \dots & u_{2,n-1,l-1} & 0 & u_{2,n-1,l+1} & \dots & u_{2,n-1,m-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (28)$$

Dla uproszczenia, w dalszych rozważaniach dowolną z powyższych trzech macierzy będziemy oznaczali symbolem \mathbf{F} .

Również współczynniki $\frac{\partial^2 \hat{f}(x_i, y_j)}{\partial x^2}$ występujące we wzorach (15) i (16) grupujemy w macierz

$$\mathbf{F}_{,xx} = \begin{bmatrix} \hat{f}_{,xx1,1} & \hat{f}_{,xx1,2} & \dots & \hat{f}_{,xx1,m-1} \\ \hat{f}_{,xx2,1} & \hat{f}_{,xx2,2} & \dots & \hat{f}_{,xx2,m-1} \\ \hat{f}_{,xxn-1,1} & \hat{f}_{,xxn-1,2} & \dots & \hat{f}_{,xxn-1,m-1} \end{bmatrix}, \quad (29)$$

gdzie przyjęto oznaczenie $\frac{\partial^2 \hat{f}(x_i, y_j)}{\partial x^2} = f_{,xxi,j}$.

Dążąc do określenia współczynników wielomianów będących elementami macierzy (29) stosujemy jednowymiarową interpolację sześciennymi funkcjami sklejanymi, kolejno na liniach $y = y_j, j = 1, 2, \dots, m-1$. Otrzymujemy w ten sposób układ równań liniowych, ze względu na poszukiwane współczynniki: $\hat{f}_{,xx1,j}, \dots, \hat{f}_{,xxn-1,j}$, stanowiące j -tą kolumnę macierzy $\hat{\mathbf{F}}_{,xx}$.

Ponieważ dla każdej z linii $y = y_j$ otrzymany układ równań charakteryzuje się identyczną macierzą współczynników, możemy utworzyć grupę układów równań liniowych:

$$\mathbf{A}\hat{\mathbf{F}}_{,xx} = \mathbf{H}\mathbf{F}, \quad (30)$$

gdzie **A** i **H** są trójdagonalnymi macierzami postaci:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & & & & \\ b_1 & a_2 & b_2 & & & \\ & b_2 & a_3 & b_3 & & \\ & & \cdot & \cdot & \cdot & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & b_{n-3} & a_{n-2} & b_{n-2} \\ & & & & & b_{n-2} & a_{n-1} \end{bmatrix}, \quad (31)$$

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} d_1 & c_1 & d_2 & & & \\ & d_2 & c_2 & d_3 & & \\ & & \cdot & \cdot & \cdot & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & d_{n-1} & c_{n-1} & d_n \end{bmatrix}, \quad (32)$$

których elementy wyznaczamy z wzorów

$$\begin{aligned} a_i &= \frac{1}{3}(h_i + h_{i+1}), & b_i &= \frac{1}{6}h_{i+1}, \\ c_i &= -\left(\frac{1}{h_i} + \frac{1}{h_{i+1}}\right), & d_i &= \frac{1}{h_i}. \end{aligned} \quad (33)$$

Analogiczną procedurę zachowujemy wyznaczając współczynniki $\frac{\partial^2 \hat{f}(x_i, y_i)}{\partial y^2}$, występujące we wzorach (17) i (18), otrzymując macierz $\hat{\mathbf{F}}_{,yy}$ o identycznej strukturze jaka charakteryzuje macierz (29).

