

JEDNOWYMIAROWY CIĄGŁY MODEL STATECZNOŚCI SPRĘŻYSTEJ SIATKOWYCH DŹWIGARÓW POWIERZCHNIOWYCH

ROMAN NAGÓRSKI

Politechnika Warszawska

1. Wstęp

Przedmiotem pracy jest stateczność w zakresie sprężystym siatkowych dźwigarów powierzchniowych o gęstej i regularnej siatce elementów. Celem rozprawy jest wyprowadzenie równań jednowymiarowego modelu ciągłego powyższego problemu [1]. Poszukiwane równania uzyskamy, stosując koncepcję kontinuum z więzami wewnętrznymi [2] do powierzchniowego ośrodka typu Cosseratów, będącego ciągłym dwuwymiarowym modelem rozważanych dźwigarów [3].

Prezentowany problem jest złożony. Stosowanie opisu dyskretnego prowadzi do kosztownych obliczeń lub znanych trudności z uzyskaniem „zamkniętych rozwiązań” szerszej klasy równań różnicowych [4, 5]. Wykorzystanie opisu kontynualnego [3] powoduje konieczność całkowania równań różniczkowych cząstkowych. Możliwość otrzymania rozwiązań analitycznych tych równań jest ograniczony, natomiast przybliżone całkowanie numeryczne jest na ogół również stosunkowo kosztowne. Z powyższych względów liczba uzyskanych do tej pory rozwiązań jest niewielka i dotyczy szczególnych rodzajów kształtu i struktury dźwigara oraz typu obciążenia i warunków brzegowych (por. np. [3], [4]). Wydaje się zatem, że celowe jest poszukiwanie prostych i dostatecznie dokładnych modeli stateczności rozpatrywanych dźwigarów, zezwalających na rozszerzenie zakresu możliwości do efektywnego rozwiązania zadań praktycznych.

W tej pracy przyjmujemy następujące założenia:

1. Przez zagadnienie stateczności rozumiemy problem wyznaczenia krytycznej wartości obciążenia, dla której możliwe są różne postacie położenia równowagi. Inaczej mówiąc, dla pewnej wartości parametru stanu obciążenia istnieją nieznikające tożsamościowo funkcje określające stan przemieszczenia, zaburzające podstawowe położenie równowagi, tak że bez zmiany obciążenia zewnętrznego i warunków podparcia możliwa jest dalej równowaga konstrukcji.

2. Materiał dźwigara jest liniowo-sprężysty.

3. Przemieszczenia i odkształcenia są małe, umożliwiające wykorzystanie liniowej postaci związków geometrycznych.

4. W równaniach równowagi, w statystycznych warunkach brzegowych oraz w związkach wiążących składowe pól statycznych i geometrycznych w bazie konfiguracji odkształ-

conej i nieodkształconej można pominąć składniki jawnie nieliniowe względem składowych stanu przemieszczenia.

5. O utracie stateczności położenia równowagi decyduje liniowa część przyrostu (wariacji) równań równowagi względem przyrostu składowych stanu przemieszczenia, zaburzających stan równowagi podstawowej.

6. Powierzchnia podstawowa dźwigara w konfiguracji początkowej różni się od tej powierzchni w konfiguracji aktualnej głównie położeniem w przestrzeni i kształtem, tzn. zmiana na skutek deformacji długości elementarnych łuków i pól elementarnych powierzchni nie wpływa na stateczność położenia równowagi.

7. Stan podstawowy (niezaburzony) konstrukcji obciążonej można określić korzystając z równań liniowych teorii infinitesimalnej (przy uwzględnieniu zasady zeszywnienia).

8. Spełnione są założenia stosowalności ciągłego modelu pierwszego przybliżenia konstrukcji siatkowych. W szczególności powierzchnia podstawowa składa się z pewnej liczby gładkich płatów niezbyt zakrzywionych; osie elementów tworzą gęstą, regularną i dyskretną siatkę krzywych na tej powierzchni [3].

9. Będziemy rozważać ruszty powierzchniowe złożone z dwu lub trzech rodzin prętów w przybliżeniu przyrównanych, dostatecznie smukłych i sztywno połączonych w węzłach, oraz powłoki perforowane o stałej grubości, złożone z dwu rodzin elementów o niezbyt dużej szerokości, tworzących siatkę ortogonalną.

10. Równania idealnych więzów typu kinematycznego i statecznego są całkowalne i liniowe.

11. Równania jednowymiarowego modelu stateczności wyprowadzimy dla dźwigarów ukształtowanych na powierzchni w kształcie jednoparametrowej rodziny konturów łukowo gładkich.

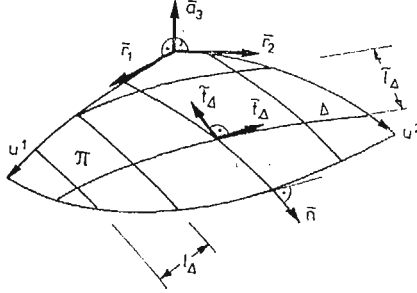
Wymienione wyżej założenia ograniczają oczywiście zakres stosowalności prezentowanej dalej teorii. Jednak przypadki spełniające przyjęte postulaty stanowią z praktycznego punktu widzenia ważną klasę konstrukcji. Pewne wątpliwości mogą nasuwać silne założenie liniowości równań stateczności. Wydaje się jednak, że dla określenia krytycznego obciążenia powodującego „globalną” utratę stateczności dźwigarów dostatecznie „smukłych” względem jednego z charakterystycznych wymiarów, wyprowadzone w pracy równania mogą być użyteczne.

W podanych dalej równaniach i wzorach będziemy stosować ujęcie tensorowe w notacji wskaźnikowej. Konwencja sumacyjna dotyczy wskaźników oznaczonych małymi literami greckimi przyjmującymi wartości „1” i „2”.

2. Równania stateczności teorii dwuwymiarowej z węzami wewnętrznymi

Niech π oznacza płat powierzchni podstawowej dźwigara powierzchniowego w konfiguracji początkowej, parametryzowanej współrzędnymi (u^α) , $(\bar{r}_\alpha, \bar{a}_3)$ i $(\bar{r}_\alpha, \bar{a}_3)$ — bazę i kobazę lokalną, $g_{\alpha\beta}$, $b_{\alpha\beta}$, $e_{\alpha\beta}$ — tensor metryczny, krzywiznowy i pseudotensor Ricciego, $(\dots)_|$ — symbol powierzchniowej pochodnej kowariantnej, $\bar{n} = n^\alpha r_\alpha = n_\alpha \bar{r}^\alpha$ — wersor normalny do przekroju normalnego powierzchni π , w szczególności brzegowego $\partial\pi$ (rys. 1).

Przez π_0 oznaczymy obraz π po deformacji, przez $(\vec{r}_\alpha, \vec{a}_3)$ i $(\vec{r}^\alpha, \vec{a}_3)$ — bazę i kobazę lokalną, $\hat{g}_{\alpha\beta}$ — tensor metryczny przy parametryzacji π_0 również współrzędnymi (u^α) , a przez $\hat{n} = \hat{n}^\alpha \vec{r}_\alpha = \hat{n}_\alpha \vec{r}^\alpha$ wektor normalny do przekroju normalnego π_0 , będącego obrazem przekroju normalnego π .



Rys. 1

Na mocy założenia 4, 6, po wykorzystaniu znanych z geometrii wzorów, przyjmiemy

$$\vec{r}_\alpha = \vec{r}_\alpha + \dot{\gamma}_{\alpha\beta} \vec{r}^\beta + \dot{\gamma}_\alpha \vec{a}_3, \quad \vec{a}_3 = \vec{a}_3 - \dot{\gamma}_\alpha \vec{r}^\alpha, \quad (2.1)$$

$$\sqrt{\hat{g}} = \sqrt{g}, \quad \hat{n}_\alpha = \dot{n}_\alpha, \quad \hat{g}_{\alpha\beta} du^\alpha du^\beta = g_{\alpha\beta} du^\alpha du^\beta,$$

gdzie

$$\dot{\gamma}_{\alpha\beta} = v_\beta|_\alpha - b_{\alpha\beta} v, \quad \dot{\gamma}_\alpha = v|_\alpha + b_\alpha^\beta v_\beta, \quad (2.2)$$

a $\bar{v} = v_\alpha \vec{r}^\alpha + v \vec{a}_3$ jest wektorem przemieszczenia i $\vartheta = \vartheta_\alpha \vec{r}^\alpha + \vartheta \vec{a}_3$ — rozpatrywanym dalej wektorem małego obrotu cząstki ośrodka.

Oznaczmy przez $\bar{p}(\bar{n})$ i $\bar{m}(\bar{n})$ gęstość liniową siły i momentu oddziaływań wewnętrznych w ośrodku w przekroju o normalnej \bar{n} .

Dokonując rozkładu

$$\begin{aligned} \bar{p}(\bar{n}) &= \hat{p}^{\beta\alpha} \hat{n}_\beta \vec{r}^\alpha + \hat{p}^\beta \hat{n}_\beta \vec{a}_3 = p^{\beta\alpha} \dot{n}_\beta \vec{r}^\alpha + p^\beta \dot{n}_\beta \vec{a}_3, \\ \bar{m}(\bar{n}) &= \hat{m}^{\beta\alpha} \hat{n}_\beta \vec{r}^\alpha + \hat{m}^\beta \hat{n}_\beta \vec{a}_3 = m^{\beta\alpha} \dot{n}_\beta \vec{r}^\alpha + m^\beta \dot{n}_\beta \vec{a}_3 \end{aligned} \quad (2.3)$$

otrzymujemy po uwzględnieniu (2.1) zależności

$$\begin{aligned} \hat{p}^{\beta\alpha} &= p^{\beta\alpha} + g^{\alpha\delta} \dot{\gamma}_{\gamma\delta} p^{\beta\gamma} - g^{\alpha\delta} \dot{\gamma}_\delta p^\beta, & \hat{p}^\beta &= p^\beta + \dot{\gamma}_\gamma p^{\beta\gamma}, \\ \hat{m}^{\beta\alpha} &= m^{\beta\alpha} + g^{\alpha\delta} \dot{\gamma}_{\gamma\delta} m^{\beta\gamma} - g^{\alpha\delta} \dot{\gamma}_\delta m^\beta, & \hat{m}^\beta &= m^\beta + \dot{\gamma}_\gamma p^{\beta\gamma}, \end{aligned} \quad (2.4)$$

