

## METODA AUTOMATYCZNEGO UKŁADANIA RÓWNAŃ RÓWNOWAGI W OBLICZENIACH STATYCZNYCH ORTOTROPOWYCH, LINIOWO-SPRĘŻYS- TYCH, CIENKOŚCIENNYCH PRĘTÓW PRYZMATYCZNYCH O DOWOLNYM PRZEKROJU WIELOOBWODOWYM

ZENON GÓRECKI

*Institut Okrętowy Politechniki Gdańskiej*

### 1. Uwagi wstępne

W pracach [1], [2], [4] przedstawiono metodę obliczania naprężeń i przemieszczeń dla prętów pryzmatycznych cienkościennych o przekroju zamkniętym. Podano założenia półbezmomentowej teorii powłok i półbezmomentowej teorii ramowo-powłokowej opracowanych na podstawie podanej przez W. Z. Własowa ogólnej teorii prętów cienkościennych [3]. Rozważania prowadzono w obliczeniach statycznych kadłubów statków bezgrozdziowych.

W celu zautomatyzowania obliczeń opracowano metodę konstruowania macierzy współczynników układu różniczkowych równań równowagi. Podstawę metody stanowi uogólnienie wzoru Własowa na obliczanie liczby stopni swobody w płaszczyźnie przekroju poprzecznego pręta oraz sposób konstruowania funkcji kształtu  $\psi$  dla przemieszczeń stycznych. Całość postępowania przystosowano w programie na maszynę cyfrową do generowania macierzy współczynników układu, w których interpretacja niewiadomych nie jest w trakcie pracy maszyny znana.

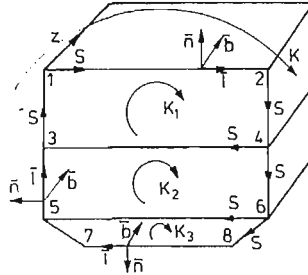
W celu wykonania obliczeń wystarczy podać następujące informacje dotyczące analizowanej konstrukcji:

- liczbę węzłów w przekroju poprzecznym pręta
- tablicę połączeń węzłów między sobą
- współrzędne węzłów w dowolnym kartezjańskim układzie współrzędnych
- charakterystyki geometryczne i materiałowe elementów międzywęzłowych (grubości odcinków, moduły Younga, Kirchhoffa oraz liczby Poissona)
- obciążenie zewnętrzne elementów pręta oraz rodzaj warunków granicznych.

### 2. Całkowita energia mechaniczna układu Macierzowa postać równań równowagi

Rozpatrujemy pręt pryzmatyczny cienkościenny posiadający w przekroju poprzecznym skończoną liczbę zamkniętych konturów (rys. 1).

Na każdym konturze zamkniętym  $K_i$  przekroju wprowadzamy współrzędną krzywoliniową  $s$  mierzoną po długości konturu. W każdym punkcie konturu  $K_i$  wprowadzamy układ trzech wersorów  $\bar{l}_i, \bar{n}_i, \bar{b}_i$ , lewoskrętny, taki że  $\bar{l}_i$  — wersor zgodny z kierunkiem wzrostu współrzędnej  $s$ ,  $\bar{n}_i$  — wersor normalnej zewnętrznej do konturu,  $\bar{b}_i$  — prostopadły do dwóch pozostałych i skierowany zgodnie ze skrętnością osi  $z$  (rys. 1).



Rys. 1.

Przemieszczenia powłoki zadajemy w postaci wektora przemieszczenia  $\bar{R}(z, s)$  funkcji dwóch zmiennych  $z, s$

gdzie:  $z$  — współrzędna wzdłuż belki

$s$  — współrzędna w kierunku obwodowym

i rozkładamy w bazie lokalnej  $\bar{l}, \bar{n}, \bar{b}$  (rys. 1)

$$\bar{R}(z, s) = u(z, s) \cdot \bar{b} + v(z, s) \cdot \bar{l} + w(z, s) \cdot \bar{n}. \quad (2.1)$$

Na przemieszczenia nakładamy więzy powodujące, że współrzędne wektora przemieszczenia można wyrazić w formie sum iloczynów dwóch funkcji o zmiennych rozdzielonych,

$$u(z, s) = \sum_{i=1}^n U_i(z) \varphi_i(s) \quad (2.2.1)$$

$$v(z, s) = \sum_{k=1}^m V_k(z) \psi_k(s) \quad (2.2.2)$$

$$w(z, s) = \sum_{j=1}^l W_j(z) \chi_j(s) \quad (2.2.3)$$

w których funkcje zmiennej  $z$ :  $U_i(z), V_k(z), W_j(z)$  są funkcjami poszukiwanymi, zaś funkcje współrzędnej  $s$ :  $\varphi_i(s), \psi_k(s), \chi_j(s)$  stanowią bazy, w których rozłożone są przemieszczenia  $\bar{R}(z, s)$ .

Przyjmując materiał sprężysty ortotropowy o osiach ortotropii  $\bar{b}, \bar{l}, \bar{n}$  i uwzględniając założenia półbezmomentowej teorii powłok [1] otrzymujemy wyrażenie na całkowitą energię sprężystą odkształcenia

$$\begin{aligned} \pi = \frac{1}{2} \int_0^L \left[ \oint_K \left\{ \check{E}_1 \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \nu_{21} \frac{\partial v}{\partial s} \right) \frac{\partial u}{\partial z} + \check{E}_2 \left( \frac{\partial v}{\partial s} + \nu_{12} \frac{\partial u}{\partial z} \right) \frac{\partial v}{\partial s} + \right. \right. \\ \left. \left. + \check{G} \left( \frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 + \frac{M^2}{D} \right\} ds \right] dz \quad (2.3) \end{aligned}$$

gdzie:

$$M = -D \frac{\partial^2 w}{\partial s^2}; \quad D = \frac{E_2 \delta^3}{12(1-\nu_{12}\nu_{21})};$$

$$\check{G} = G\delta; \quad \check{E}_i = \frac{E_i \delta}{1-\nu_{12}\nu_{21}}; \quad i = 1, 2$$

$E_1, E_2$  — moduły Younga

$\nu_{12}, \nu_{21}$  — stałe Poissona

$G$  — moduł ścinania (Kirchhoffa)

$\delta$  — grubość powłoki (stała na odcinku między węzłami)

$K$  — zamknięty kontur

$L$  — długość powłoki.