Interpolacja kolejna na liniach $x = x_i$ doprowadza do grupy następujących układów równań liniowych:

$$\mathbf{B}\hat{\mathbf{F}}_{,yy}^T = \mathbf{G}\mathbf{F}^T, \quad (34)$$

gdzie: **B** i **G** są macierzami trójdagonalnymi

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} p_1 & q_1 & & & & \\ q_1 & p_2 & q_2 & & & \\ & q_2 & p_3 & q_3 & & \\ & & \cdot & \cdot & \cdot & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & q_{m-3} & p_{m-2} & q_{m-2} \\ & & & & & q_{m-2} & p_{m-1} \end{bmatrix}, \quad (35)$$

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} s_1 & r_1 & s_2 & & & \\ & s_2 & r_2 & s_3 & & \\ & & \cdot & \cdot & \cdot & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & s_{m-1} & r_{m-1} & s_m \end{bmatrix}, \quad (36)$$

gdzie:

$$p_j = \frac{1}{3}(\tau_j + \tau_{j+1}), \quad q_j = \frac{1}{6}\tau_{j+1},$$

$$r_j = -\left(\frac{1}{\tau_j} + \frac{1}{\tau_{j+1}}\right), \quad s_j = \frac{1}{\tau_j}.$$
(37)

Pozostałe do określenia współczynniki $\frac{\partial^4 \hat{f}(x_i, y_i)}{\partial x^2 \partial y^2}$, występujące w zależnościach: (15), (16), (17) i (18) określamy zachowując identyczny tok postępowania. Uzyskujemy w ten sposób macierz współczynników $\hat{\mathbf{F}}_{,xyy}$, o postaci

$$\hat{\mathbf{F}}_{,xyy} = \begin{bmatrix} \hat{f}_{,xyy1,1} & \hat{f}_{,xyy1,2} & \dots & \hat{f}_{,xyy1,m-1} \\ \hat{f}_{,xyy2,1} & \hat{f}_{,xyy2,2} & \dots & \hat{f}_{,xyy2,m-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \hat{f}_{,xyyn-1,1} & \hat{f}_{,xyyn-1,2} & \dots & \hat{f}_{,xyyn-1,m-1} \end{bmatrix}.$$
(38)

Traktując macierz współczynników $\hat{\mathbf{F}}_{,xx}$ już jako znaną, stosujemy ponownie interpolację jednowymiarową kolejno na liniach $x = x_i$ sześciennymi funkcjami sklejanymi. W wyniku zachowywania omówionej procedury otrzymujemy grupę układów równań, zapisaną następującym równaniem macierzowym:

$$\mathbf{B}\hat{\mathbf{F}}_{,xyy}^T = \mathbf{G}\hat{\mathbf{F}}_{,xx}^T, \quad (39)$$

gdzie symbol T oznacza transpozycję macierzy.

Rozwiązując układy równań (30), (34), (39) otrzymujemy poszukiwane współczynniki wielomianów aproksymujących (14), które są znane o ile znane są wartości funkcji sklejaných w węzłach siatki π obszaru D . Problem sprowadza się zatem do określenia wartości przemieszczeń u_1, u_2, w , w węzłach siatki. Wartości te wyznaczamy z warunku na minimum energii potencjalnej określonej wzorem (9), do którego podstawiamy przyjęte wielomiany interpolacyjne. Do wyznaczenia owego minimum stosujemy adaptacyjną metodę losową poszukiwania minimum funkcjonału, omówioną szczegółowo w pracy [3], zmodyfikowaną dodatkowymi ograniczeniami wynikającymi ze specyfiki rozważanego problemu. Metodę tę cechuje bieżąca korekta kierunku i długości kroku, w wyniku tworzona jest pamięć kierunku szukania.

Przedstawimy obecnie procedurę, umożliwiającą wyznaczenie energii potencjalnej w zależności od przyjętych funkcji sklejaných dla przemieszczeń. W tym celu funkcje (10) wprowadzamy do równań: (1), (3), (4), (6). Po wykonaniu przepisanych wzorem (9) przekształceń i operacji różniczkowania, warunek na minimum energii potencjalnej zapisujemy w postaci:

$$V = \min_{\mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2, \mathbf{W}} (\xi S e - p S w), \quad (40)$$

gdzie oznaczają:

$$\xi = \frac{m}{m+1} \cdot \frac{h}{\sqrt[m]{A}}, \quad (41)$$

$$Se = \int_{-a}^a \int_{-b}^b S_{\pi}(\varepsilon e^{\frac{m+1}{m}}; x, y) dx dy, \quad (42)$$

$$Sw = \int_{-a}^a \int_{-b}^b S_{\pi}(w; x, y) dx dy. \quad (43)$$

Całki występujące w związkach (42) i (43) obliczamy ze wzoru, otrzymanego w wyniku całkowania wielomianu bikubicznego