Wprowadzając gęstości powierzchniowe obciążenia zewnętrznego typu sił i momentów $\bar{q} = q^\alpha \vec{r}_\alpha + q \vec{a}_3$, $\bar{h} = h^\alpha \vec{r}_\alpha + h \vec{a}_3$ i gęstości liniowe obciążenia brzegowego $\bar{p} = p^\alpha \vec{r}_\alpha + p \vec{a}_3$, $\bar{m} = m^\alpha \vec{r}_\alpha + m \vec{a}_3$ otrzymujemy w znany sposób przy wykorzystaniu zał. 4 i 6 i (2.3), (2.1) równania równowagi elementu „ $d\pi$ ”

$$\begin{aligned} \hat{p}^{\beta\alpha}|_\beta - b_\beta^\alpha \hat{p}^\beta + q^\alpha + r^\alpha &= 0, & \hat{p}^\alpha|_\alpha + b_{\alpha\beta} \hat{p}^{\alpha\beta} + q + r &= 0, \\ \hat{m}^{\beta\alpha}|_\beta - b_\beta^\alpha \hat{m}^\beta + e_\beta^\alpha \hat{p}^\beta + e^{\alpha\gamma} \dot{\gamma}_{\beta\gamma} \hat{p}^\beta + e_\beta^\alpha \dot{\gamma}_\gamma \hat{p}^{\gamma\beta} + h^\alpha + s^\alpha &= 0, \\ \hat{m}^\alpha|_\alpha + b_{\alpha\beta} \hat{m}^{\alpha\beta} + e_{\alpha\beta} \hat{p}^{\alpha\beta} + e_\alpha^\gamma \dot{\gamma}_{\beta\gamma} \hat{p}^{\beta\alpha} + h + s &= 0, \end{aligned} \quad (2.5)$$

oraz statyczne warunki brzegowe

$$\begin{aligned} \dot{p}^{\beta\alpha} n_\beta &= \dot{p}^\alpha + \tau^\alpha, & \dot{p}^\beta n_\beta &= \dot{p} + \tau, \\ \dot{m}^{\beta\alpha} n_\beta &= \dot{m}^\alpha + \mu^\alpha, & \dot{m}^\beta n_\beta &= \dot{m} + \mu, \end{aligned} \quad (2.6)$$

gdzie r^α , r i s^α , s oraz τ^α , τ i μ^α , μ są składowymi w bazie $(\bar{r}_\alpha, \bar{a}_3)$ reakcji typu sił i momentów odpowiednio na π_0 i $\partial\pi_0$ więzów wewnętrznych typu kinematycznego nałożonych a priori na stan przemieszczenia ośrodka [1, 2].

Geometryczne warunki brzegowe przyjmujemy w postaci

$$v_\alpha = \dot{v}_\alpha, \quad v = \dot{v}, \quad \vartheta_\alpha = \dot{\vartheta}_\alpha, \quad \vartheta = \dot{\vartheta} \quad (2.7)$$

gdzie \dot{v}_α , \dot{v} oraz $\dot{\vartheta}_\alpha$, $\dot{\vartheta}$ są składowymi danego na brzegu wektora przemieszczenia $\dot{\bar{v}}$ i obrotu $\dot{\bar{\vartheta}}$ w bazie $(\bar{r}^\alpha, \bar{a}_3)$.

Postulujemy idealność więzów typu kinematycznego za pomocą zasady

$$\int_\pi (r^\alpha \delta v_\alpha + r \delta v + s^\alpha \delta \vartheta_\alpha + s \delta \vartheta) d\pi + \int_{\partial\pi} (\tau^\alpha \delta v_\alpha + \tau \delta v + \mu^\alpha \delta \vartheta_\alpha + \mu \delta \vartheta) d(\partial\pi) = 0, \quad (2.8)$$

dla dowolnych wariacji δv_α , δv , $\delta \vartheta_\alpha$, $\delta \vartheta$ zgodnych z więzami, których równania sprecyzujemy dalej.

Związki fizyczne przyjmiemy w postaci (por. [3] i zał. 2)

$$\begin{aligned} p^{\alpha\beta} &= A^{\alpha\beta\xi\eta} \gamma_{\xi\eta}, & p^\alpha &= A^{\alpha\xi} \gamma_\xi, \\ m^{\alpha\beta} &= B^{\alpha\beta\xi\eta} \chi_{\xi\eta}, & m^\alpha &= B^{\alpha\xi} \chi_\xi, \end{aligned} \quad (2.9)$$

gdzie $A^{\alpha\beta\xi\eta}$, ..., $B^{\alpha\xi}$ oznaczają tensory sztywności sprężystej, a $\gamma_{\xi\eta}$, ..., χ_ξ — składowe tensorów odkształcenia.

Jeżeli nakładamy na składowe stanu napięcia więzy idealne [1, 2], to przy uwzględnieniu (2.1)₃ mamy

$$\int_\pi [(\gamma_{\alpha\beta} - \gamma_{\alpha\beta}^*) \delta p^{\alpha\beta} + (\gamma_\alpha - \gamma_\alpha^*) \delta p^\alpha + (\chi_{\alpha\beta} - \chi_{\alpha\beta}^*) \delta m^{\alpha\beta} + (\chi_\alpha - \chi_\alpha^*) \delta m^\alpha] d\pi = 0 \quad (2.10)$$

dla dowolnych wariacji $\delta p^{\alpha\beta}$, δp^α , $\delta m^{\alpha\beta}$, δm^α zgodnych z więzami typu kinetycznego, których równania sprecyzujemy dalej, natomiast (por. [3] i zał. 3)

$$\begin{aligned} \gamma_{\alpha\beta}^* &= v_\beta|_\alpha - b_{\alpha\beta} v + e_{\alpha\beta} \vartheta, & \gamma_\alpha^* &= v|_\alpha + b_\alpha^\beta v_\beta + e_\alpha^\beta \vartheta_\beta, \\ \chi_{\alpha\beta}^* &= \vartheta_\beta|_\alpha - b_{\alpha\beta} \vartheta, & \chi_\alpha^* &= \vartheta|_\alpha + b_\alpha^\beta \vartheta_\beta. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Rozważymy przypadek, gdy ośrodek jest ciągłym dwuwymiarowym modelem dźwigara siatkowego (por. zał. 8, [3]) złożonego z kilku rodzin Δ ($\Delta = \text{I, II, III, ...}$) elementów, których osie tworzą regularną siatkę dyskretną krzywych na powierzchni podstawowej (rys. 1).

Wprowadzamy na π wzdłuż każdej krzywej rodziny Δ ortonormalną bazę $(\bar{t}_\Delta, \bar{\tilde{t}}_\Delta)$ gdzie \bar{t}_Δ jest wersorem stycznym, $\bar{\tilde{t}}_\Delta = a_3 \times \bar{t}_\Delta$ — normalnym, przy czym

$$\bar{t}_\Delta = t^\alpha \bar{r}_\alpha, \quad \bar{\tilde{t}}_\Delta = \tilde{t}^\alpha \bar{r}_\alpha. \quad (2.12)$$

Jeżeli $\bar{t}_\Delta^0 = \bar{t}_\Delta^\alpha \bar{r}_\alpha$, $\bar{\tilde{t}}_\Delta^0 = \bar{\tilde{t}}_\Delta^\alpha \bar{r}_\alpha$ są odpowiednio obrazami \bar{t}_Δ i $\bar{\tilde{t}}_\Delta$ po deformacji, to zgodnie z zał. 4, 6 można przyjąć

$$\bar{t}_\Delta^\alpha = t_\Delta^\alpha, \quad \bar{\tilde{t}}_\Delta^\alpha = \tilde{t}_\Delta^\alpha. \quad (2.13)$$

W przypadku rusztu prętowego (por. zał. 9) przy uwzględnieniu (2.13) jest [3]

$$\begin{aligned} A^{\alpha\beta\xi\eta} &= \sum_{\Delta} t_{\Delta}^{\alpha} t_{\Delta}^{\xi} (t_{\Delta}^{\beta} t_{\Delta}^{\eta} R_{\Delta} + \tilde{t}_{\Delta}^{\beta} \tilde{t}_{\Delta}^{\eta} \tilde{R}_{\Delta}), & A^{\alpha\xi} &= \sum_{\Delta} t_{\Delta}^{\alpha} t_{\Delta}^{\xi} \check{R}_{\Delta}, \\ B^{\alpha\beta\xi\eta} &= \sum_{\Delta} t_{\Delta}^{\alpha} t_{\Delta}^{\xi} (t_{\Delta}^{\beta} t_{\Delta}^{\eta} S_{\Delta} + \tilde{t}_{\Delta}^{\beta} \tilde{t}_{\Delta}^{\eta} \tilde{S}_{\Delta}), & B^{\alpha\xi} &= \sum_{\Delta} t_{\Delta}^{\alpha} t_{\Delta}^{\xi} \check{S}_{\Delta}, \end{aligned} \quad (2.14)$$

gdzie

$$\begin{aligned} R_{\Delta} &= \frac{E_{\Delta} A_{\Delta}}{\tilde{l}_{\Delta}}, & \tilde{R}_{\Delta} &= \frac{12 E \check{J}}{\tilde{l}_{\Delta} l^2}, & \check{R} &= \frac{12 E_{\Delta} \check{J}}{\tilde{l}_{\Delta} l^2}, \\ S_{\Delta} &= \frac{G_{\Delta} J_{\Delta}}{\tilde{l}_{\Delta}}, & \tilde{S}_{\Delta} &= \frac{E_{\Delta} \check{J}_{\Delta}}{\tilde{l}_{\Delta}}, & \check{S}_{\Delta} &= \frac{E_{\Delta} \check{J}_{\Delta}}{\tilde{l}_{\Delta}}, \end{aligned} \quad (2.15)$$

przy czym E_{Δ} , G_{Δ} oznaczają moduł Younga i moduł skręcania, l_{Δ} , \tilde{l}_{Δ} — długość elementów rodziny Δ i odległość między „sąsiednimi” elementami tej rodziny (rys. 1), A_{Δ} , J_{Δ} , \check{J}_{Δ} , \check{J}_{Δ} — pole przekroju oraz osiowy i główne środkowe momenty bezwładności tego przekroju względem osi \tilde{t}_{Δ} , \tilde{t}_{Δ} , \tilde{a}_3 ($\Delta = \text{I, II}$ lub $\Delta = \text{I, II, III}$).