Obciążenia powłoki zadajemy w postaci wektora  $\bar{p}(z, s)$  funkcji dwóch zmiennych  $z, s$  i również rozkładamy w bazie  $\bar{n}, \bar{l}, \bar{b}$

$$\bar{p}(z, s) = p_n(z, s) \cdot \bar{n} + p_s(z, s) \cdot \bar{l} + p_b(z, s) \cdot \bar{b}. \quad (2.4)$$

Pracę sił zewnętrznych zapisujemy w postaci:

$$A = \int_0^L \left[ \oint_K \bar{p}(z, s) \cdot \bar{R}(z, s) ds \right] dz = \int_0^L \left[ \oint_K (u \cdot p_b + v \cdot p_s + w \cdot p_n) ds \right] dz. \quad (2.5)$$

Wykorzystujemy dalej założenia teorii ramowo-powłokowej [1] w której hipotezy deformacji wystarczy narzucić na funkcje  $u(z, s), v(z, s)$  a mianowicie:

$$u(z, s) = \sum_{i=1}^n U_i(z) \cdot \Phi_i(s) \quad (2.6.1)$$

$$v(z, s) = \sum_{k=1}^m V_k(z) \cdot \Psi_k(s) \quad (2.6.2)$$

a funkcje  $w(z, s) = \sum_{j=1}^l W_j(z) X_j(s)$  nie są potrzebne do pełnego opisu przemieszczeń ponieważ są jednoznacznie określone przez funkcje  $v(z, s)$  [1].

Z warunku ekstremum funkcjonału całkowitej energii mechanicznej po wykorzystaniu (2.6) i wprowadzeniu zapisu macierzowego otrzymujemy układ równań różniczkowych

$$\begin{bmatrix} [M_{\varphi\varphi}] \\ [M_{\varphi\psi}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ \vdots \\ T_r \end{Bmatrix}'' + \begin{bmatrix} [M_{\varphi\varphi'}] - [M_{\varphi\psi'}] \\ [M_{\varphi\psi'}] - [M_{\psi\psi'}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ \vdots \\ T_r \end{Bmatrix}' +$$

$$- \begin{bmatrix} [M_{\varphi'\varphi'}] \\ [M_{\psi'\psi'}] + [M_{FF}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ \vdots \\ T_r \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_r \end{Bmatrix}. \quad (2.7)$$

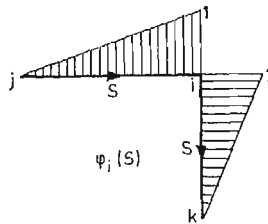
Szczegóły obliczeń macierzy współczynników podano w [1].

### 3. Metoda układania równań równowagi dla pręta pryzmatycznego o przekroju dowolnym wielobwodowym

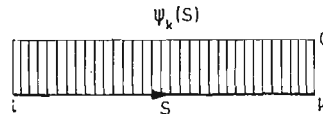
**3.1. Opis metody.** Równania równowagi (2.7) są równaniami różniczkowymi drugiego rzędu. Ich liczbę określamy na podstawie niewiadomych przemieszczeń binormalnych i stycznych do konturu w oparciu o przyjętą hipotezę deformacji (2.6). Liczba niewiadomych odpowiada liczbie funkcji kształtu  $\varphi$  i  $\psi$ . Jeżeli przez  $n$  oznaczymy liczbę funkcji  $\varphi$  a przez  $k$  liczbę funkcji  $\psi$  to rząd układu równań różniczkowych jest

$$R = 2 \cdot (n+k). \quad (3.1)$$

Do rozważań wybieramy funkcje kształtu  $\varphi$  i  $\psi$  pierwszego rodzaju [1] jak na rys. 2 i 3.



Rys. 2.



Rys. 3.

Funkcję  $\varphi_i(s)$  określają przemieszczenia prostopadłe do konturu — muszą być zatem ciągłe na całym konturze  $K$ . Są one skonstruowane tak, że w wybranych węzłach mają wartość 1 (jeden) i zmieniają się liniowo do zera w węzłach najbliższych.

Funkcje  $\psi_k(s)$  określają przemieszczenia styczne do konturu. Muszą być zatem ciągłe na każdym odcinku prostym między węzłami. Wybrane funkcje  $\psi_k(s)$  nie uwzględniają wpływu sił osiowych w przecię są zatem stałe na odcinku międzywęzłowym.

Liczba funkcji  $\varphi_i$  odpowiada liczbie stopni swobody w kierunku binormalnym (równa liczbie węzłów w ramie będącej przekrojem poprzecznym pręta cienkościennego). Podobnie liczba funkcji  $\psi$  odpowiada liczbie stopni swobody w płaszczyźnie przekroju pręta.

W dowolnym przekroju wielobwodowym istnieją ograniczenia kinematyczne zmniejszające liczbę stopni swobody i wprowadzają ograniczenia na dobór funkcji  $\psi$ . Określenie liczby stopni swobody w płaszczyźnie przekroju pręta i dobór funkcji  $\psi$  wymagają szerszego omówienia.

**3.2. Określanie liczby stopni swobody w płaszczyźnie przekroju pręta:** Liczba stopni swobody w elemencie płaskiego wyraża się wzorem [3]

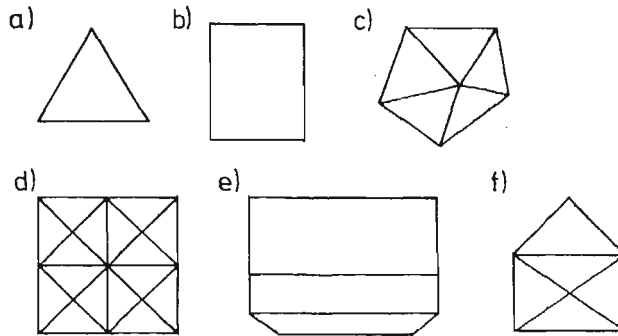
$$w = 2n - c \quad (3.2)$$

gdzie:

- $w$  — liczba stopni swobody w płaszczyźnie przekroju pręta
- $n$  — liczba węzłów
- $c$  — liczba odcinków łączących węzły.

W przypadku przekroju dowolnego składającego się z wielokątów dowolnego kształtu wzór ten jest słuszny (rys. 4c, d, t).

Poniżej przedstawimy wyprowadzenie wzoru pozwalającego określać liczbę stopni swobody dla dowolnego przekroju wieloobwodowego. Kształt profilu określamy przez podanie liczby węzłów i ich współrzędnych w dowolnym układzie kartezjańskim oraz przez podanie tablicy połączeń międzywęzłowych (np. rys. 1, tab. 1). Wprowadzamy połączenia fikcyjne między węzłami takie aby cały profil składał się tylko z trójkątów (liczba węzłów nie może ulec zmianie). Taka figura może w płaszczyźnie przemieszczać się tylko jako ciało sztywne i posiada trzy stopnie swobody.



Rys. 4.

Tablica 1.