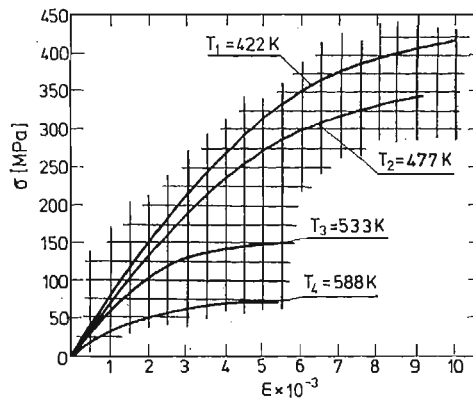
$$\int_{-a}^a \int_{-b}^b S_{\pi}(f; x, y) dx dy = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^l \left\{ h_i \left[(f_{i-1,j-1} + f_{i,j-1} + f_{i-1,j} + f_{i,j}) \tau_j - \right. \right. \\ \left. \left. - (\hat{f}_{,yy_{i-1,j-1}} + \hat{f}_{,yy_{i,j-1}} + \hat{f}_{,yy_{i-1,j}} + \hat{f}_{,yy_{i,j}}) \frac{\tau_j^3}{12} \right] + \frac{h_i^3}{12} \left[(\hat{f}_{,xyy_{i-1,j-1}} + \hat{f}_{,xyy_{i,j-1}} + \right. \right. \\ \left. \left. + \hat{f}_{,xyy_{i-1,j}} + \hat{f}_{,xyy_{i,j}}) \frac{\tau_j^3}{12} - (\hat{f}_{,xx_{i-1,j-1}} + \hat{f}_{,xx_{i,j-1}} + \hat{f}_{,xx_{i-1,j}} + \hat{f}_{,xx_{i,j}}) \tau_j \right] \right\}. \quad (44)$$

Powyższy wzór (44) wykorzystujemy do obliczenia całek występujących w związkach (42) i (43), niezbędnych do określenia minimum funkcjonału wyrażonego formułą (40).

Dla przedstawionego algorytmu opracowano program dla EMC w języku Fortran IV. Wyniki obliczeń numerycznych wykonanych na EMC ODRA 1304 przedstawiono w rozdziale 4.

4. Przykłady numeryczne

Metodę rozwiązania opartą na przedstawionej koncepcji zastosowania funkcji sklejanych do analizy fizycznie i geometrycznie nieliniowych płyt prostokątnych ilustrujemy przykładami numerycznymi.



Rys. 2. Wykresy zależności $\sigma = \sigma(\varepsilon)$ dla stopu aluminium 2014-T6

Obliczenia przeprowadzamy dla dwóch rodzajów materiałów płyt:

1. Stopu aluminium o symbolu 2014-T6 [9], którego charakterystyki fizyczne $\sigma = \sigma(\varepsilon)$ dla $T = \text{const}$ przedstawia rys. 2. Na podstawie w/w charakterystyk zidentyfiko-

wano stałe A i m występujące w równaniu (3). Stałe te, dla dwóch temperatur: $T_1 = 422$ K, i $T_4 = 588$ K, wyznaczono stosując metodę najmniejszych kwadratów. Wynoszą one odpowiednio:

$$A = 1,00252 \cdot 10^{-6} \text{ (MPa)}^{-1,5}, \quad m = 1,5, \quad \text{dla } T_1 = 422 \text{ K}$$

$$A = 2,50457 \cdot 10^{-7} \text{ (MPa)}^{-2,266}, \quad m = 2,266, \quad \text{dla } T_4 = 588 \text{ K}$$

Przyjęto, że płyty z w/w materiału badane są w temperaturach T_1 i T_4 przy obciążeniu $p = 0,025$ MPa.