Natomiast dla powłoki perforowanej przy wykorzystaniu (2.13) mamy (por. zał. 9 i [3])

$$\begin{aligned} A^{\alpha\beta\xi\eta} &= \sum_{\Delta} \left(t_{\Delta}^{\alpha} t_{\Delta}^{\beta} \sum_{\Gamma} t_{\Gamma}^{\xi} t_{\Gamma}^{\eta} R_{\Delta\Gamma} + t_{\Delta}^{\alpha} \tilde{t}_{\Delta}^{\beta} t_{\Delta}^{\xi} \tilde{t}_{\Delta}^{\eta} R_{\Delta} \right), & A^{\alpha\xi} &= \sum_{\Delta} t_{\Delta}^{\alpha} t_{\Delta}^{\xi} \check{R}_{\Delta}, \\ B^{\alpha\beta\xi\eta} &= \sum_{\Delta} \left(t_{\Delta}^{\alpha} \tilde{t}_{\Delta}^{\beta} \sum_{\Gamma} t_{\Gamma}^{\xi} \tilde{t}_{\Gamma}^{\eta} \tilde{S}_{\Delta\Gamma} + t_{\Delta}^{\alpha} t_{\Delta}^{\beta} t_{\Delta}^{\xi} t_{\Delta}^{\eta} S_{\Delta} \right), & B^{\alpha\xi} &= \sum_{\Delta} t_{\Delta}^{\alpha} t_{\Delta}^{\xi} \check{S}_{\Delta}, \end{aligned} \quad (2.16)$$

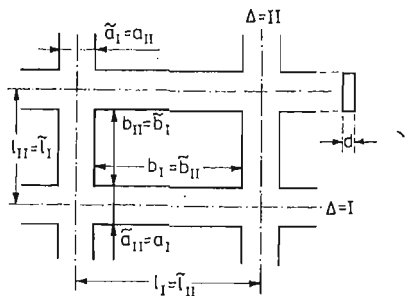
gdzie

$$\begin{aligned} [R_{\Delta\Gamma}] &= \begin{bmatrix} R_{\text{I}} & \tilde{\nu}_{\text{II}} R_{\text{I}} \\ \tilde{\nu}_{\text{I}} R_{\text{II}} & R_{\text{II}} \end{bmatrix}, & [\tilde{S}_{\Delta\Gamma}] &= \begin{bmatrix} \tilde{S}_{\text{I}} & \tilde{\nu}_{\text{II}} \tilde{S}_{\text{I}} \\ \tilde{\nu}_{\text{I}} \tilde{S}_{\text{II}} & \tilde{S}_{\text{II}} \end{bmatrix}, \\ R_{\Delta} &= \frac{\tilde{E}_{\Delta} d}{1 - \tilde{\nu}_{\text{I}} \tilde{\nu}_{\text{II}}}, & \tilde{R}_{\Delta} &= \frac{\tilde{E}_{\Delta} d \tilde{a}_{\Delta}^2}{b_{\Delta}^2 + 2(1 + \nu) \tilde{a}_{\Delta}^2}, & \check{R}_{\Delta} &= \frac{\tilde{E}_{\Delta} d^3}{b_{\Delta}^2}, \\ S_{\Delta} &= k_{\Delta} \frac{\tilde{E}_{\Delta} d^3}{2(1 + \nu)}, & \tilde{S}_{\Delta} &= \frac{d^2}{12} R_{\Delta}, & \check{S}_{\Delta} &= \frac{\tilde{E}_{\Delta} \tilde{a}_{\Delta}^2 d l_{\Delta}}{12 b_{\Delta}} \\ \tilde{E}_{\Delta} &= E \frac{\tilde{a}_{\Delta}}{\tilde{l}_{\Delta}}, & \tilde{\nu}_{\Delta} &= \nu \frac{\tilde{a}_{\Delta}}{\tilde{l}_{\Delta}}, \end{aligned} \quad (2.17)$$

przy czym E , ν oznaczają moduł Younga i współczynnik Poissona, d — grubość powłoki, k_{Δ} — współczynnik skręcania dla przekroju prostokątnego; znaczenie a_{Δ} , \tilde{a}_{Δ} , b_{Δ} , \tilde{b}_{Δ} wyjaśniono na rys. 2 ($\Delta = \text{I, II}$).

Wielkości $\tilde{\nu}$, $\tilde{\vartheta}$ oznaczają (w punktach przecięcia krzywych siatki dyskretnej) przemieszczenia i kąty obrotu węzłów dźwigara.

Jeżeli przez $\bar{P}_{\Delta} = P_{\Delta} \bar{t}_{\Delta}^0 + \tilde{P} \tilde{t}_{\Delta}^0 + \check{P}_{\Delta} \check{a}_3$ i $\bar{M}_{\Delta} = M_{\Delta} \bar{t}_{\Delta}^0 + \tilde{M} \tilde{t}_{\Delta}^0 + \check{M} \check{a}_3$ oznaczymy wektor siły i momentu w przekroju środkowym pręta rodziny Δ (rys. 3), to zgodnie z założeniami, ciągłego modelu rozważanych ustrojów oraz (2.13) mamy [3]



Rys. 2

$$p^{\alpha\beta} = \sum_{\Delta} p_{\Delta}^{\alpha\beta}, \quad p^{\alpha} = \sum_{\Delta} p_{\Delta}^{\alpha}, \quad m^{\alpha\beta} = \sum_{\Delta} m_{\Delta}^{\alpha\beta}, \quad m^{\alpha} = \sum_{\Delta} m_{\Delta}^{\alpha},$$

$$P_{\Delta} = \tilde{l}_{\Delta} p_{\Delta}^{\beta\alpha} t_{\Delta\beta} t_{\Delta\alpha}, \quad \tilde{P}_{\Delta} = \tilde{l}_{\Delta} p_{\Delta}^{\beta\alpha} t_{\Delta\beta} \tilde{t}_{\Delta\alpha}, \quad \check{P}_{\Delta} = \tilde{l}_{\Delta} p_{\Delta}^{\beta} t_{\Delta\beta},$$

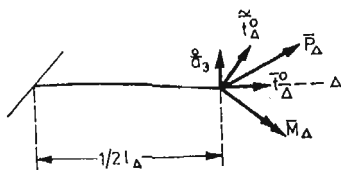
$$M_{\Delta} = \tilde{l}_{\Delta} m_{\Delta}^{\beta\alpha} t_{\Delta\beta} t_{\Delta\alpha}, \quad \tilde{M}_{\Delta} = \tilde{l}_{\Delta} m_{\Delta}^{\beta\alpha} t_{\Delta\beta} \tilde{t}_{\Delta\alpha}, \quad \check{M}_{\Delta} = \tilde{l}_{\Delta} m_{\Delta}^{\beta} t_{\Delta\beta},$$

przy czym $t_{\alpha} = g_{\alpha\beta} t^{\beta}$, $\tilde{t}_{\alpha} = g_{\alpha\beta} \tilde{t}^{\beta}$.

Założymy dalej, że powierzchnia π jest utworzona przez jednoparametrową rodzinę odcinkowo gładkich i spójnych konturów $\Gamma(u^1)$ ($u^1 \in \langle u_1^1, u_2^1 \rangle$) tak, że $\Gamma(u_a^1) \cap \Gamma(u_b^1) = \emptyset$ dla $u_a^1 \neq u_b^1$ oraz na brzegu różnym od $\Gamma(u_a^1)$ (gdy $\Gamma(u^1)$ nie jest konturem zamkniętym — $\partial\Gamma(u^1) \neq \emptyset$) dane są jedynie statyczne warunki brzegowe. Na brzegu $\Gamma(u_a^1)$ (gdy $\Gamma(u_1^1) \neq \Gamma(u_2^1)$) mogą być one statyczne lub geometryczne (zgodne z przyjętymi więzami). Jako zmienną u^2 powyższej klasy powierzchni podstawowej ośrodka przyjmijmy parametr konturu $\Gamma(u^1)$.

Rozważania poniższe ograniczymy do całkwalnej i liniowej postaci równań więzów typu kinetycznego (por. zał. 10, [1, 2])

$$(v_{\alpha}, v, \vartheta_{\alpha}, \vartheta) = \sum_{K=1}^N [(v_{\alpha K}^1, v_K^1, \vartheta_{\alpha K}^1, \vartheta_K^1)(u^{\alpha}) \psi_K(u^1) + (v_{\alpha K}^2, v_K^2, \vartheta_{\alpha K}^2, \vartheta_K^2)(u^{\alpha}) \psi'_K(u^1)], \quad (2.19)$$



Rys. 3

gdzie ψ_K są nieznanymi przemieszczeniami uogólnionymi, $v_{\alpha K}^1, \dots, \vartheta_K^2$ znanymi funkcjami $(\dots)' = \partial(\dots)/\partial u^1$.

Więzy typu kinetycznego postulujemy w postaci wyrażającej często stosowany w praktyce fakt pomijalności wpływu niektórych składowych stanu napięcia na zachowanie się dźwigara

$$p^{\beta\alpha} = \pi_p^{\alpha\beta} p^{\alpha\beta}, \quad p^{\alpha} = \pi_p^{\alpha} p^{\alpha}, \quad m^{\alpha\beta} = \pi_m^{\alpha\beta} m^{\alpha\beta}, \quad m^{\alpha} = \pi_m^{\alpha} m^{\alpha}, \quad (2.20)$$

gdzie $\pi_p^{\alpha\beta}, \dots, \pi_m^\alpha$ są parametrami przyjmującymi wartości „0” lub „1” w zależności od tego, czy dana składowa jest pomijana czy dowolna. Formalny zapis (2.20) powyższych więzów zezwala na niewyszczególnienie na etapie ogólnych rozważań, którą z wielkości statycznych można uznać za pomijalnie małą.