Współrzędna X	X1	X2	X3	X4	X5	X6	X7	X8
Współrzędna Y	Y1	Y2	Y3	Y4	Y5	Y6	Y7	Y8
Nr węzła	1	2	3	4	5	6	7	8
1	0	1	1	0	0	0	0	0
2	1	0	0	1	0	0	0	0
3	1	0	0	1	1	0	0	0
4	0	1	1	0	0	1	0	0
5	0	0	1	0	0	1	1	0
6	0	0	0	1	1	0	0	1
7	0	0	0	0	1	0	0	1
8	0	0	0	0	0	1	1	0

Jeżeli  $w < 3$  (rys. 4d — może być nawet liczbą ujemną), oznacza to, że pewne połączenia międzywęzłowe mogłyby nie istnieć, a profil byłby nadal ciałem sztywnym. Stąd wnioskujemy, że pewne połączenia są „przesztywniające”. Liczbę tych połączeń można określić z zależności

$$z = 3 - w \quad (3.3)$$

gdzie:

$z$  — liczba „przesztywnień”.

Przyjmujemy, że liczba „przesztywnień”  $z$  składa się z sumy

$$z = z_1 + z_2. \quad (3.4)$$

Liczby  $z_1$  i  $z_2$  określamy następująco. Założymy, że jakiś fragment profilu bez połączeń fikcyjnych składa się z pewnej figury geometrycznej, która zbudowana jest z trójkątów. Gdyby tę figurę rozpatrywać oddzielnie miałyby „przesztywnienia”.

Takich fragmentów może być więcej a suma wszystkich „przesztywnień” daje nam liczbę  $z_1$ . Oczywiście jeżeli „przesztywnień” we fragmencie profilu nie ma to  $z_1 = 0$ . Gdy teraz wprowadzimy  $r$  połączeń fikcyjnych i określimy liczbę  $z$  według wzoru (3.4) to jest możliwe, że  $z_1 \neq z_2$ . Oznacza to, że pewne połączenia fikcyjne dają „przesztywnienia”. Liczbę połączeń fikcyjnych, które dają „przesztywnienia” określamy przez  $z_2$ .

Wprowadzając pewną liczbę połączeń fikcyjnych (więzów dodatkowych) ograniczamy liczbę stopni swobody. Mając na uwadze, że połączenia fikcyjne dawać mogą „przesztywnienia” to liczba więzów ograniczających liczbę stopni swobody jest:

$$r_1 = r - z_2. \quad (3.5)$$

Rzeczywistą liczbę stopni swobody  $k$  określamy następująco:

$$k = w + z + r_1. \quad (3.6)$$

Wykorzystując (3.4) i (3.5) i wstawiając do (3.6) otrzymujemy

$$k = w + z_1 + z_2 + r - z_2 \quad (3.7)$$

stąd:

$$k = w + z_1 + r. \quad (3.8)$$

Wzór (3.2) można więc zapisać w postaci

$$w = 2n - c_1 = 2n - (p + r). \quad (3.9)$$

Jest to „poprawiony” wzór Własowa uwzględniający przesztywnienia. Poszczególne litery oznaczają:

$c_1$  — łączna liczba połączeń międzywęzłowych rzeczywistych i fikcyjnych

$p$  — liczba rzeczywistych połączeń międzywęzłowych

$r$  — liczba fikcyjnych połączeń międzywęzłowych

Jeżeli (3.9) wstawimy do (3.8) otrzymujemy.

$$k = w + z_1 + r = 2n - (p + r) + z_1 + r, \quad (3.10)$$

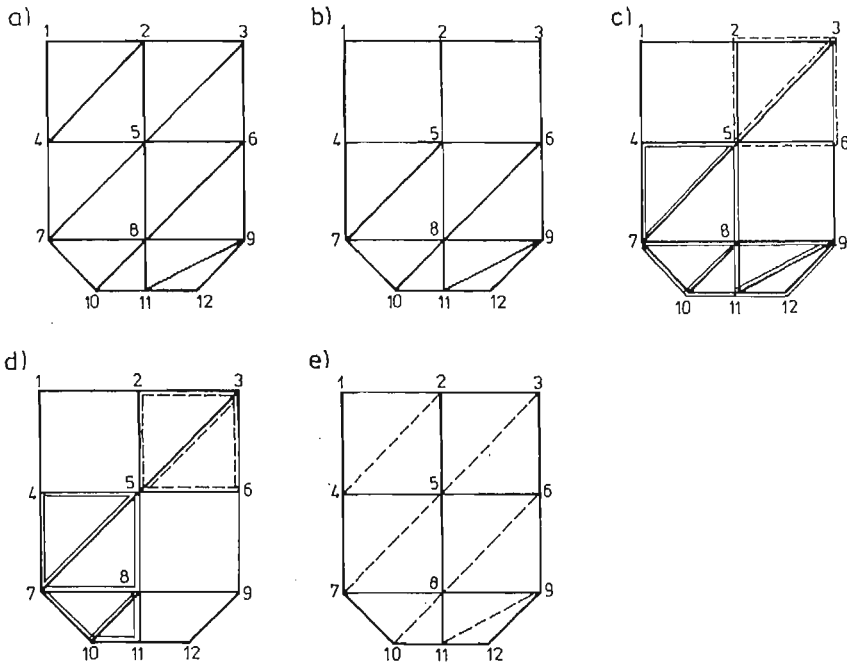
stąd:

$$k = 2n - p + z_1. \quad (3.11)$$

Ostatnia zależność oznacza, że w celu określenia liczby stopni swobody profilu w płaszczyźnie przekroju należy obliczyć liczbę „przesztywnień”  $z_1$ . Pozostałe wielkości  $n$  i  $p$  są dane.

Mając dane  $n$  i obliczone  $k$  określamy liczbę niewiadomych funkcji  $U_j, V_l$  ( $j = 1, 2, \dots, n, l = 1, 2, \dots, k$ ) a tym samym liczbę równań różniczkowych równowagi.

**Przykład.** Przekrój na rys. 5a składa się z samych trójkątów. Korzystając z wzoru (3.2) otrzymujemy  $w = 1$ . Jako ciało sztywne przekrój ten ma 3 stopnie swobody stąd liczba „przesztywnień”  $z_1 = 2$ . Przekrój na rys. 5b zawiera część 4-5-6-7-8-9-10-11-12 składającą się z trójkątów. Rozpatrując tę część oddzielnie otrzymujemy z wzoru (3.2)  $w = 2$  ( $n = 9, c = 16$ ). Stąd wynika, że posiada „przesztywnienia”  $z_1 = 1$ . Rozpatrując cały profil otrzymujemy z wzoru (3.11)  $k = 4$  ( $n = 12, p = 21, z_1 = 1$ ).



Rys. 5.

Przekrój na rys. 5c zawiera dwie części składające się z trójkątów. Część pierwsza (linia ciągła i przerywana) 2-3-5-6, dla której  $z_1^{\text{II}} = 0$  oraz część druga (linia ciągła podwójna) 4-5-7-8-10-11-12 dla której  $z_1^{\text{II}} = 0$ . Korzystając z wzoru (3.11) otrzymujemy liczbę stopni swobody  $k = 3$  ( $n = 12$ ,  $p = 21$ ,  $z_1 = 0$ ). Podobnie obliczamy liczbę stopni swobody dla profilu na rys. 5d ( $k = 4$ ).