2. Tworzywa sztuczne Epidian-53, dla którego stałe w temperaturze $T = 293$ K wynoszą:

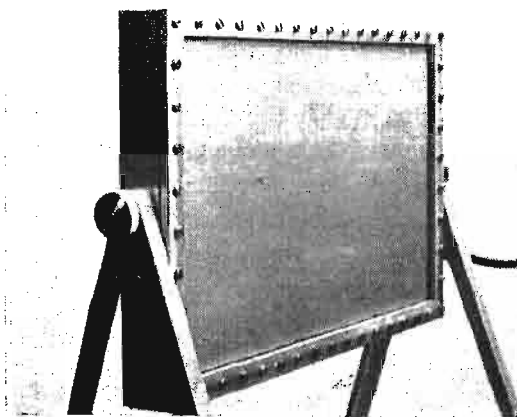
$$A = E^{-1} = 0,0003397 \text{ (MPa)}^{-1}, \quad m = 1.$$

Obliczenia dla płyty z materiału Epidian-53 wykonywano w założeniu, że obciążenie płyty wynosi $p = 0,005$ MPa.

Pozostałe parametry geometryczne dla płyt z obu materiałów przyjęto: $a = 125$ mm, $b = 225$ mm, $h = 0,5$ mm.

W celu uzyskania oceny dokładności proponowanej metody przeprowadzono badania eksperymentalne ugięć płyty z materiału Epidian-53, o identycznych j.w. wymiarach i obciążeniu.

Płytę przygotowaną do badań przedstawia rys. 3.

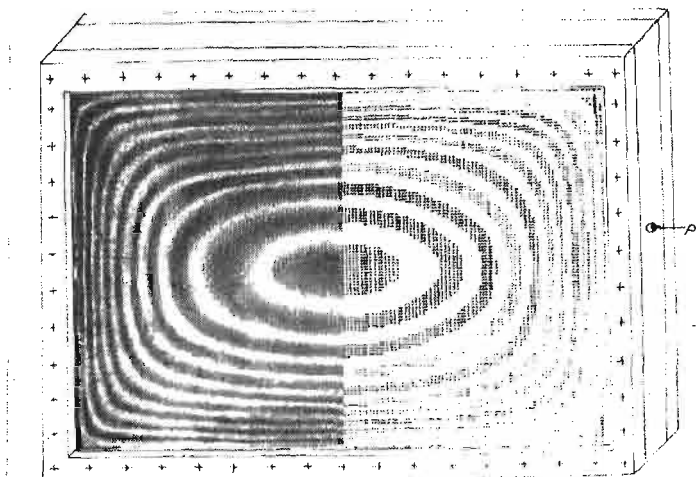


Rys. 3. Płyta z materiału Epidian-53 zamontowana na stanowisku do badań

Badania przeprowadzono metodą mory projekcyjnej (7) otrzymując mapę morową, dla której odległości między sąsiednimi płaszczyznami warstwowymi wynosiły:

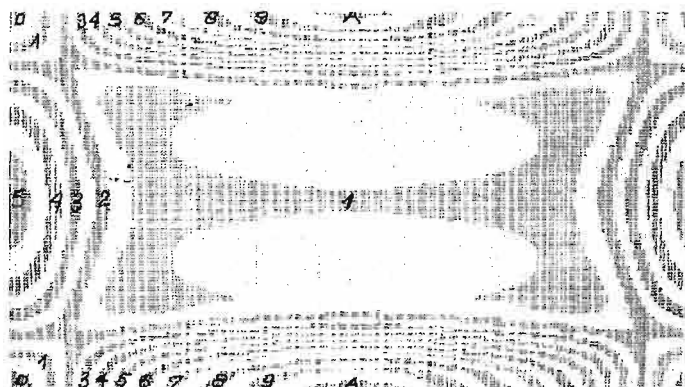
$$d_{k+1/k} = 1,13 \text{ mm, gdzie } k = 0, 1, \dots, 10.$$