Zajmiemy się następnie wyprowadzeniem równań stateczności. Przyjmijmy, że składowe stanu obciążenia są na tyle duże, że bez zmiany warunków brzegowych możliwe są różne postacie położenia równowagi określone przez zaburzenie stanu podstawowego przez dodatkowe wektory małego przesunięcia $\partial\bar{v} = \partial v_\alpha \bar{r}^\alpha + \partial v \bar{a}_3$ i obrotu $\partial\bar{\theta} = \partial\theta_\alpha \bar{r}^\alpha + \partial\theta \bar{a}_3$ zgodne z więzami (2.19), tj. określone przez przyrosty $\partial\psi_K (K = 1, 2, \dots, N)$ przemieszczeń uogólnionych (por. zał. 1)

$$(\partial v_\alpha, \partial v, \partial\theta_\alpha, \partial\theta) = \sum_{K=1}^N \left[\begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ (v_{\alpha K}, v_K, \theta_{\alpha K}, \theta_K) \end{matrix} \partial\psi_K + \begin{matrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ (v_{\alpha K}, v_K, \theta_{\alpha K}, \theta_K) \end{matrix} \partial\psi'_K \right]. \quad (2.21)$$

Wykorzystując fakt, że „całkowity” i „podstawowy” stan przemieszczenia, napięcia i odkształcenia spełnia równania i związki (2.2), (2.4) – (2.11), (2.19), (2.20) oraz uwzględniając założenie 5 otrzymujemy równania problemu stateczności:

równania równowagi

$$\begin{aligned} \partial\hat{p}^{\beta\alpha}|_\beta - b_\beta^\alpha \partial\hat{p}^\beta + \partial r &= 0, & \partial\hat{p}^\alpha|_\alpha + b_{\alpha\beta} \partial\hat{p}^{\alpha\beta} + \partial r &= 0, \\ \partial\hat{m}^{\beta\alpha}|_\beta - b_\beta^\alpha \partial\hat{m}^\beta - e_\beta^\alpha \partial\hat{p}^\beta + e^{\alpha\gamma} (\hat{\gamma}_{\beta\gamma} \partial p^\beta + \partial\hat{\gamma}_{\beta\gamma} p^\beta) + e_\beta^\alpha (\hat{\gamma}_\gamma \partial p^{\gamma\beta} + \partial\hat{\gamma}_\gamma p^{\gamma\beta}) + \partial s^\alpha &= 0, \quad (2.22) \\ \partial\hat{m}^\alpha|_\alpha + b_{\alpha\beta} \partial\hat{m}^{\alpha\beta} + e_{\alpha\beta} \partial\hat{p}^{\alpha\beta} + e_\alpha^\gamma (\hat{\gamma}_{\beta\gamma} \partial p^{\beta\alpha} + \partial\hat{\gamma}_{\beta\gamma} p^{\beta\alpha}) + \partial s &= 0, \end{aligned}$$

statyczne warunki brzegowe

$$\partial\hat{p}^{\beta\alpha} n_\beta = \partial\tau^\alpha, \quad \partial\hat{p}^\beta n^\beta = \partial\tau, \quad \partial\hat{m}^{\beta\alpha} n_\beta = \partial\mu^\alpha, \quad \partial\hat{m}^\beta n_\beta = \partial\mu, \quad (2.23)$$

geometryczne warunki brzegowe (zgodne z więzami typu kinematycznego)

$$\partial v_\alpha = 0, \quad \partial v = 0, \quad \partial\theta_\alpha = 0, \quad \partial\theta = 0, \quad (2.24)$$

gdzie

$$\partial\hat{\gamma}_{\alpha\beta} = \partial v_\beta|_\alpha - b_{\alpha\beta} \partial v, \quad \partial\hat{\gamma}_\alpha = \partial v|_\alpha + b_\alpha^\beta \partial v_\beta \quad (2.24)$$

oraz

$$\begin{aligned} \partial\hat{p}^{\beta\alpha} &= \partial p^{\beta\alpha} + g^{\alpha\delta} (\hat{\gamma}_{\gamma\delta} \partial p^{\beta\gamma} + \partial\hat{\gamma}_{\gamma\delta} p^{\beta\gamma}) - g^{\alpha\delta} (\hat{\gamma}_\delta \partial p^\beta + \partial\hat{\gamma}_\delta p^\beta), \\ \partial\hat{p}^\beta &= \partial p^\beta + \hat{\gamma}_\gamma \partial p^{\beta\gamma} + \partial\hat{\gamma}_\gamma p^{\beta\gamma}, \quad (2.26) \\ \partial\hat{m}^{\beta\alpha} &= \partial m^{\beta\alpha} + g^{\alpha\delta} (\hat{\gamma}_{\gamma\delta} \partial m^{\beta\gamma} + \partial\hat{\gamma}_{\gamma\delta} m^{\beta\gamma}) - g^{\alpha\delta} (\hat{\gamma}_\delta \partial m^\beta + \partial\hat{\gamma}_\delta m^\beta), \\ \partial\hat{m}^\beta &= \partial m^\beta + \hat{\gamma}_\gamma \partial m^{\beta\gamma} + \partial\hat{\gamma}_\gamma m^{\beta\gamma}, \end{aligned}$$

związki fizyczne

$$\begin{aligned} \partial p^{\alpha\beta} &= A^{\alpha\beta\xi\eta} \partial\gamma_{\xi\eta}, & \partial p^\alpha &= A^{\alpha\xi} \partial\gamma_\xi, \\ \partial m^{\alpha\beta} &= B^{\alpha\beta\xi\eta} \partial\kappa_{\xi\eta}, & \partial m^\alpha &= B^{\alpha\xi} \partial\kappa_\xi, \end{aligned} \quad (2.27)$$

związki geometryczne

$$\begin{aligned} \partial\gamma_{\alpha\beta}^* &= \partial v_\beta|_\alpha - b_{\alpha\beta} \partial v - e_{\alpha\beta} \partial\theta, & \partial\gamma_\alpha^* &= \partial v|_\alpha + b_\alpha^\beta \partial v_\beta + e_\alpha^\beta \partial\theta_\beta, \\ \partial\kappa_{\alpha\beta}^* &= \partial\theta_\beta|_\alpha - b_{\alpha\beta} \partial\theta, & \partial\kappa_\alpha^* &= \partial\theta|_\alpha + b_\alpha^\beta \partial\theta_\beta, \end{aligned} \quad (2.28)$$

oraz zasadę idealności więzów kinematycznych

$$\int_{\pi} (\partial r^{\alpha} \partial v_{\alpha} + \partial r \partial v + \partial s^{\alpha} \partial \vartheta_{\alpha} + \partial s \partial \vartheta) d\pi + \int_{\partial\pi} (\partial \tau^{*} \delta v_{\alpha} + \partial \tau \delta v + \partial \mu^{\alpha} \delta \vartheta_{\alpha} + \partial \mu \delta \vartheta) d(\partial\pi) = 0, \quad (2.29)$$

i kinetycznych

$$\int_{\pi} [(\partial \gamma_{\alpha\beta} - \partial \gamma_{\alpha\beta}^{*}) \delta p^{\alpha\beta} + (\partial \gamma_{\alpha} - \partial \gamma_{\alpha}^{*}) \delta p^{\alpha} + (\partial \kappa_{\alpha\beta} - \partial \kappa_{\alpha\beta}^{*}) \delta m^{\alpha\beta} + (\partial \kappa_{\alpha} - \partial \kappa_{\alpha}^{*}) \delta m^{\alpha}] d\pi = 0, \quad (2.30)$$

przy czym

$$\partial p^{\alpha\beta} = \overset{*}{\pi}_p^{\alpha\beta} \partial p^{\alpha\beta}, \quad \partial p^{\alpha} = \overset{*}{\pi}_p^{\alpha} \partial p^{\alpha}, \quad \partial m^{\alpha\beta} = \overset{*}{\pi}_m^{\alpha\beta} \partial m^{\alpha\beta}, \quad \partial m^{\alpha} = \overset{*}{\pi}_m^{\alpha} \partial m^{\alpha}. \quad (2.31)$$

W zależnościach (2.31) parametry $\overset{*}{\pi}_p^{\alpha\beta}, \dots, \overset{*}{\pi}_m^{\alpha}$ przyjmują wartości „0” lub „1”, przy czym w stosunku do (2.20) odróżniono $\overset{*}{\pi}_p^{\alpha\beta}, \dots, \overset{*}{\pi}_m^{\alpha}$ od $\pi_p^{\alpha\beta}, \dots, \pi_m^{\alpha}$ z uwagi na fakt, że pomijalność pewnej składowej stanu napięcia w stanie podstawowym może być nieuzasadniona w stanie zaburzonym i odwrotnie.

Jeżeli nie nakładamy więzów wewnętrznych to wobec dowolności i niezależności $\delta v_{\alpha}, \dots, \delta \vartheta$ oraz $\delta p^{\alpha\beta}, \dots, \delta m^{\alpha}$ z zasad idealności (2.8), (2.10) i (2.29), (2.30) wynika, że

$$\begin{aligned} r^{\alpha} = r = 0, \quad s^{\alpha} = s = 0, \quad \tau^{\alpha} = \tau = 0, \quad \mu^{\alpha} = \mu = 0, \\ \gamma_{\alpha\beta} = \gamma_{\alpha\beta}^{*}, \quad \gamma_{\alpha} = \gamma_{\alpha}^{*}, \quad \kappa_{\alpha\beta} = \kappa_{\alpha\beta}^{*}, \quad \kappa_{\alpha} = \kappa_{\alpha}^{*} \end{aligned} \quad (2.32)$$

oraz

$$\begin{aligned} \partial r^{\alpha} = \partial r = 0, \quad \partial s^{\alpha} = \partial s = 0, \quad \partial \tau^{\alpha} = \partial \tau = 0, \quad \partial \mu^{\alpha} = \partial \mu = 0, \\ \partial \gamma_{\alpha\beta} = \partial \gamma_{\alpha\beta}^{*}, \quad \partial \gamma_{\alpha} = \partial \gamma_{\alpha}^{*}, \quad \partial \kappa_{\alpha\beta} = \partial \kappa_{\alpha\beta}^{*}, \quad \partial \kappa_{\alpha} = \partial \kappa_{\alpha}^{*}. \end{aligned} \quad (2.33)$$

Zatem wyprowadzone równania sprowadzają się do równań statyki i stateczności modelu dwuwymiarowego.

Otrzymane rezultaty mogą być podstawą dalszych uproszczeń.

Zgodnie z ogólnym postulatem liniowości prezentowanej w tej pracy teorii przyjmiemy (por. zał. 7), że w równaniach stanu podstawowego (2.4), (2.5)

$$\overset{\circ}{\gamma}_{\alpha\beta} = 0, \quad \overset{\circ}{\gamma}_{\alpha} = 0. \quad (2.34)$$

Często w praktyce, zwłaszcza w przypadku, gdy znany jest rozkład $p^{\alpha\beta}, p^{\alpha}, m^{\alpha\beta}, m^{\alpha}$ zakłada się, że stan podstawowy ośrodka jest „sztywny”, tzn. równości (2.34) uwzględnia się również w (2.22), (2.26).

Inne możliwe uproszczenia wyprowadzonych równań i związków dogodnie i bardziej stosownie jest rozważać dla konkretnych pod względem kształtu i struktury typów dźwigara oraz rodzajów obciążenia i warunków podparcia.