Przekrój na rys. 5e nie zawiera części składającej się z trójkątów, a zatem nie ma „przesztywnień” (linią przerywaną zaznaczono połączenia fikcyjne). W tym przypadku  $k = 7$  ( $n = 12$ ,  $p = 17$ ,  $z_1 = 0$ ).

### 3.3. Wybór i budowanie funkcji kształtu. Rozpatrujemy dwa przypadki:

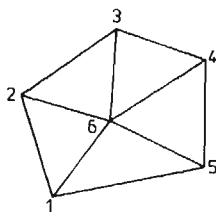
1. Przekrój pręta jest sztywny
2. Przekrój pręta nie jest sztywny.

3.3.1. Przekrój pręta jest ciałem sztywnym. Przekrój pręta będący ciałem sztywnym posiada trzy stopnie swobody. W tym przypadku funkcje  $\psi$  określamy następująco:

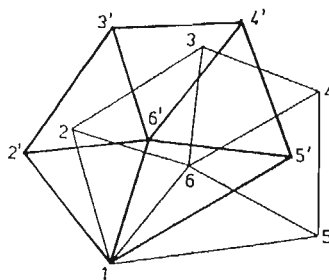
- a) wybieramy jeden trójkąt (dowolny) wchodzący w skład figury wyznaczającej przekrój poprzeczny pręta cienkościennego (zawsze istnieje co najmniej jeden trójkąt w przypadku ciała sztywnego)
- b) przyjmujemy jeden z wierzchołków jako chwilowy środek obrotu
- c) zakładamy obrót trójkąta o kąt  $\alpha = 1$  i określamy przemieszczenia na boku przeciwnym do chwilowego środka obrotu, przemieszczenia styczne tego boku traktujemy jako zadane
- d) określamy wszystkie istniejące przemieszczenia styczne na pozostałych elementach konturu od zadanego przemieszczenia.

W ten sposób otrzymujemy pierwszą z funkcji  $\psi$ . Pozostałe funkcje określamy w ten sam sposób przyjmując za chwilowe środki obrotu kolejne wierzchołki trójkąta.

Poniżej przedstawimy przykład budowania funkcji  $\psi$  dla przekroju sztywnego. Rozważamy przekrój sztywny jak na rys. 6. Węzły ponumerujemy w sposób dowolny. Wybieramy jeden trójkąt np. 1-2-6. Za chwilowy środek obrotu przyjmujemy węzeł 1 i obracamy o kąt  $\alpha_1 = 1$ . Przekrój przemieści się jak na rys. 7. Przed przystąpieniem do określania funkcji  $\psi_1$

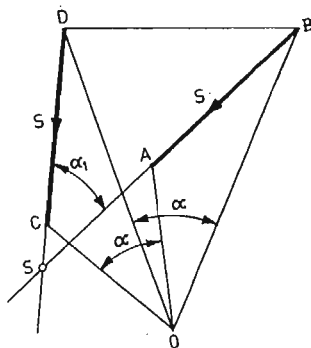


Rys. 6.



Rys. 7.

na poszczególnych prętach posłużmy się następującym rozumowaniem. Wybieramy odcinek  $AB$  (rys. 8) i dokonujemy jego obrotu względem chwilowego środka obrotu  $O$ . Punkty  $A$  i  $B$  po obrocie przyjmują położenie  $C$  i  $D$ . Przeprowadzamy proste przez  $A$  i  $B$  oraz przez  $C$  i  $D$ .  $S$  jest punktem przecięcia się tych prostych. Można wykazać, że kąt  $\alpha_1$  (kąt przecięcia się prostych  $ABS$  i  $CDS$ ) jest równy kątowi  $\alpha$  (co łatwo można sprawdzić prostym rachunkiem).



Rys. 8.

Jak wynika z rys. 8 przemieszczenie styczne odcinka  $AB$  na kierunku  $AB$  (kierunek współrzędnej  $s$ ) jest równe

$$\Delta_{AB} = SA - SC \quad (3.12)$$

lub

$$\Delta_{AB} = SB - SD. \quad (3.13)$$

Określone relacjami (3.12) lub (3.13) przemieszczenie styczne jest po prostu funkcją  $\psi$  dla odcinka  $AB$ .

Postępując w podany wyżej sposób potrafimy określić przemieszczenia styczne dla każ-



dego pręta przy zadanym przemieszczeniu innego pręta (rys. 7), a tym samym funkcję  $\psi_1$ . Funkcje  $\psi_2$  i  $\psi_3$  określamy analogicznie.

**3.3.2. Przekrój pręta nie jest ciałem sztywnym.** Przekrój pręta nie będący ciałem sztywnym posiada więcej niż trzy stopnie swobody. W celu określenia funkcji  $\psi$  postępujemy następująco:

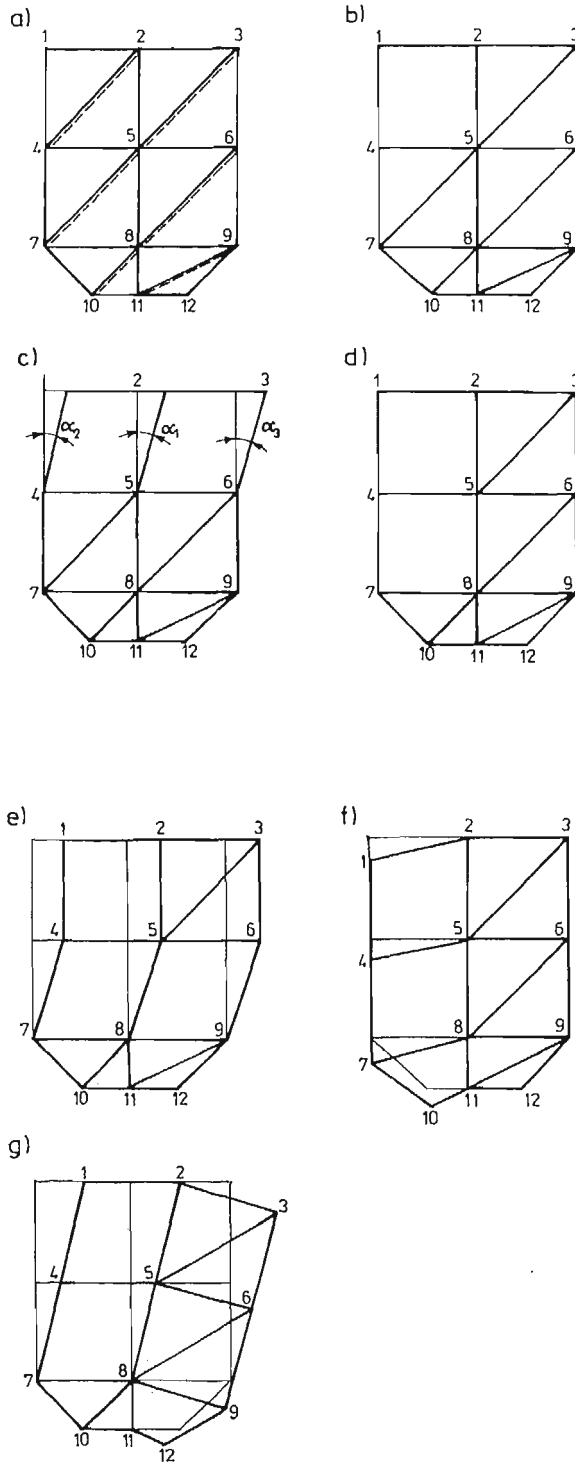
- a) wprowadzamy połączenia fikcyjne między węzłami w takiej liczbie aby cały przekrój składał się z samych trójkątów (liczba węzłów nie może ulec zmianie — pręty fikcyjne nie mogą się krzyżować).
- b) Przekrój złożony z samych trójkątów jest ciałem sztywnym więc możemy określić trzy funkcje  $\psi$  dla takiego profilu w sposób podany w p. 3.3.1 pracy. Oczywiście przemieszczenia będą rejestrowane tylko dla połączeń rzeczywistych bez względu na to czy wybrany trójkąt, którego wierzchołki są chwilowymi środkami na boki utworzone z połączeń fikcyjnych czy rzeczywistych.
- c) Pozostałe funkcje w ilości  $(k-3)$  określamy z warunku wystąpienia możliwości deformacji przekroju.