Jako rzutnika do rzutowania siatki na powierzchnię płyty użyto projektora TS 107 „Malinverno”. Ze względu na ukośną projekcję, zastosowano odpowiednią siatkę otrzymaną z siatki linii równo-odległych drogą przetworzenia optycznego [2], zapewniając odwzorowanie się jej jako układu linii równo-odległych. Fotografowanie przeprowadzono aparatem fotograficznym o identycznej ogniskowej, spełniając odpowiednie wymogi odnośnie lokalizacji punktu fotografowania.



Rys. 4. Powierzchnie warstwowe obrazujące poziomy stałych ugięć płyty z materiału Epidian-53. Strona lewa przedstawia warstwicową mapę morową, dla której odległości między sąsiednimi płaszczyznami warstwowymi wynoszą: $d_{k+1,k} = 1,13 \text{ mm}$, $k = 0, 1, \dots, 10$. Strona prawa obrazuje mapę warstwicową otrzymaną na drodze obliczeniowej:

Symbol	ugięcie mm	Symbol	ugięcie mm
0	0 ÷ 0,3	6	6,4 ÷ 7,0
1	0,8 ÷ 1,4	7	7,6 ÷ 8,1
2	2,0 ÷ 2,5	8	8,7 ÷ 9,2
3	3,1 ÷ 3,6	9	9,8 ÷ 10,4
4	4,2 ÷ 4,8	A	10,9 ÷ 11,2
5	5,3 ÷ 5,9		



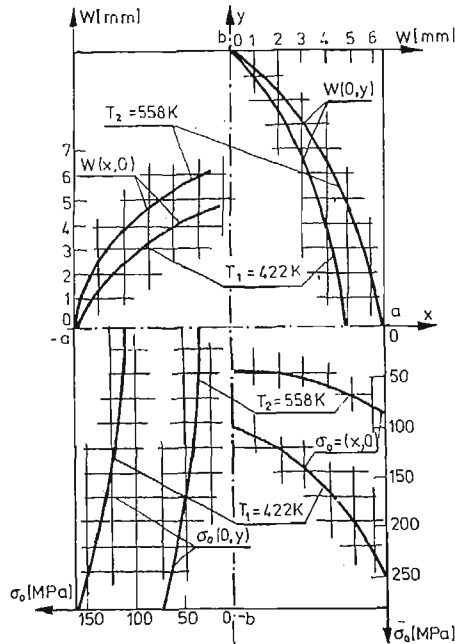
Rys. 5. Rozkład naprężeń zredukowanych w/g hipotezy Hubera-Misesa w płycie z materiału Epidian-53 przedstawiony w formie warstwic

Symbol	Zakres wyteżenia	Symbol	Zakres wyteżenia
0	0 ÷ 1,43 MPa	6	32,96 ÷ 35,83 MPa
1	4,30 ÷ 7,16 MPa	7	35,75 ÷ 41,56 MPa
2	10,03 ÷ 12,90 MPa	8	44,42 ÷ 47,29 MPa
3	15,76 ÷ 18,63 MPa	9	50,16 ÷ 53,02 MPa
4	21,49 ÷ 24,36 MPa	A	55,89 ÷ 57,32 MPa
5	27,22 ÷ 30,10 MPa		

Obszarom oznaczonym kropkami odpowiadają wartości pośrednie pomiędzy sąsiednimi zakresami wyteżenia

Na rys. 4, w lewej jego części przedstawiono warstwicową mapę morową. Strona prawa przedstawia mapę warstwicową otrzymaną na drodze obliczeniowej dla identycznej płyty. Również wyężenie w/g hipotezy Hubera-Misesa przedstawiono w formie warstwic obrazujących jednakowe poziomy wyężenia w płycie z materiału Epidian-53 (rys. 5).