3. Równania stateczności modelu jednowymiarowego

Po wyznaczeniu z (2.5), (2.6) składowych reakcji więzów, a z (2.19) wariacji składowych stanu przemieszczenia i po podstawieniu do zasady idealności (2.8), wykorzystaniu zgodnie z zał. 7 związków (2.34), zależności (2.20) oraz $\pi = \{I(u^1), u^1 \in \langle u_1^1, u_1^2 \rangle\}$ otrzymujemy

po wykonaniu całkowania wobec dowolności i niezależności $\delta\psi_K (K = 1, 2, \dots, N)$ uogólnione równania równowagi stanu podstawowego [6, 7]

$$\overset{2}{\Psi}'_K - \overset{2}{\Phi}'_K - \overset{1}{\Psi}'_K + \overset{1}{\Phi}'_K + \overset{2}{F}'_K - \overset{1}{F}'_K = 0 \quad (u^1 \in (u^1_1, u^1_2)) \quad (3.1)$$

i warunki brzegowe

$$\begin{aligned} \overset{2}{\Psi}'_K - \overset{2}{\Phi}'_K - \overset{1}{\Psi}'_K + \overset{2}{F}'_K &= -\overset{1}{G}_{K\alpha} \quad \text{lub} \quad \psi_K = \overset{1}{\psi}_{K\alpha}, \\ \overset{2}{\Psi}'_K &= \overset{2}{G}_{K\alpha} \quad \text{lub} \quad \psi'_K = \overset{2}{\psi}_{K\alpha} \quad (u^1 = u^1_\alpha), \end{aligned} \quad (3.2)$$

gdzie uogólnione siły wewnętrzne, zewnętrzne przeszłowe i brzegowe określone są odpowiednio wzorami:

$$\begin{aligned} \overset{\gamma}{\Psi}'_K &= \int_{\Gamma(u^1)} \left(\pi_p^{1\alpha} p^{1\alpha\gamma} v_{\alpha K} + \pi_p^1 p^1 v_K + \pi_m^{1\alpha} m^{1\alpha\gamma} \vartheta_{\alpha K} + \pi_m^1 m^1 v_K \right) \frac{\sqrt{g}}{\sqrt{g_{22}}} d\Gamma, \\ \overset{\gamma}{\Phi}'_K &= \int_{\Gamma(u^1)} \left(\pi_p^{\alpha\beta} p^{\alpha\beta\gamma} \gamma_{\alpha\beta K} + \pi_p^\alpha p^\alpha \gamma_{\alpha K} + \pi_m^{\alpha\beta} m^{\alpha\beta\gamma} \kappa_{\alpha\beta K} + \pi_m^\alpha m^\alpha \kappa_{\alpha K} \right) \frac{\sqrt{g}}{\sqrt{g_{22}}} d\Gamma, \\ \overset{\gamma}{F}'_K &= \int_{\Gamma(u^1)} \left(q^{\alpha\gamma} v_{\alpha K} + q^\gamma v_K + h^{\alpha\gamma} \vartheta_{\alpha K} + h^\gamma \vartheta_K \right) \frac{\sqrt{g}}{\sqrt{g_{22}}} d\Gamma + \sum_{\partial\Gamma(u^1)} L \left(p^{\alpha\gamma} v_{\alpha K} + p^\gamma v_K + m^{\alpha\gamma} \vartheta_{\alpha K} + m^\gamma \vartheta_K \right), \\ \overset{\gamma}{G}_{K\beta} &= (-1)^\beta \int_{\Gamma(u^1_\beta)} \left(p^{\alpha\gamma} v_{\alpha K} + p^\gamma v_K + m^{\alpha\gamma} \vartheta_{\alpha K} + m^\gamma \vartheta_K \right) \frac{\sqrt{g}}{\sqrt{g_{22}}} d\Gamma, \end{aligned} \quad (3.3)$$

przy czym $Ldu^1 = d(\partial\Gamma(u^1))$, jeśli $\partial\Gamma(u^1) \neq \emptyset$; $(\dots)' = \partial(\dots)/\partial u^1$, natomiast

$$\begin{aligned} \overset{\gamma}{\gamma}_{\alpha\beta K} &= \overset{\gamma}{v}_{\beta K|\alpha} - b_{\alpha\beta} \overset{\gamma}{v}_K - e_{\alpha\beta} \overset{\gamma}{\vartheta}_K, & \overset{\gamma}{\gamma}_{\alpha K} &= \overset{\gamma}{v}_{K|\alpha} + b_\alpha^\beta \overset{\gamma}{v}_{\beta K} + e_\alpha^\beta \overset{\gamma}{\vartheta}_K, \\ \overset{\gamma}{\kappa}_{\alpha\beta K} &= \overset{\gamma}{\vartheta}_{\beta K|\alpha} - b_{\alpha\beta} \overset{\gamma}{\vartheta}_K, & \overset{\gamma}{\kappa}_{\alpha K} &= \overset{\gamma}{\vartheta}_{K|\alpha} + b_\alpha^\beta \overset{\gamma}{\vartheta}_{\beta K}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Podstawiając (2.19) do (2.11) i wykorzystując znane z geometrii powierzchni wzory znajdujemy

$$\begin{aligned} \gamma_{\alpha\beta}^* &= \sum_{K=1}^N \left[\overset{1}{\gamma}_{\alpha\beta K} \psi_K + \overset{2}{\gamma}_{\alpha\beta K} \psi'_K + \delta_{1\alpha} \left(\overset{1}{v}_{\beta K} \psi'_K + \overset{2}{v}_{\beta K} \psi''_K \right) \right], \\ \gamma_\alpha^* &= \sum_{K=1}^N \left[\overset{1}{\gamma}_{\alpha K} \psi_K + \overset{2}{\gamma}_{\alpha K} \psi'_K + \delta_{1\alpha} \left(\overset{1}{v}_K \psi'_K + \overset{2}{v}_K \psi''_K \right) \right], \\ \kappa_{\alpha\beta}^* &= \sum_{K=1}^N \left[\overset{1}{\kappa}_{\alpha\beta K} \psi_K + \overset{2}{\kappa}_{\alpha\beta K} \psi'_K + \delta_{1\alpha} \left(\overset{1}{\vartheta}_{\beta K} \psi'_K + \overset{2}{\vartheta}_{\beta K} \psi''_K \right) \right], \\ \kappa_\alpha^* &= \sum_{K=1}^N \left[\overset{1}{\kappa}_{\alpha K} \psi_K + \overset{2}{\kappa}_{\alpha K} \psi'_K + \delta_{1\alpha} \left(\overset{1}{\vartheta}_K \psi'_K + \overset{2}{\vartheta}_K \psi''_K \right) \right], \end{aligned} \quad (3.5)$$

gdzie $\overset{\gamma}{\gamma}_{\alpha\beta K}$, $\overset{\gamma}{\gamma}_{\alpha K}$, $\overset{\gamma}{\gamma}_{\alpha\beta K}$, $\overset{\gamma}{\gamma}_{\alpha K}$ są określone za pomocą (3.4), $\delta_{\alpha\beta}$ — jest symbolem Kroneckera.

Związki fizyczne odwrotne do (2.9) zapiszemy w postaci

$$\gamma_{\alpha\beta} = \mathbb{V}_{\alpha\beta\xi\eta} P^{\xi\eta}, \quad \gamma_\alpha = \mathbb{V}_{\alpha\xi} P^\xi, \quad \kappa_{\alpha\beta} = \mathbb{B}_{\alpha\beta\xi\eta} m^{\xi\eta}, \quad \kappa_\alpha = \mathbb{B}_{\alpha\xi} m^\xi, \quad (3.6)$$

gdzie $\mathbb{V}_{\alpha\beta\xi\eta}$, \dots , $\mathbb{B}_{\alpha\xi}$ są tensorami podatności sprężystej. Stosunkowo łatwo może je wyzna-

czyć w przypadku rusztu prętowego i powłoki perforowanej (por. (2.14) - (2.17)), gdy $\mathcal{A} = \text{I, II}$ i dyskretna siatka osi elementów pokrywa się z ortogonalnymi liniami parametrycznymi powierzchni podstawowej.

Uwzględniając (3.6) i (2.10) w zasadzie idealności (2.20) otrzymujemy

$$\begin{aligned} (\nabla_{\alpha\beta\xi\eta}\pi_p^{\xi\eta}p^{\xi\eta} - \gamma_{\alpha\beta}^*)\pi_p^{\alpha\beta} &= 0, & (\nabla_{\alpha\xi}\pi_p^{\xi}p^{\xi} - \gamma_{\alpha}^*)\pi_p^{\alpha} &= 0, \\ (\mathfrak{B}_{\alpha\beta\xi\eta}\pi_m^{\xi\eta}m^{\xi\eta} - \kappa_{\alpha\beta}^*)\pi_m^{\alpha\beta} &= 0, & (\mathfrak{B}_{\alpha\xi}\pi_m^{\xi}m^{\xi} - \kappa_{\alpha}^*)\pi_m^{\alpha} &= 0 \end{aligned} \quad (3.7)$$

(nie sumować względem α, β).