Przy określaniu  $k-3$  funkcji  $\psi$  postępujemy w sposób opisany niżej. W tym celu wybieramy dowolny pręt fikcyjny, usuwamy go i sprawdzamy czy taki przekrój jest nadal ciałem sztywnym (tzn. czy jest to pręt „przesztywniający” czy nie). Jeżeli przekrój będzie pozostał ciałem sztywnym usuwamy kolejny pręt fikcyjny i postępujemy jak poprzednio (proces powtarzamy dotąd dopóki przekrój pozostaje ciałem sztywnym). W przypadku kiedy przekrój już nie jest ciałem sztywnym otrzymujemy czworokąt (przynajmniej jeden), który na pewno może się deformować.

Wybieramy dwa sąsiednie wierzchołki czworokąta i zakładamy, że się nie przemieszczą. W związku z tym możemy określić przemieszczenia dla części przyległej do odcinka łączącego te wierzchołki — są równe zero. Pozostałe dwa wierzchołki czworokąta przemieszczą się. Wybieramy pręt łączący wierzchołek nieruchomy z ruchomym i przyjmujemy, że obróci się o kąt  $\alpha = 1$ . Z relacji geometrycznych określamy kąt o jaki obróci się pręt łączący pozostałe dwa wierzchołki (ruchomy i nieruchomy) oraz określamy przemieszczenia styczne pręta łączącego wierzchołki ruchome. W następnym kroku określamy przemieszczenia elementów przyległych do obracanych boków i boku przesuwanego.

Zilustrujemy sposób postępowania rysunkiem 9. Na rys. 9a przedstawiono profil rzeczywisty z wprowadzonymi połączeniami fikcyjnymi (linia przerywana) o 7 stopniach swobody. Na rys. 9b przedstawiono profil po usunięciu jednego połączenia fikcyjnego. Jeżeli teraz wszystkie połączenia fikcyjne potraktujemy jako rzeczywiste to profil ten jest nadal sztywny (wynika to z relacji (3.2) i (3.9)). Dopiero usunięcie połączenia 5-3 rys. 9c powoduje możliwość wystąpienia deformacji w płaszczyźnie przekroju (linia pogrubiona).

Założyliśmy, że wierzchołki 5 i 6 są nieruchome, stąd część 4-5-6-7-8-9-10-11-12 profilu nie przemieszcza się. Pręt 2-5 obróci się o kąt  $\alpha_1$ , spowoduje to obrót pręta 1-4 o kąt  $\alpha_2$  (na ogół  $\alpha_1 \neq \alpha_2$ ) i wywoła na 1-2 przemieszczenie. Pręt 3-6 obróci się o kąt  $\alpha_3$  ( $\alpha_1 \neq \alpha_3$ ) jeżeli 2-3 nie jest równoległe do 5-6) i wywoła przemieszczenie na 2-3. W ten sposób określamy funkcję  $\psi_4$ . Kolejne funkcje  $\psi$  określamy następująco. Wstawiamy ponownie połączenie fikcyjne ostatnio usunięte (połączenie 5-3) i zwalnimy następnego połączenie fikcyjne np. 5-7. Okazuje się, że profil jest sztywny (rys. 9d). Zwalnimy zatem kolejne połączenie



Rys. 9.

np. 8-6 (rys. 9e) i otrzymujemy sposób deformacji jak na rys. 9e — linia pogrubiona. W ten sposób określiliśmy funkcję  $\psi_5$ . Pozostałe funkcje przedstawiono na rys. 9f i 9g.

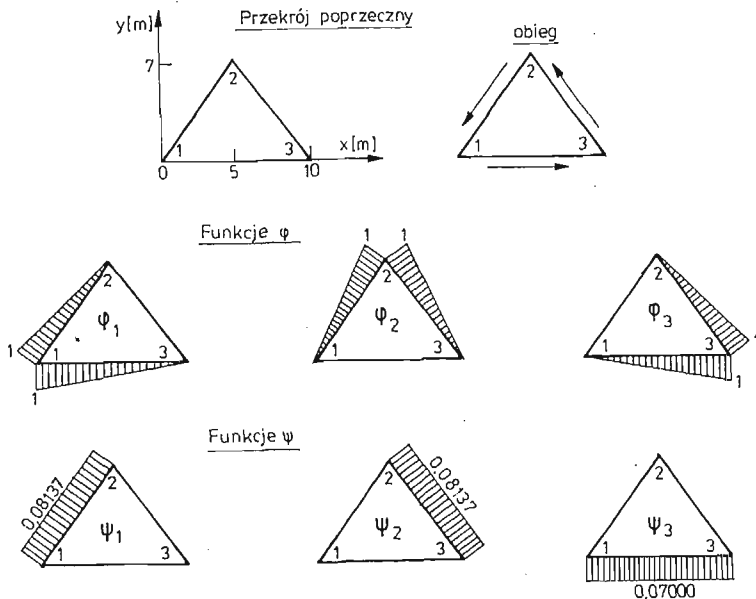
**3.4. Równania równowagi.** Określone wyżej funkcje kształtu  $\psi_k(s)$  są stałe na odcinkach międzywęzłowych. Pochodne względem  $s$  na poszczególnych odcinkach są równe zero, a zatem wszystkie współczynniki w macierzach równania (2.7) zawierające  $\psi'(s)$  są równe zero. Układ równań (2.7) zapisujemy teraz w postaci:

$$\begin{bmatrix} [M_{q\varphi}] \\ [M_{\psi\psi}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ \vdots \\ T_r \end{Bmatrix}'' + \begin{bmatrix} -[M_{\varphi'\psi}]^T \\ [M_{\varphi'\varphi}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ \vdots \\ T_r \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} [M_{q'\psi'}] \\ [M_{FF}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ \vdots \\ T_r \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_r \end{Bmatrix} \quad (3.14)$$

