

## ZGINANIE BELEK LEPKOSPĘŻYSTYCH NA PODŁOŻU REOLOGICZNYM

TADEUSZ SMOLEŃ

*WSI w Opolu  
Instytut Inżynierii Lądowej*

### 1. Wstęp

Praca stanowi propozycję metody do analizy statycznej lepkospężytych belek o skończonej długości i dowolnym schemacie statycznym, spoczywających na podłożu reologicznym o właściwościach dających opisać się modelem ciała liniowo-lepkospężytego.

Z punktu widzenia mechaniki, zagadnienie zginania belek spoczywających na podłożu odkształcalnym, można zaliczyć do działu poświęconego tzw. zadaniom kontaktowym o niezmiennym — z góry określonym — obszarze kontaktu. Natomiast pod względem technicznym zagadnienie to dotyczy ważnej problematyki inżynierskiej, a mianowicie współpracy konstrukcji lub jej elementów z podłożem, na którym są one posadowione. Z tego względu rozwijanie i doskonalenie matematycznych modeli współpracy konstrukcji z podłożem oraz poszukiwanie coraz efektywniejszych metod rozwiązywania zadań z tego zakresu może rozszerzyć nie tylko sferę poznawczą zagadnienia, ale także bazę możliwości poprawnego rozwiązywania konkretnych zadań z praktyki inżynierskiej.

Temat zginania belek spoczywających na podłożu odkształcalnym znajduje wiele miejsca w literaturze poświęconej współpracy konstrukcji z podłożem. Szczególnie efektywne metody obliczeniowe opracowano dla rozwiązywania zadań z tego zakresu w wersji sprężystej, np. [1, 2, 3, 4]. Wspólną cechą tych metod jest przyjęcie modelu ciała liniowo-sprężystego do opisu własności materiałów, zarówno belki, jak i podłoża. Przyjęcie takie znacznie ułatwia rozwiązywanie wielu konkretnych zadań inżynierskich, ale uzyskiwane wyniki bardzo często wyraźnie odbiegają od realnych, gdyż układ belka-podłoże ma w rzeczywistości cechy — ogólnie mówiąc — zdecydowanie niesprężyste (lepkospężyte, lepkoplastyczne, plastyczne itp.). Sprawiają one, że aktualny stan naprężenia i odkształcenia zależy nie tylko od aktualnego stanu obciążenia, ale także od historii procesu deformacji belki i podłoża.

Ewidentny postęp w kierunku urealnienia modelu współpracy belki z podłożem czynią prace przyjmujące do opisu cech układu model ciała liniowo-lepkospężytego. Dzięki temu możliwe staje się ujęcie cech reologicznych materiału belki (np. beton, żelbet) i podłoża (np. grunt). Konsekwencją takiego opisu jest niestety znaczna komplikacja matematycznej strony zagadnienia w stosunku do jej wersji sprężystej. Fakt ten sprawia, że tylko dla nielicznych, wyidealizowanych zadań znane są poprawne i praktyczne w stosowaniu

rozwiązania przy obciążeniach statycznych i dynamicznych, np. [5, 6, 7]. Główną przeszkodą w uzyskiwaniu zadowalających rozwiązań w zakresie lepkosprężystym jest różniczkowo-całkowa postać równań opisujących pracę układu belka-podłoże, co w wielu realnych przypadkach wyłania zadania brzegowe wręcz niemożliwe do rozwiązania w sposób ścisły. Jedyłą szansą są wówczas metody oparte na analizie numerycznej.

W niniejszej pracy zaprezentowano kompleksową metodę wyznaczania przemieszczeń i sił wewnętrznych w belkach spoczywających na podłożu odkształcalnym w zakresie lepkosprężystym, poddanych quasi-statycznym obciążeniom o dowolnym rozkładzie i przebiegu w czasie. Sformułowania zadań dokonano w oparciu o analogię sprężysto-lepkosprężystą dla wybranych modeli współpracy belki z podłożem. Ideą metody jest wariacyjne ujęcie zagadnienia i wykorzystanie metody elementów skończonych (MES) w wersji półanalitycznej, pozwalającej na uniknięcie — kłopotliwej pod względem numerycznym — dyskretyzacji skali czasu. Materiał belki i podłoża potraktowano jako ciała liniowo-lepkosprężyste o odmiennych parametrach reologicznych (tzn. o różnych funkcjach relaksacji i pełzania) w wersji zaproponowanej przez Gurtina i Sternberga [8], a więc bez konkretyzowania typu modelu reologicznego. Dzięki temu opracowana metoda stanowi pewne uogólnienie metod analizy sprężystej na zakres lepkosprężysty.