Na podstawie (3.5), (3.7) łatwo znajdujemy wyrażenia na niezerowe składowe stanu napięcia w funkcji $\psi_K, \psi'_K, \psi''_K$. Postać tych wyrażeń jest następująca:

$$\begin{aligned} \pi_p^{\alpha\beta}p^{\alpha\beta} &= \pi_p^{\alpha\beta} \sum_{K=1}^N \sum_{i=1}^3 p_K^{\alpha\beta} \psi_K^{(i-1)}, & \pi_p^{\alpha}p^{\alpha} &= \pi_p^{\alpha} \sum_{K=1}^N \sum_{i=1}^3 p_K^{\alpha} \psi_K^{(i-1)}, \\ \pi_m^{\alpha\beta}m^{\alpha\beta} &= \pi_m^{\alpha\beta} \sum_{K=1}^N \sum_{i=1}^3 m_K^{\alpha\beta} \psi_K^{(i-1)}, & \pi_m^{\alpha}m^{\alpha} &= \pi_m^{\alpha} \sum_{K=1}^N \sum_{i=1}^3 m_K^{\alpha} \psi_K^{(i-1)}, \end{aligned} \quad (3.8)$$

gdzie wprowadzono oznaczenia

$$\psi_K^{(i-1)} = \psi_K, \psi'_K, \psi''_K, \quad \text{dla } i = 1, 2, 3. \quad (3.9)$$

Po podstawieniu (3.8) do (3.3)_{1,2} otrzymujemy uogólnione związki fizyczne

$$\Psi_K^{\alpha} = \sum_{L=1}^N \sum_{i=1}^3 \Psi_{KL}^{\alpha i} \psi_L^{(i-1)}, \quad \Phi_K^{\alpha} = \sum_{L=1}^N \sum_{i=1}^3 \Phi_{KL}^{\alpha i} \psi_L^{(i-1)}, \quad (3.10)$$

gdzie

$$\begin{aligned} \Psi_{KL}^{\gamma i} &= \int_{\Gamma(u^i)} \left(\pi_p^{1\alpha\gamma} v_{\alpha K} p_L^{1\alpha} + \pi_p^{1\gamma} v_K p_L^1 + \pi_m^{1\alpha\gamma} \vartheta_{\alpha K} m_L^{1\alpha} + \pi_m^{1\gamma} \vartheta_K m_L^1 \right) \frac{\sqrt{g}}{\sqrt{g_{22}}} d\Gamma, \\ \Phi_{KL}^{\gamma i} &= \int_{\Gamma(u^i)} \left(\pi_p^{\alpha\beta\gamma} \gamma_{\alpha\beta K} p_L^{\alpha\beta} + \pi_p^{\alpha\gamma} \gamma_{\alpha K} p_L^{\alpha} + \pi_m^{\alpha\beta\gamma} \kappa_{\alpha\beta K} m_L^{\alpha\beta} + \pi_m^{\alpha\gamma} \kappa_{\alpha K} m_L^{\alpha} \right) \frac{\sqrt{g}}{\sqrt{g_{22}}} d\Gamma. \end{aligned} \quad (3.11)$$

W przypadku gdy wszystkie parametry $\pi_p^{\alpha\beta}, \dots, \pi_m^{\alpha\beta}$ są równe jedności, to po bezpośrednim uwzględnieniu (3.5) w (2.9) wobec $\gamma_{\alpha\beta} = \gamma_{\alpha\beta}^*, \gamma_{\alpha} = \gamma_{\alpha}^*, \kappa_{\alpha\beta} = \kappa_{\alpha\beta}^*, \kappa_{\alpha} = \kappa_{\alpha}^*$ (por. (2.10)) a następnie w (3.3)_{1,2} uzyskujemy następujące wzory na uogólnione sztywności

$$\begin{aligned} p_K^{\alpha\beta\gamma} &= A^{\alpha\beta\xi\eta} \left(\gamma_{\xi\eta K}^{\gamma} + \delta_{2\gamma} \delta_{1\xi} v_{\eta K}^1 \right), & p_K^{\alpha\beta} &= A^{\alpha\beta 1\eta} v_{\eta K}^2, \\ p_K^{\alpha} &= A^{\alpha\xi} \left(\gamma_{\xi K}^{\alpha} + \delta_{2\alpha} \delta_{1\xi} v_K^1 \right), & p_K^{\alpha} &= A^{\alpha 1} v_K^2, \\ m_K^{\alpha\beta\gamma} &= B^{\alpha\beta\xi\eta} \left(\kappa_{\xi\eta K}^{\gamma} + \delta_{2\gamma} \delta_{1\xi} \vartheta_{\eta K}^1 \right), & m_K^{\alpha\beta} &= B^{\alpha\beta 1\eta} \vartheta_{\eta K}^2, \\ m_K^{\alpha} &= B^{\alpha\xi} \left(\kappa_{\xi K}^{\alpha} + \delta_{2\alpha} \delta_{1\xi} \vartheta_K^1 \right), & m_K^{\alpha} &= B^{\alpha 1} \vartheta_K^2, \end{aligned} \quad (3.12)$$

oraz

$$\begin{aligned} \Psi_{KL}^{\gamma\delta} &= \int_{\Gamma(u^i)} \left[A^{1\alpha\xi\eta\gamma} v_{\alpha K} \gamma_{\xi\eta L}^{\delta} + A^{1\xi} v_K \gamma_{\xi L}^{\delta} + B^{1\alpha\xi\eta\gamma} \vartheta_{\alpha K} \kappa_{\xi\eta L}^{\delta} + B^{1\xi} \vartheta_K \kappa_{\xi L}^{\delta} \right. \\ &\quad \left. + \delta_{2\delta} \left(A^{1\alpha 1\eta\gamma} v_{\alpha K} v_{\eta L}^1 + A^{11} v_K v_L^1 + B^{1\alpha 1\eta\gamma} \vartheta_{\alpha K} \vartheta_{\eta L}^1 + B^{11} \vartheta_K \vartheta_L^1 \right) \right] \frac{\sqrt{g}}{\sqrt{g_{22}}} d\Gamma, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Phi_{KL}^{\gamma\delta} &= \int_{\Gamma(u^1)} \left[A^{\alpha\beta\xi\eta\gamma} \gamma_{\alpha\beta K}^{\delta} \gamma_{\xi\eta L}^{\delta} + A^{\alpha\xi\gamma} \gamma_{\alpha K}^{\delta} \gamma_{\xi L}^{\delta} + B^{\alpha\beta\xi\eta\gamma} \kappa_{\alpha\beta K}^{\delta} \kappa_{\xi\eta L}^{\delta} + B^{\alpha\xi\gamma} \kappa_{\alpha K}^{\delta} \kappa_{\xi L}^{\delta} + \right. \\
 &+ \delta_{2\delta} \left(A^{\alpha\beta 1\eta\gamma} \gamma_{\alpha\beta K}^1 v_{\eta L}^1 + A^{\alpha 1\gamma} \gamma_{\alpha K}^1 v_L^1 + B^{\alpha\beta 1\eta\gamma} \kappa_{\alpha\beta K}^1 \vartheta_{\eta L}^1 + B^{\alpha 1\gamma} \kappa_{\alpha K}^1 \vartheta_L^1 \right) \left. \right] \frac{\sqrt{g}}{\sqrt{g_{22}}} d\Gamma, \\
 \Psi_{KL}^{\gamma 3} &= \int_{\Gamma(u^1)} \left(A^{1\alpha 1\eta\gamma} v_{\alpha K}^2 v_{\eta L}^2 + A^{1 1\gamma} v_K^2 v_L^2 + B^{1\alpha 1\eta\gamma} \vartheta_{\alpha K}^2 \vartheta_{\eta L}^2 + B^{1 1\gamma} \vartheta_K^2 \vartheta_L^2 \right) \frac{\sqrt{g}}{\sqrt{g_{22}}} d\Gamma. \\
 \Phi_{KL}^{\gamma 3} &= \int_{\Gamma(u^1)} \left(A^{\alpha\beta 1\eta\gamma} \gamma_{\alpha\beta K}^2 v_{\eta L}^2 + A^{\alpha 1\gamma} \gamma_{\alpha K}^2 v_L^2 + B^{\alpha\beta 1\eta\gamma} \kappa_{\alpha\beta K}^2 \vartheta_{\eta L}^2 + B^{\alpha 1\gamma} \kappa_{\alpha K}^2 \vartheta_L^2 \right) \frac{\sqrt{g}}{\sqrt{g_{22}}} d\Gamma,
 \end{aligned} \quad (3.13)$$

Po uwzględnieniu (3.10) w (3.1), (3.2) łatwo otrzymujemy równania różniczkowe i warunki brzegowego jednowymiarowego modelu stanu podstawowego — równania statyki jednowymiarowej teorii infinitezymalnej.

Następnie wyprowadzimy równania stanu zaburzonego. Obliczając z (2.22), (2.23) przyrosty reakcji więzów, a z (2.19) wariacje składowych stanu przemieszczenia, i uwzględniając w (2.29), wykonując całkowanie przy wykorzystaniu znanych z geometrii powierzchni wzorów, zależności (2.20), (2.31) oraz $\pi = \{\Gamma(u^1), u^1 \in \langle u_1^1, u_2^1 \rangle\}$ otrzymujemy wobec dowolności i niezależności $\delta\psi_K (K = 1, 2, \dots, N)$ równania równowagi

$$\partial \Psi_K^{0'0'} - \partial \Phi_K^0 - \partial \Psi_K^0 + \partial \Phi_K^0 = 0, \quad (u^1 \in (u_1^1, u_2^1)) \quad (3.14)$$

i warunki brzegowe

$$\begin{aligned}
 \partial \Psi_K^{0'0'} - \partial \Phi_K^0 - \partial \Psi_K^0 &= 0 \quad \text{lub} \quad \partial \psi_K = 0, \\
 \partial \Psi_K^0 &= 0 \quad \text{lub} \quad \partial \psi'_K = 0 \quad (u^1 = u_\alpha^1)
 \end{aligned} \quad (3.15)$$

gdzie wprowadzono oznaczenia

$$\begin{aligned}
 \partial \Psi_K^0 &= \int_{\Gamma(u^1)} \left(\dot{p}^{1\alpha} v_{\alpha K}^e + \dot{p}^1 v_K^e + \dot{m}^{1\alpha} \vartheta_{\alpha K}^e + \dot{m}^1 \vartheta_K^e \right) \frac{\sqrt{g}}{\sqrt{g_{22}}} du^2, \\
 \partial \Phi_K^0 &= \int \left[\dot{p}^{\alpha\beta} \gamma_{\alpha\beta K}^e + \dot{p}^\alpha \gamma_{\alpha K}^e + \dot{m}^{\alpha\beta} \kappa_{\alpha\beta K}^e + \dot{m}^\alpha \kappa_{\alpha K}^e - e^{\alpha\gamma} (\dot{\gamma}_{\beta\gamma}^* \pi_\delta^\beta \partial p^\delta + \partial \dot{\gamma}_{\beta\gamma} \pi_\delta^\beta p^{\delta\alpha}) \vartheta_{\alpha K}^e - \right. \\
 &\left. - e_\beta^\alpha (\dot{\gamma}^* \pi_\delta^\beta \partial p^{\gamma\delta} + \partial \dot{\gamma}_\gamma \pi_\delta^\beta p^{\gamma\delta}) \vartheta_{\alpha K}^e - e_\beta^\gamma (\dot{\gamma}_{\beta\gamma}^* \pi_\delta^{\beta\alpha} \partial p^{\delta\alpha} + \partial \dot{\gamma}_{\beta\gamma} \pi_\delta^{\beta\alpha} p^{\delta\alpha}) \vartheta_K^e \right] \frac{\sqrt{g}}{\sqrt{g_{22}}} d\Gamma
 \end{aligned} \quad (3.16)$$

gdzie $\dot{\gamma}_{\alpha\beta K}^e$, $\dot{\gamma}_{\alpha K}^e$, $\dot{\kappa}_{\alpha\beta K}^e$, $\dot{\kappa}_{\alpha K}^e$ są określone za pomocą (3.4).