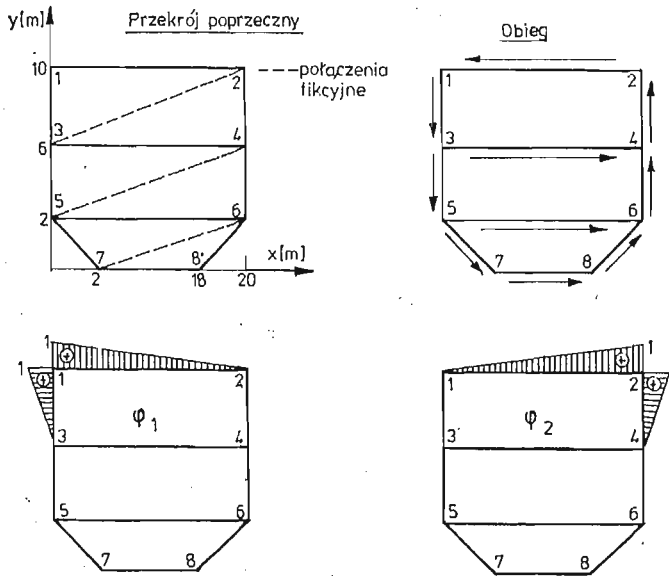
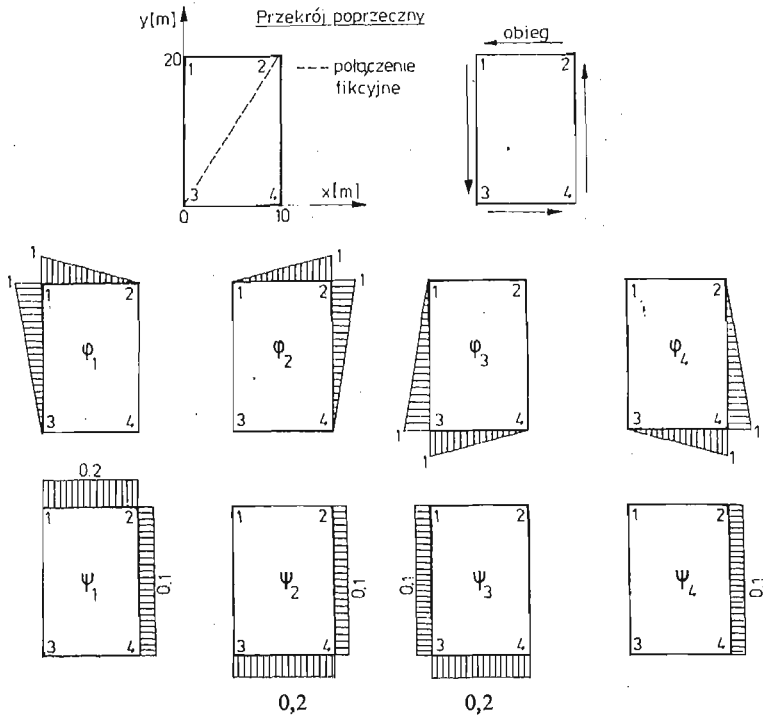
Wybierając funkcje  $\varphi_i(s)$  (rys. 2) i funkcje  $\psi_k(s)$  w sposób opisany wyżej możemy przy użyciu maszyny cyfrowej automatycznie budować macierze współczynników układu równań (3.14) dla prętów cienkościennych przyzmatycznych o przekroju wieloobwodowym zamkniętym składającym się z wielokątów dowolnego kształtu.

#### 4. Przykłady zastosowań

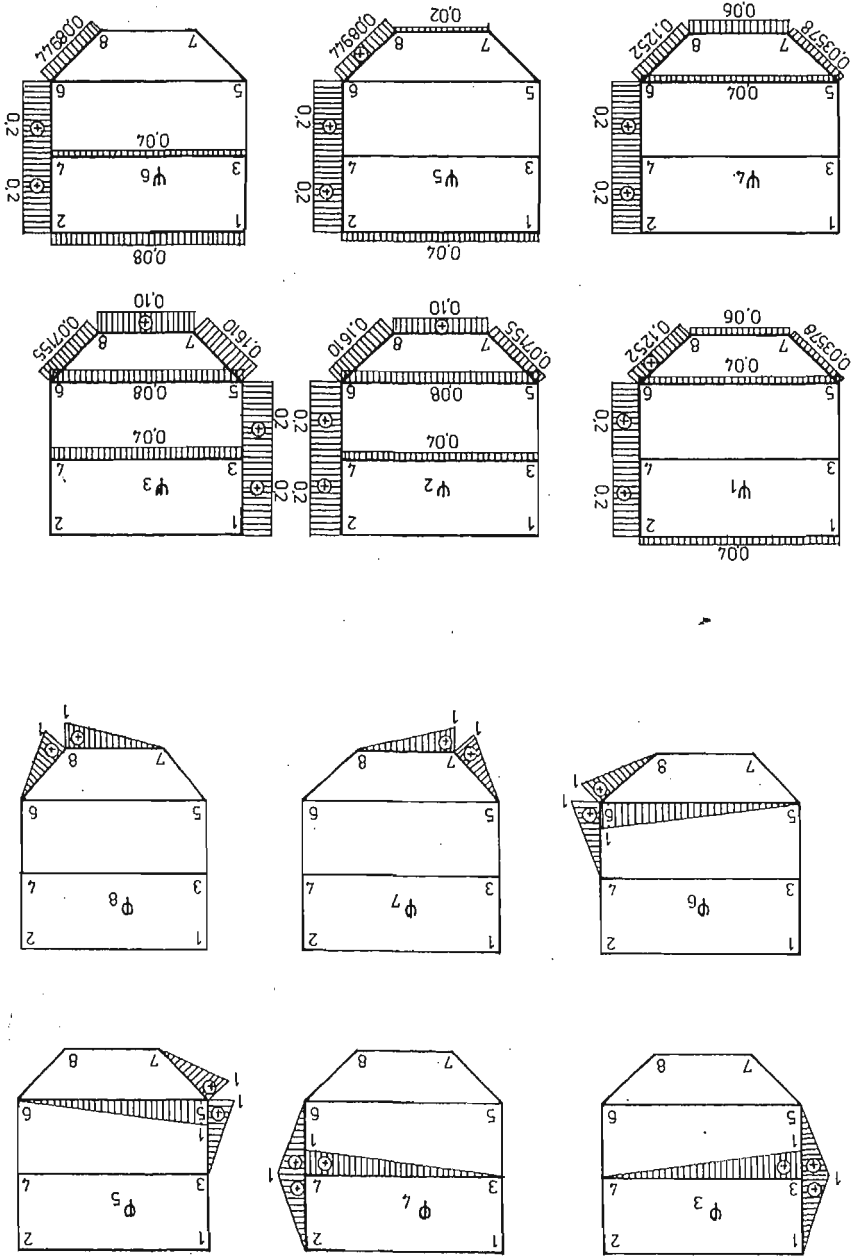
Na rys. 10, 11, 12, 13 przedstawiono kilka przykładów, dla których za pomocą maszyny cyfrowej uzyskano funkcje kształtu  $\varphi$  i  $\psi$ . Dla zadanego profilu maszyna cyfrowa wybrała kierunek wzrostu współrzędnej obwodowej  $s$  (obieg) i w zależności od przyjętej współrzędnej obliczone zostały funkcje  $\psi$ . Na rys. 14, 15 przedstawiono różne funkcje kształtu  $\psi$  uzyskane dla tego samego profilu w zależności od sposobu przyjęcia połączeń fikcyjnych i numeracji węzłów. Dla tego przypadku wykorzystano sposób rozwiązywania