## 2. Sformułowanie zadań brzegowych

Przedmiotem rozważań jest lepkosprężysta belka o skończonej długości i dowolnym schemacie statycznym, poddana quasi-statycznym obciążeniom dowolnego typu. Poszukiwanymi wielkościami są tutaj; funkcja ugięcia belki  $w = w(x, t)$  — opisująca proces deformacji belki oraz funkcja momentu zginającego  $M = M(x, t)$  — określająca ewolucję stanu naprężenia w belce. Postać równań opisujących zależęć będzie od przyjętego modelu podłoża i rodzaju współpracy belki z podłożem. W zakresie sprężystym znane są, między innymi, takie modele podłoża, jak; jednoparametrowy — typu Winklera-Zimmermanna, wieloparametrowe — typu Własowa, Wiegharda, Schulcego oraz ciągłe — typu półprzestrzeni lub półpłaszczyzny sprężystej.

Punktem wyjścia do sformułowania zadań brzegowych będzie różniczkowe równanie równowagi belki oraz równania fizyczne materiału belki i podłoża.

### 1° Belka lepkosprężysta na podłożu lepkosprężystym typu Winklera

Różniczkowe równanie równowagi belki opartej na podłożu odkształcalnym ma znaną postać

$$\frac{d^2 M(x, t)}{dx^2} = p(x, t) - q(x, t), \quad (2.1)$$

gdzie  $q(x, t)$  jest funkcją obciążenia ciągłego, natomiast  $p(x, t)$  — tzw. odporem podłoża.

Związek fizyczny dla belki wynika z ogólnego równania konstytutywnego dla ciała liniowo-lepkosprężystego [8, 9]

$$\sigma_{ij}(x, t) = E_{ijkl}(t) \times d\epsilon_{kl}(x, t), \quad (2.2)$$

sprowadzającego się — przy założeniu izotropii materiału i zredukowaniu do parametrów opisujących stan naprężenia i odkształcenia w przekroju belki — do postaci

$$M(x, t) = -E_0 J \cdot de(t) \times \frac{d^2 w(x, t)}{dx^2}, \quad (2.3)$$

gdzie  $e(t)$  jest bezwymiarową funkcją relaksacji materiału belki,  $E_0 J$  — sztywnością belki na zginanie. Symbol „ $\times$ ” oznacza mnożenie splotowe,

Związek fizyczny dla podłoża przyjęto — przez analogię do wariantu sprężystego — w postaci [5]

$$p(x, t) = R_0 dr(t) \times w(x, t), \quad (2.4)$$

w którym  $r(t)$  oznacza bezwymiarową funkcję relaksacji materiału podłoża typu Winklera, a  $R_0$  jest stałym parametrem tego podłoża.

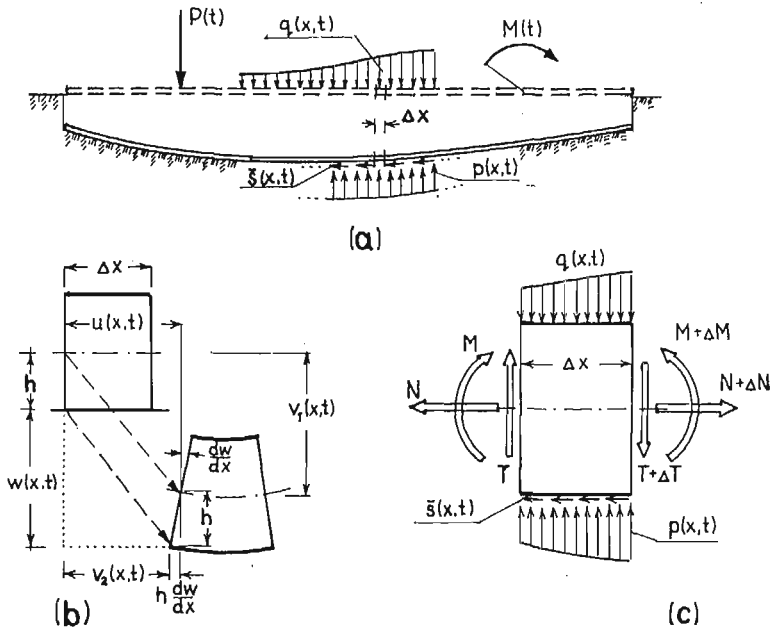
Podstawiając prawą stronę równania (2.4) w miejsce  $p(x, t)$  w równaniu (2.1), otrzymuje się

$$\frac{d^2 M(x, t)}{dx^2} - R_0 dr(t) \times w(x, t) = -q(x, t). \quad (2.5)$$

Równania (2.3) i (2.5) posłużą do sformułowania zadania wariacyjnego dla metody elementów skończonych.

## 2° Belka lepkosprężysta na podłożu lepkosprężystym typu Własowa

Formuła współpracy belki z podłożem typu Własowa opiera się na założeniu zgodności przemieszczeń pionowych i poziomych w obszarze kontaktu belki z podłożem. Wskutek tego obciążenia poprzeczne wywołują, oprócz momentu zginającego i siły poprzecznej, także siłę osiową.