Podstawiając (2.19) do (2.2), (2.25) znajdujemy (por. (3.5))

$$\begin{aligned}
 \dot{\gamma}_{\alpha\beta} &= \sum_{K=1}^N \left[\gamma_{\alpha\beta K}^0 \psi_K + \gamma_{\beta\alpha K}^2 \psi'_K + \delta_{1\alpha} \left(v_{\beta K}^1 \psi'_K + v_{\beta K}^2 \psi''_K \right) \right], \\
 \dot{\gamma}_\alpha &= \sum_{K=1}^N \left[\gamma_{\alpha K}^0 \psi_K + \gamma_{\alpha K}^2 \psi'_K + \delta_{1\alpha} \left(v_K^1 \psi'_K + v_K^2 \psi''_K \right) \right],
 \end{aligned} \quad (3.17)$$

$$\partial\gamma_{\alpha\beta}^0 = \sum_{K=1}^N \left[\gamma_{\alpha\beta K}^0 \partial\psi_K + \gamma_{\alpha\beta K}^0 \partial\psi'_K + \delta_{1\alpha} \left(v_{\beta K} \partial\psi'_K + v_{\beta K} \partial\psi''_K \right) \right], \quad (3.17)$$

[cd.]

$$\partial\gamma_{\alpha}^0 = \sum_{K=1}^N \left[\gamma_{\alpha K}^0 \partial\psi_K + \gamma_{\alpha K}^0 \partial\psi'_K + \delta_{1\alpha} \left(v_K \partial\psi'_K + v_K \partial\psi''_K \right) \right],$$

gdzie (por. (3.4))

$$\gamma_{\alpha\beta K}^0 = \gamma_{\alpha\beta K} + e_{\alpha\beta} \vartheta_K, \quad \gamma_{\alpha K}^0 = \gamma_{\alpha K} - e_{\alpha}^{\beta} \vartheta_{\beta K}. \quad (3.18)$$

Postępując analogicznie jak przy wyprowadzeniu związków (3.5) - (3.8) otrzymujemy na podstawie (2.27), (2.28), (2.30), (2.31)

$$\begin{aligned} \partial\gamma_{\alpha\beta}^* &= \sum_{K=1}^N \left[\gamma_{\alpha\beta K} \partial\psi_K + \gamma_{\alpha\beta K} \partial\psi'_K + \delta_{1\alpha} \left(v_{\beta K} \partial\psi'_K + v_{\beta K} \partial\psi''_K \right) \right], \\ \partial\gamma_{\alpha}^* &= \sum_{K=1}^N \left[\gamma_{\alpha K} \partial\psi_K + \gamma_{\alpha K} \partial\psi'_K + \delta_{1\alpha} \left(v_K \partial\psi'_K + v_K \partial\psi''_K \right) \right], \\ \partial\kappa_{\alpha\beta}^* &= \sum_{K=1}^N \left[\kappa_{\alpha\beta K} \partial\psi_K + \kappa_{\alpha\beta K} \partial\psi'_K + \delta_{1\alpha} \left(\vartheta_{\beta K} \partial\psi'_K + \vartheta_{\beta K} \partial\psi''_K \right) \right], \\ \partial\kappa_{\alpha}^* &= \sum_{K=1}^N \left[\kappa_{\alpha K} \partial\psi_K + \kappa_{\alpha K} \partial\psi'_K + \delta_{1\alpha} \left(\vartheta_K \partial\psi'_K + \vartheta_K \partial\psi''_K \right) \right], \end{aligned} \quad (3.19)$$

a następnie

$$\begin{aligned} \pi_p^{*\alpha\beta} \partial p^{\alpha\beta} &= \pi_p^{*\alpha\beta} \sum_{K=1}^N \sum_{i=1}^3 \partial p_K^{\alpha\beta} \partial\psi_K^{(i-1)}, & \pi_p^{*\alpha} \partial p^{\alpha} &= \pi_p^{*\alpha} \sum_{K=1}^N \sum_{i=1}^3 \partial p_K \partial\psi_K^{(i-1)}, \\ \pi_m^{*\alpha\beta} \partial m^{\alpha\beta} &= \pi_m^{*\alpha\beta} \sum_{K=1}^N \sum_{i=1}^3 \partial m_K^{\alpha\beta} \partial\psi_K^{(i-1)}, & \pi_m^{*\alpha} \partial m^{\alpha} &= \pi_m^{*\alpha} \sum_{K=1}^N \sum_{i=1}^3 \partial m_K \partial\psi_K^{(i-1)}, \end{aligned} \quad (3.20)$$

gdzie

$$\partial\psi_K^{(i-1)} = \partial\psi_K, \partial\psi'_K, \partial\psi''_K \quad \text{dla } i = 1, 2, 3, \quad (3.21)$$

$\partial p_K^{\alpha\beta}$, ∂p_K^{α} , $\partial m_K^{\alpha\beta}$, ∂m_K^{α} są znanymi funkcjami zmiennych (u^{α}) (równymi odpowiednio $p_K^{\alpha\beta}$, p_K^{α} , $m_K^{\alpha\beta}$, m_K^{α} , jeśli $\pi_p^{*\alpha\beta} = \pi_p^{\alpha\beta}$, $\pi_p^{*\alpha} = \pi_p^{\alpha}$, $\pi_m^{*\alpha\beta} = \pi_m^{\alpha\beta}$, $\pi_m^{*\alpha} = \pi_m^{\alpha}$).

Uwzględniając (2.20), (2.31) w (2.26), a następnie w (3.16) przekształcamy wyrażenia na $\partial\Psi_K^0$, $\partial\Phi_K^0$ następująco:

$$\partial\Psi_K^0 = \partial\Psi_K^1 + \partial\Psi_K^2 + \partial\Psi_K^3, \quad \partial\Phi_K^0 = \partial\Phi_K^1 + \partial\Phi_K^2 + \partial\Phi_K^3, \quad (3.22)$$

gdzie

$$\partial\Psi_K^1 = \int_{\Gamma(u^1)} \left(\pi_p^{*1\alpha} \partial p^{1\alpha} v_{\alpha K} + \pi_p^{*1} \partial p^1 v_K + \pi_m^{*1\alpha} \partial m^{1\alpha} \vartheta_{\alpha K} + \pi_m^{*1} \partial m^1 \vartheta_K \right) \frac{\sqrt{g}}{\sqrt{g_{22}}} d\Gamma, \quad (3.23)$$

$$\begin{aligned}
 \partial \Phi_K^0 &= \int_{\Gamma(u^i)} \left(\pi_p^{*\alpha\beta} \partial p^{\alpha\beta} \gamma_{\alpha\beta K} + \pi_p^{*\alpha} \partial p^{\alpha} \gamma_{\alpha K} + \pi_m^{*\alpha\beta} \partial m^{\alpha\beta} \kappa_{\alpha\beta K} + \pi_m^{*\alpha} \partial m^{\alpha} \kappa_{\alpha K} \right) \frac{\sqrt{g}}{\sqrt{g_{22}}} d\Gamma, \\
 \partial \Psi_K^0 &= \int_{\Gamma(u^i)} \left[g^{\alpha\delta} (\partial \dot{\gamma}_{\gamma\delta} \pi_p^{1\gamma} p^{1\gamma} - \partial \dot{\gamma}_{\delta} \pi_p^1 p^1) v_{\alpha K} + \partial \dot{\gamma}_{\gamma} \pi_p^{1\gamma} p^{1\gamma} v_K + \right. \\
 &\quad \left. + g^{\alpha\delta} (\partial \dot{\gamma}_{\gamma\delta} \pi_m^{1\gamma} m^{1\gamma} - \partial \dot{\gamma}_{\delta} \pi_m^1 m^1) v_{\alpha K} + \partial \dot{\gamma}_{\gamma} \pi_m^{1\gamma} m^{1\gamma} v_K \right] \frac{\sqrt{g}}{\sqrt{g_{22}}} d\Gamma, \\
 \partial \Phi_K^2 &= \int_{\Gamma(u^i)} \left[g^{\alpha\delta} (\partial \dot{\gamma}_{\gamma\delta} \pi_p^{\beta\gamma} p^{\beta\gamma} - \partial \dot{\gamma}_{\delta} \pi_p^{\beta} p^{\beta}) \gamma_{\beta\alpha K} + \partial \dot{\gamma}_{\gamma} \pi_p^{\beta\gamma} p^{\beta\gamma} \gamma_{\beta K} + \right. \\
 &\quad \left. + g^{\alpha\delta} (\partial \dot{\gamma}_{\gamma\delta} \pi_m^{\beta\gamma} m^{\beta\gamma} - \partial \dot{\gamma}_{\delta} \pi_m^{\beta} m^{\beta}) \kappa_{\beta\alpha K} + \partial \dot{\gamma}_{\gamma} \pi_m^{\beta\gamma} m^{\beta\gamma} \kappa_{\beta K} - \right. \\
 &\quad \left. - (e^{\alpha\gamma} \partial \dot{\gamma}_{\beta\gamma} \pi_p^{\beta} p^{\beta} - e_{\beta}^{\alpha} \partial \dot{\gamma}_{\gamma} \pi_p^{\gamma\beta} p^{\gamma\beta}) v_{\alpha K} - e_{\alpha}^{\gamma} \partial \dot{\gamma}_{\beta\gamma} \pi_p^{\beta\alpha} p^{\beta\alpha} v_K \right] \frac{\sqrt{g}}{\sqrt{g_{22}}} d\Gamma, \quad (3.23) \\
 &\quad \text{[cd.]} \\
 \partial \Psi_K^3 &= \int_{\Gamma(u^i)} \left[g^{\alpha\delta} (\dot{\gamma}_{\gamma\delta} \pi_p^{1\gamma} \partial p^{1\gamma} - \dot{\gamma}_{\delta} \pi_p^1 \partial p^1) v_{\alpha K} + \dot{\gamma}_{\gamma} \pi_p^{1\gamma} \partial p^{1\gamma} v_K + \right. \\
 &\quad \left. + g^{\alpha\delta} (\dot{\gamma}_{\gamma\delta} \pi_m^{1\gamma} \partial m^{1\gamma} - \dot{\gamma}_{\delta} \pi_m^1 \partial m^1) v_{\alpha K} + \dot{\gamma}_{\gamma} \pi_m^{1\gamma} \partial m^{1\gamma} v_K \right] \frac{\sqrt{g}}{\sqrt{g_{22}}} d\Gamma, \\
 \partial \Phi_K^3 &= \int_{\Gamma(u^i)} \left[g^{\alpha\delta} (\dot{\gamma}_{\gamma\delta} \pi_p^{*\beta\gamma} \partial p^{\beta\gamma} - \dot{\gamma}_{\delta} \pi_p^{*\beta} \partial p^{\beta}) \gamma_{\beta\alpha K} + \dot{\gamma}_{\gamma} \pi_p^{*\beta\gamma} \partial p^{\beta\gamma} \gamma_{\beta K} + \right. \\
 &\quad \left. + g^{\alpha\delta} (\dot{\gamma}_{\gamma\delta} \pi_m^{*\beta\gamma} \partial m^{\beta\gamma} - \dot{\gamma}_{\delta} \pi_m^{*\beta} \partial m^{\beta}) \kappa_{\beta\alpha K} + \dot{\gamma}_{\gamma} \pi_m^{*\beta\gamma} \partial m^{\beta\gamma} \kappa_{\beta K} - \right. \\
 &\quad \left. - (e^{\alpha\gamma} \dot{\gamma}_{\beta\gamma} \pi_p^{*\beta} \partial p^{\beta} - e_{\beta}^{\alpha} \dot{\gamma}_{\gamma} \pi_p^{*\gamma\beta} \partial p^{\gamma\beta}) v_{\alpha K} - e_{\alpha}^{\gamma} \dot{\gamma}_{\beta\gamma} \pi_p^{*\beta\alpha} \partial p^{\beta\alpha} v_K \right] \frac{\sqrt{g}}{\sqrt{g_{22}}} d\Gamma.
 \end{aligned}$$