Na rys. 6 przedstawiono obliczone rozkłady ugięć oraz naprężeń zredukowanych w/g hipotezy Hubera-Misesa w przekrojach na osiach symetrii dla płyty ze stopu 2014-T6. Wykresy te, odnoszące się do dwóch temperatur wrysowano w kontur płyty.



Rys. 6. Rozkłady ugięć oraz naprężeń zredukowanych w/g hipotezy Hubera-Misesa w przekrojach na osi symetrii dla płyty ze stopu 2014-T6 obciążonej ciśnieniem $p = 0,025$ MPa, w temperaturach: $T_1 = 422$ K oraz $T_2 = 558$ K

5. Wnioski

W pracy rozważono zagadnienia fizycznie i geometrycznie nieliniowych płyt prostokątnych w stanie błonowym, oparte na zastosowaniu bikubicznych funkcji sklepanych.

Otrzymane wyniki, w konfrontacji z przeprowadzonym badaniem eksperymentalnym potwierdzają dobrą zgodność zaproponowanego ujęcia z rzeczywistym rozkładem deformacji.

Zaproponowana metoda zilustrowana na przykładzie płyty prostokątnej może być stosunkowo prosto uogólniona na zakres płyt i powłok małowyniosłych o bardziej złożonej geometrii konturu.

Obliczenia wykonywane zaproponowaną metodą mogą być realizowane na maszynach cyfrowych o niezbyt dużej pamięci.

Literatura

1. J. H. AHLBERG, E. N. NILSON, J. L. WALSH, *The theory splines and their applications*, Academic Press, New York and London 1967.
2. R. FINSTERWALDER, W. HOFMAN, *Photogrammetrie*, Wyalter de Gruyter and Co. Berlin, 1968.
3. Z. KLEPACKI, *Metoda optymalizacji podstawowych parametrów samolotu rolniczego*, Praca doktorska, Politechnika Rzeszowska 1984.
4. H. KOPECKI, *Duże ugięcia malowyniosłej powłoki o konturze prostokątnym z materiału o własnościach reologicznych*, IV Sympozjon PTMTS poświęcony geologii, Wrocław 1969.
5. G. I. MARCZUK, *Analiza numeryczna zagadnień fizyki matematycznej*, P.W.N. Warszawa 1983.
6. P. M. PRENTER, *Splines and variational methods*, A. Wiley-Interscience Publication, New York—London—Sydney—Toronto 1975.
7. J. J. WASOWSKI, *Badanie ugięć powłok techniką warstwicowych map morowych*, *Archiwum Budowy Maszyn*, 23, 3, 1976.
9. *Military Standardization Handbook, Metallic Materials and elements for aerospace vehicle structures*, 1971.
8. Ю. С. Завялов, Б. Й. Квасов, В. Л. Мирошниченко, *Метод сплайн функций*, Изд. „Наука”, Москва 1980.

Резюме

СПЛАЙН-ФУНКЦИИ В ПРИМЕНЕНИИ К АНАЛИЗУ ФИЗИЧЕСКИ И ГЕОМЕТРИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНЫХ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ПЛАСТИН

Работа содержит анализ прямоугольных пластин нагруженных равномерно распределенной нагрузкой с учетом физической и геометрической нелинейности. Результаты теоретических исследований для случая физической линейности и геометрической нелинейности сопоставлены с результатами произведенных экспериментальных исследований.

Summary

SPLINES IN APPLICATIONS TO PHYSICALLY AND GEOMETRICALLY NONLINEAR RECTANGULAR PLATES ANALYSIS

The paper refers to the analysis of the rectangular plates loaded with constant pressure.

Material of the plate deforms in accordance to the theory of nonlinear elasticity.

Results of calculations of linear elastic and geometrically nonlinear deformations of the plate are compared with experimental results.

Praca wpłynęła do Redakcji dnia 24 maja 1985 roku