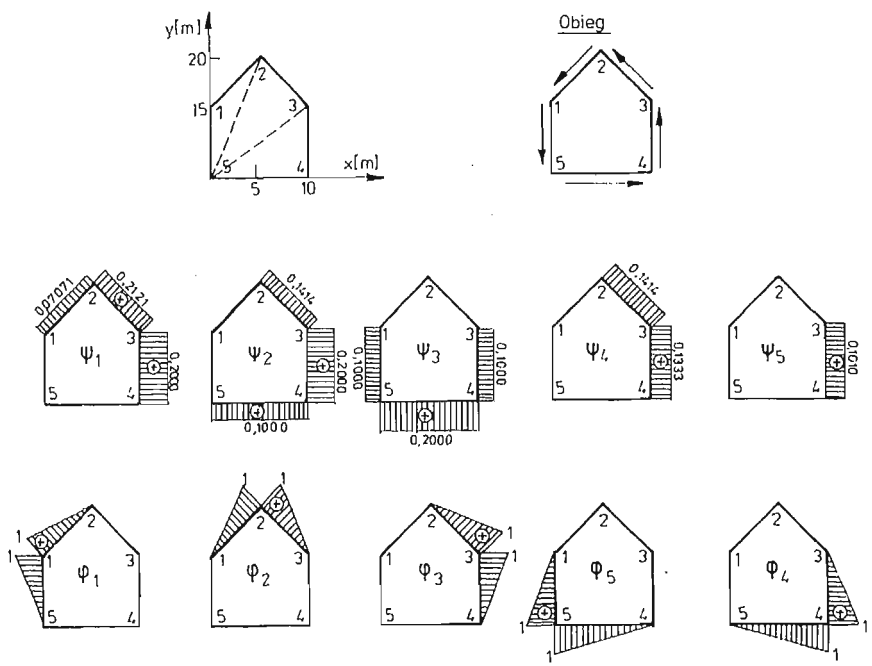


Rys. 10.

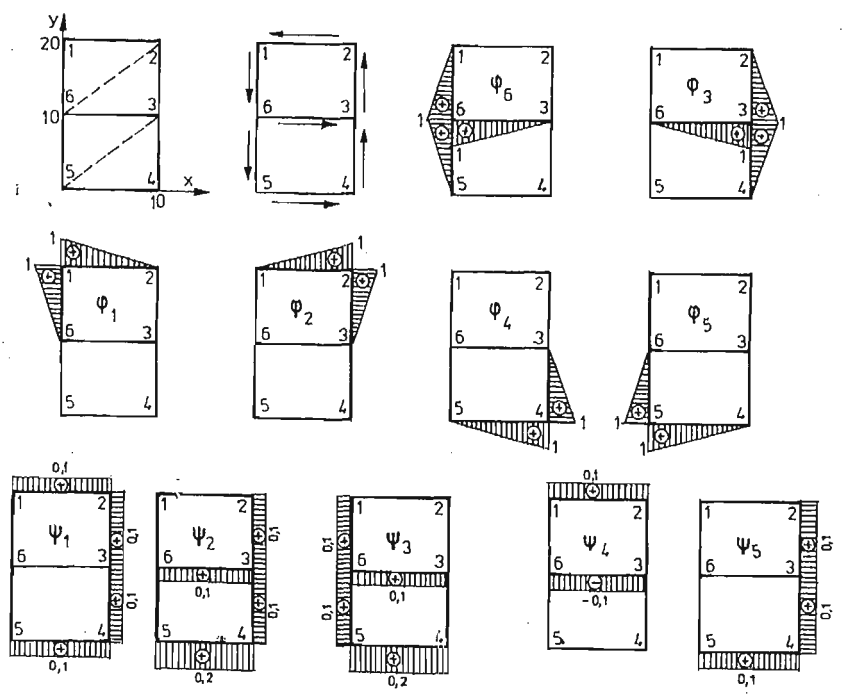


Rys. 12.

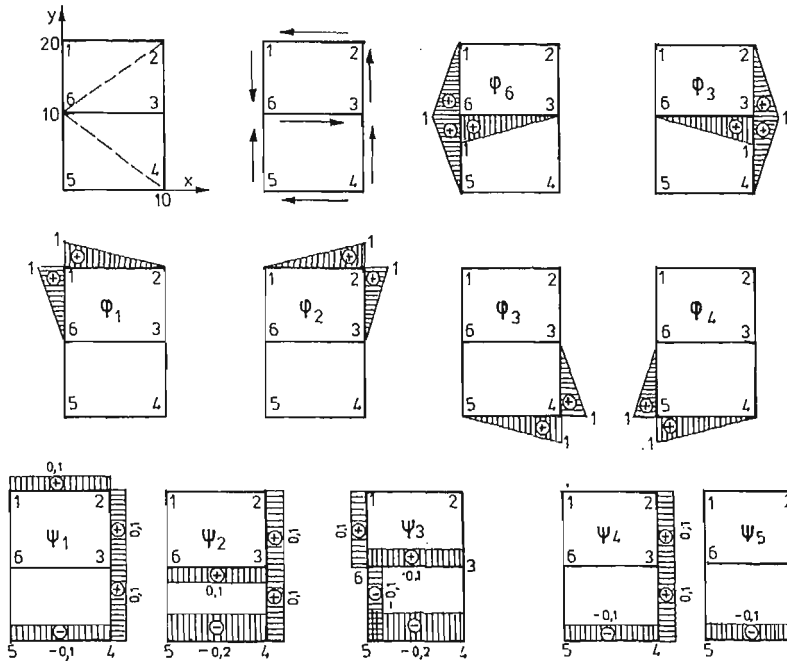




Rys. 13.



Rys. 14.



Rys. 15.

równań równowagi przedstawiony w [1]. Uzyskano dokładnie te same wartości naprężeń i przemieszczeń w poszczególnych przekrojach przy tych samych warunkach obciążenia i zamocowania końców (rys. 16).