Po podstawieniu (3.17)_{3,4} do (3.23)_{3,4}, a (3.20) do (3.23)_{1,2,5,6} i uwzględnieniu (3.21) można wielkości (3.23) łatwo doprowadzić do postaci ($j = 1, 2, 3$)

$$\partial \Psi_K^j = \sum_{L=1}^N \sum_{i=1}^3 \dot{\Psi}_{KL}^i \partial \psi_L^{(i-1)}, \quad \partial \Phi_K^j = \sum_{L=1}^N \sum_{i=1}^3 \dot{\Phi}_{KL}^i \partial \psi_L^{(i-1)}, \quad (3.24)$$

gdzie przykładowo jest (por. (3.11))

$$\begin{aligned}
 \dot{\Psi}_{KL}^i &= \int_{\Gamma(u^i)} \left(\pi_p^{1\alpha} v_{\alpha K} \partial p_L^{\alpha} + \pi_p^i v_K \partial p_L^i + \pi_m^{1\alpha} v_{\alpha K} \partial m_L^{\alpha} + \pi_m^i v_K \partial m_L^i \right) \frac{\sqrt{g}}{\sqrt{g_{22}}} d\Gamma, \\
 \dot{\Phi}_{KL}^i &= \int_{\Gamma(u^i)} \left(\pi_p^{\alpha\beta} \gamma_{\alpha\beta K} \partial p_L^{\alpha\beta} + \pi_p^{\alpha} \gamma_{\alpha K} \partial p_L^{\alpha} + \pi_m^{\alpha\beta} \kappa_{\alpha\beta K} \partial m_L^{\alpha\beta} + \pi_m^{\alpha} \kappa_{\alpha K} \partial m_L^{\alpha} \right) \frac{\sqrt{g}}{\sqrt{g_{22}}} d\Gamma. \quad (3.25)
 \end{aligned}$$

Zależne od składowych stanu napięcia w stanie podstawowym miary sztywności Ψ_{KL}^{0l} , Φ_{KL}^{0l} można po wykorzystaniu (3.8) przedstawić w funkcji liniowej przemieszczeń uogólnionych tego stanu

$$\Psi_{KL}^{0l} = \sum_{j=1}^N \sum_{j=1}^3 {}^j\Psi_{KL}^{0l} \psi_j^{(1-j)}, \quad \Phi_{KL}^{0l} = \sum_{j=1}^N \sum_{j=1}^3 {}^j\Phi_{KL}^{0l} \psi_j^{(j-1)} \quad (3.26)$$

i podobnie zależne od deformacji konfiguracji początkowej miary sztywności Ψ_{KL}^{0l} , Φ_{KL}^{0l} można po uwzględnieniu (3.17)_{1,2}, (3.9) wyrazić następująco:

$$\Psi_{KL}^{0l} = \sum_{j=1}^N \sum_{j=1}^3 {}^j\Psi_{KL}^{0l} \psi_j^{(j-1)}, \quad \Phi_{KL}^{0l} = \sum_{j=1}^N \sum_{j=1}^3 {}^j\Phi_{KL}^{0l} \psi_j^{(j-1)}. \quad (3.27)$$

Wyznaczając z równań (3.1), (3.2), (3.10) jednowymiarowego problemu brzegowego uogólnione przemieszczenia ψ_K w funkcji parametru stanu obciążenia, a następnie podstawiając je do (3.26), (3.27) otrzymujemy na podstawie (3.14), (3.15) i (3.22), (3.24) równania jednowymiarowego uogólnionego zagadnienia na wartości własne, z którego obliczamy krytyczne wartości parametru obciążenia i postacie wyboczenia określone przez $\partial\psi_K$.

Jeżeli pominiemy wpływ deformacji powierzchni π w stanie podstawowym na wyżej opisany problem stateczności dźwigara, to zgodnie z (2.34) w związkach (3.22) należy przyjąć (por. [1])

$$\partial\Psi_K^0 = 0, \quad \partial\Phi_K^0 = 0. \quad (3.28)$$

4. Uwagi końcowe

Wyprowadzone w p. 3 ogólne równania mogą być podstawą budowy jednowymiarowych modeli stateczności.

Jeżeli kształt i struktura dźwigara odpowiada przyjętym w pracy założeniom, a szeroko rozumiane doświadczenia wskazują na praktycznie uzasadnioną możliwość przyjęcia hipotez geometrycznych i statycznych prowadzących do rozważanych postaci równań więzów, to w wyniku postępowania opisanego w p. 3 otrzymujemy stosunkowo prosty model zagadnienia. Oczywiście istotnym czynnikiem jest również typ obciążenia zewnętrznego i warunków podparcia oraz relacje między charakterystykami geometrycznymi dźwigara.

Konkretny przykład zastosowania przedstawionej koncepcji ujęcia problemu stateczności wraz z propozycją dalszych uproszczeń otrzymanych równań zamieszczono w pracy [8].

Prezentowane w p. 2 i 3 rozważania wskazują, że uogólnienie koncepcji na przypadek teorii geometrycznie nieliniowej jest możliwe. Jednak złożoność odpowiednich równań i wzorów oraz stopni trudności uzyskania rozwiązania tych równań znacznie wzrasta.

Pewne inne uogólnienia i rozszerzenia w zakresie liniowym możliwe stosunkowo łatwo do adaptacji na zagadnienie stateczności (w rozumieniu tej pracy) zawiera poświęcona problemom statyki i drgań obszerna rozprawa [7]. Rozszerzenia te dotyczą głównie struktury dźwigara, kształtu powierzchni podstawowej i postaci równań więzów wewnętrznych.

W pozycji [7] poruszono również tematykę poprawności i dokładności modelu jednowymiarowego i podano bardziej wyczerpującą literaturę dotyczącą ciągłych modeli dźwigarów siatkowych i mechaniki kontinuum z więzami wewnętrznymi.

Obszerną bibliografię problemu matematycznego formułowania zagadnień z mechaniki ustrojów siatkowych (w tym zagadnienia stateczności) zawierają monografie [3, 4, 5] oraz rozprawa przeglądowa [9].

Spis literatury

1. R. NAGÓRSKI, *Stability of a one-dimensional continuous model surface lattice beams*, Bull. Acad. Polon. Sci., Série Sci. Techn., 30, 5 - 6, 1982.
2. Cz. WOŹNIAK, *On the non-standard continuum mechanics. I. Basic concepts. Continua with constrained kinematic fields. II. Continua with kinetic and kinematic-kinetic constraints*, Bull. Acad. Polon. Sci., Série Sci. Techn., 24, 1, 1976.
3. Cz. WOŹNIAK, *Siatkowe dźwigary powierzchniowe*, PWN, Warszawa 1970.
4. W. GUTKOWSKI, *Regularne konstrukcje prętowe*, PWN, Warszawa 1973.
5. H. FRĄCKIEWICZ, *Mechanika ośrodków siatkowych*, PWN, Warszawa 1970.
6. R. NAGÓRSKI, *Statics and vibrations of a one-dimensional continuous model of surface lattice beams*, Bull. Acad. Polon. Sci., Serie Sci. Techn., 30, 5 - 6, 1982.
7. R. NAGÓRSKI, *Jednowymiarowe modele ciągle siatkowych dźwigarów powierzchniowych*, Zesz. Nauk. Pol. Warszawskiej, Seria: Bud. (w druku).
8. R. NAGÓRSKI, *Jednowymiarowy ciągły model stateczności sprężystej płaskiego dźwigara siatkowego*, Mech. Teor. i Stos. (ibid.).
9. W. GUTKOWSKI, *Mechanika ustrojów siatkowych*, Usp. Mech., t. 1, nr 3/4, 1978.

Резюме

УСТОЙЧИВОСТЬ ОДНОМЕРНОЙ НЕПРЕРЫВНОЙ МОДЕЛИ СЕТКООБРАЗНЫХ УПРУГИХ ПОВЕРХНОСТНЫХ КОНСТРУКЦИЙ

Предметом настоящей работы являются линейные уравнения устойчивости в смысле Эйлера поверхностных упругих систем с густой регулярной сеткой элементов. Эти уравнения получены в результате применения положений механики континуума с внутренними связями Ч. Возняка уравнениям поверхности типа Коссератов являющейся непрерывной моделью рассматриваемых конструкций

Summary

STABILITY OF A ONE-DIMENSIONAL CONTINUOUS MODEL OF LATTICE-TYPE ELASTIC SURFACE STRUCTURES

The paper deals with linear equations of stability for a one-dimensional continuous model of elastic surface structures with a dense regular lattice of elements. The equations were obtained by applying Woźniak's concept of continuum mechanics with internal constraints to equations of stability of Cosserat's surface, being two-dimensional continuous model for surface grids and perforated shells. The condition of stability in the Euler sense was formulated, i.e. the adequate one-dimensional boundary — value problem was presented.

Praca została złożona w Redakcji dnia 16 listopada 1983 roku