Rys. 1.

Z równań równowagi elementu belki (rys. 1c) wynikają następujące zależności pomiędzy siłami wewnętrznymi a obciążeniem i reakcjami podłoża:

$$\frac{dN(x, t)}{dx} = \bar{s}(x, t), \quad (2.6)$$

$$\frac{dT(x, t)}{dx} = p(x, t) - q(x, t), \quad (2.7)$$

$$\frac{dM(x, t)}{dx} = T(x, t) + s(x, t) \cdot h. \quad (2.8)$$

Warunki zgodności przemieszczeń punktów obszaru kontaktu belki z podłożem prowadzą do równań (rys. 1b)

$$v_1(x, t) = w(x, t), \quad (2.9)$$

$$v_2(x, t) = u(x, t) - h \frac{dw(x, t)}{dx}. \quad (2.10)$$

Równania fizyczne dla belki, wyrażone przez funkcję przemieszczeń punktów osi belki  $u(x, t)$  i  $w(x, t)$ , otrzymuje się ze znanych zależności geometrycznych oraz warunków równowagi wewnętrznej przy wykorzystaniu równania (2.2)

$$M(x, t) = -E_0 J de(t) \times \frac{d^2 w(x, t)}{dx^2}, \quad (2.11)$$

$$N(x, t) = E_0 A de(t) \times \frac{du(x, t)}{dx}, \quad (2.12)$$

gdzie  $E_0 A$  jest sztywnością osiową belki.

Związki fizyczne dla podłoża przyjęto w następującej postaci:

$$p(x, t) = R_0 dr(t) \times w(x, t), \quad (2.13)$$

$$\bar{s}(x, t) = S_0 \cdot ds(t) \times v_2(x, t), \quad (2.14)$$

gdzie  $s(t)$  oznacza bezwymiarową funkcję relaksacji podłoża przy deformacji wzdłuż linii kontaktu.

Równania (2.6) ÷ (2.14) stanowią układ dziewięciu równań. Redukując ten układ równań do postaci zawierającej jedynie funkcje przemieszczeń  $u(x, t)$  i  $w(x, t)$ , otrzymuje się dwa równania

$$E_0 J de(t) \times \frac{d^4 w(x, t)}{dx^4} + R_0 \cdot dr(t) \times w(x, t) + S_0 ds(t) \times \left[ \frac{du(x, t)}{dx} - h \frac{d^2 w(x, t)}{dx^2} \right] = q(x, t), \quad (2.15)$$

$$E_0 A \cdot de(t) \times \frac{d^2 u(x, t)}{dx^2} - S_0 \cdot ds(t) \times \left[ u(x, t) - h \frac{dw(x, t)}{dx} \right] = 0.$$

Podobnie jak dla poprzedniego modelu współpracy, równania (2.15) wykorzystane zostaną do sformułowania zadania wariacyjnego w postaci wygodnej do zastosowania MES.

## 3° Belka lepkospężysta na podłożu typu półpłaszczyzny lepkospężystej

W odróżnieniu od dwóch poprzednich modeli podłoża, model podłoża ciągłego charakteryzuje się tym, że obciążenie zadane na jego powierzchni wywołuje przemieszczenia nie tylko w obszarze tego obciążenia, ale również poza nim. Przyjęcie takiego modelu podłoża, chociaż wydaje się najbardziej realne, wymaga jednak odwołania się do skomplikowanych rozwiązań klasycznych zadań brzegowych w teorii sprężystości (np. zagadnienia Boussinesqa i Cerrutiego [10, 11]).

W aspekcie kinematycznej współpracy belki z podłożem możliwe są dwa przypadki. W pierwszym zakłada się jedynie zgodność pionowych przemieszczeń punktów osi belki z odpowiadającymi im punktami podłoża. W drugim zakłada się dodatkowo także zgodność przemieszczeń stycznych do linii kontaktu belki z podłożem.

Ograniczając rozważania do przypadku pierwszego, dla określenia związku między przemieszczeniami pionowymi punktów osi belki  $w(x, t)$  i odporem podłoża  $p(x, t)$ , wykorzystano znany wzór Flamanta [3]

$$w(x, t) = -\frac{2}{\pi b E_p} \int_0^L p(y/L, t) \ln \frac{|x-y|}{L} dy + A, \quad (2.16)$$

w którym  $b$  jest szerokością belki,  $E_p$  modułem sprężystości półpłaszczyzny, natomiast  $A$  dowolną stałą. Przenosząc związek (2.16) — w oparciu o analogię sprężysto-lepkospężystą — na przypadek półpłaszczyzny lepkospężystej, otrzymuje się

$$w(\xi, t) = -\frac{2}{\pi C_0} dc(t) * \int_0^1 p(\eta, t) \ln |\xi - \eta| d\eta + A(t), \quad (2.17)$$

gdzie  $c(t)$  jest bezwymiarową funkcją pełzania materiału podłoża,  $C_0 = bE_p$ ,  $\xi = x/L$ ,  $\eta = y/L$ .