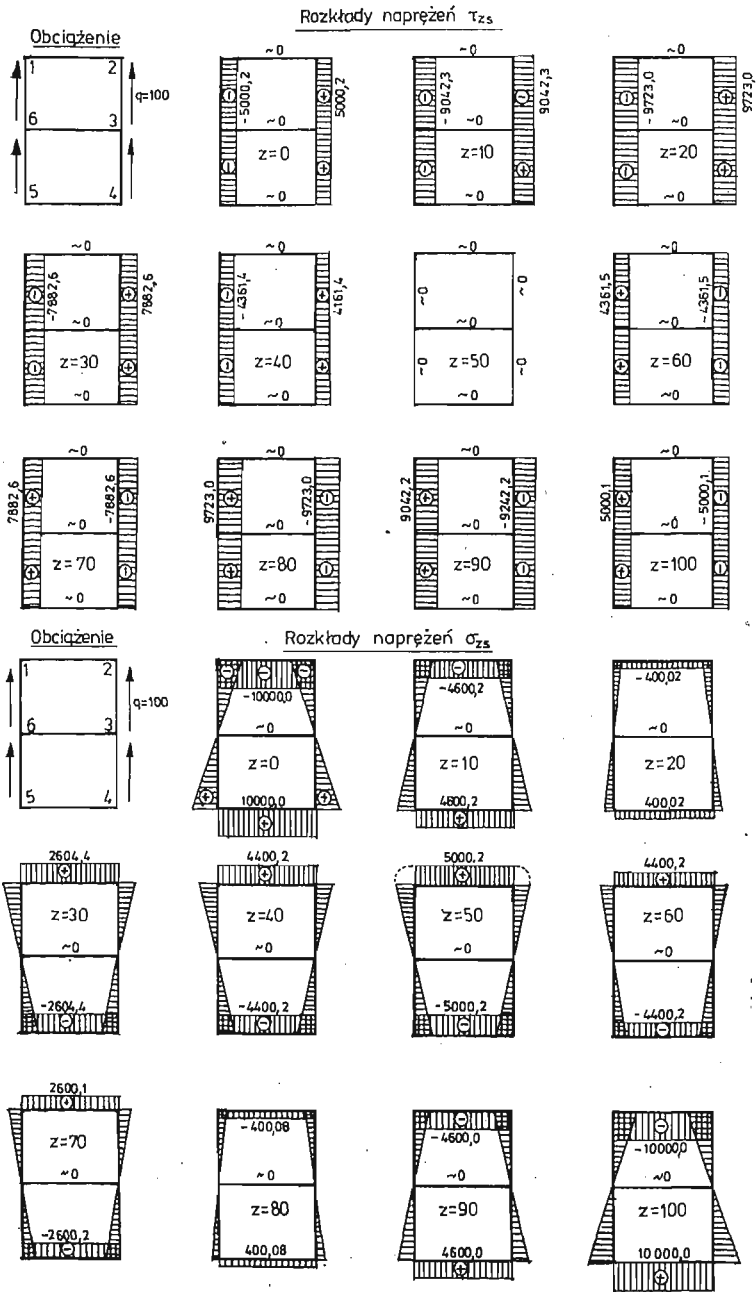
## 5. Wnioski

Przedstawiona w niniejszej pracy metoda pozwala:

- układać równania równowagi w obliczeniach statycznych prętów cienkościennych przyrównanych o dowolnym przekroju zamkniętym wieloobwodowym
- automatycznie budować macierze współczynników układu równań równowagi (3.14), w których interpretacja niewiadomych nie jest w trakcie pracy maszyny cyfrowej znana
- rozwiązywać ten sam problem przy różnych funkcjach kształtu.

## Literatura

- Z. GÓRECKI, *Zastosowanie półbezmomentowej teorii powłok w obliczeniach ortotropowych liniowo-sprężystych prętów cienkościennych przyrównanych o przekroju wieloobwodowym zamkniętym*. Mechanika Teoretyczna i Stosowana 1982, T. 20 Zeszyt 3 - 4 str. 339 - 359.
- Z. GÓRECKI, *Zastosowanie półbezmomentowej teorii powłok do obliczeń kadłubów bezgrodziowych*. Praca doktorska. Instytut Okrętowy Politechniki Gdańskiej, Gdańsk 1980 (nieopublikowana).
- В. З. ВЛАСОВ, *Тонкостенные упругие стержни*. Государственный Издат. Физ.-Мат. Лит. Москва 1959.
- J. WIĘCKOWSKI, J. DREWKO, M. SPERSKI, *Równania równowagi i obliczenia numeryczne powłok liniowo-sprężystych o wielospójnym prostokątnym przekroju*. II Konferencja Konstrukcje powłokowe, teoria i zastosowanie, Gohń 6 - 10.11.1978.



Rys. 16.



## Р е з ю м е

## МЕТОД АВТОМАТИЧЕСКОГО ПОСТРОЕНИЯ УРАВНЕНИЙ РАВНОВЕСИЯ В РАСЧЁТЕ СТАТИЧЕСКИХ ОРТОТРОПНЫХ, ЛИНЕЙНО-УПРУГИХ, ТОНКОСТЕННЫХ ПРИЗМАТИЧЕСКИХ СТЕРЖНЕЙ ПРОИЗВОЛЬНОГО МНОГОСВЯЗНОГО ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ

В работе использовано принципы полу-безмоментной теории оболочек в расчётах статических призматических стержней произвольного многосвязного поперечного сечения. Представлено метод строения дифференциальных уравнений равновесия принимая специальный метод конструирования функции формы —  $\psi$  для касательных напряжений. Приведенный метод применено в программе на ЭБМ к автоматическому генерированию матриц коэффициентов системы уравнений равновесия, в которых интерпретация неизвестных во время работы вычислительной машины неизвестна. Этим методом можна решить задачу для разных функций формы —  $\psi$ . Метод иллюстрировано рисунками и примерами расчётов на ЭБМ.

## S u m m a r y

## METHOD OF AUTOMATIC CONSTRUCTION OF DIFFERENTIAL EQUATIONS IN COMPUTATION OF STATIC, ORTHOTROPIC, LINEARLY ELASTIC, THIN-WALLED PRISMATIC BARS OF MULTI CONNECTED CROSS-SECTION

The assumptions of the semi-momentless theory of shells have been applied in the computation of static, thin-walled, prismatic bars of multi connected cross-section. In order to construct the differential equilibrium equations we use the shape function  $\psi$  for the tangential displacement. A procedure has been adopted in the computer program for the automatic generation of the coefficient matrix of the system of the equilibrium equations where the interpretation of the unknowns is not know during the working time of the computer. The method enables us to solve the problem for various shape functions. The method have been illustrated by the results obtained on digital computer, and on diagrams.

*Praca wpłynęła do Redakcji dnia 23 września 1982 roku.*

---