Dążąc do maksymalnie prostego sformułowania omawianego zadania brzegowego, pozwalającego na uniknięcie konieczności przekształcania równania całkowego (2.17), jako wielkości poszukiwane przyjęto funkcje  $w(\xi, t)$  i  $p(\xi, t)$ . Eliminując funkcję momentu zginającego  $M(x, t)$  z równań (2.1) i (2.3) oraz dołączając równanie (2.17), uzyskano następujący układ równań całkowych:

$$\begin{aligned} \frac{E_0 J}{L^4} dc(t) * \int_0^1 \frac{d^4 w(\eta, t)}{d\eta^4} \delta(\xi - \eta) d\eta + \int_0^1 p(\eta, t) \delta(\xi - \eta) d\eta &= q(\xi, t), \\ \int_0^1 w(\eta, t) \delta(\xi - \eta) d\eta + \frac{2}{\pi C_0} dc(t) * \int_0^1 p(\eta, t) \ln |\xi - \eta| d\eta &= A(t), \end{aligned} \quad (2.18)$$

który opisuje zginanie belki lepkospężystej na ciągłym podłożu lepkospężystym traktowanym jako półpłaszczyzna.

### 3. Wariacyjne ujęcie zadań brzegowych

Mając na uwadze wykorzystanie metody elementów skończonych do rozwiązania sformułowanych zadań brzegowych, dokonano wariacyjnego ujęcia tych zadań. Wykorzystano ogólny schemat postępowania wynikający ze znanego twierdzenia Wainberga w teorii równań operatorowych. Zgodnie z tym twierdzeniem [12], dla równania operatorowego postaci

$$\mathbf{A}\mathbf{u} + \mathbf{f} = \mathbf{0}, \quad (3.1)$$

istnieje funkcjonal  $\mathcal{F}(u)$

$$\mathcal{F}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \langle \mathbf{A}\mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle + \langle \mathbf{f}, \mathbf{u} \rangle, \quad (3.2)$$

którego warunek stacjonarności prowadzi do równania (3.1). W formułach (3.1) i (3.2)  $\mathbf{A}$  jest operatorem równań zadania brzegowego,  $\mathbf{u}$  wektorem poszukiwanych rozwiązań,  $\mathbf{f}$  wektorem funkcji zadanych, natomiast symbol  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  oznacza iloczyn skalarny. Ogólnym warunkiem istnienia funkcjonału (3.2) jest potencjalność operatora  $\mathbf{A}$ , która dla operatora liniowego zachodzi wówczas, gdy operator ten spełnia warunek symetrii [12]

$$\langle \mathbf{A}\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{A}\mathbf{v} \rangle, \quad (3.3)$$

gdzie  $\mathbf{u}$  i  $\mathbf{v}$  traktowane są jako elementy przestrzeni Hilberta  $\mathcal{H}_A$  rozwiązań równania (3.1), z iloczynem skalarnym postaci

$$\langle \mathbf{u}(x, t), \mathbf{v}(x, t) \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^L \mathbf{u}(x, t) \times \mathbf{v}(x, t) dx. \quad (3.4)$$

#### Wariacyjne ujęcie zadania brzegowego 1°

Równania (2.3) i (2.5) — odpowiadające pierwszemu zadaniu brzegowemu — można zapisać w następującej postaci operatorowej:

$$\begin{bmatrix} \frac{dc(t)}{E_0 J} \times (\dots), \delta(t) \times \frac{d^2}{dx^2} (\dots) \\ \delta(t) \times \frac{d^2}{dx^2} (\dots), -R_0 dr(t) \times (\dots) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M(x, t) \\ w(x, t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ q(x, t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (3.5)$$

Porównując równanie (3.5) z (3.1) łatwo stwierdzić, że

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} M(x, t) \\ w(x, t) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{dc(t)}{E_0 J} \times (\dots), \delta(t) \times \frac{d^2}{dx^2} (\dots) \\ \delta(t) \times \frac{d^2}{dx^2} (\dots), -R_0 dr(t) \times (\dots) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f} = \begin{bmatrix} 0 \\ q(x, t) \end{bmatrix}, \quad (3.6)$$

gdzie  $\delta(t)$  jest funkcją Diraca natomiast  $c(t) = \mathcal{L}^{-1}\{1/\mathcal{L}[e(t)]\}$ .

Ponieważ operator  $\mathbf{A}$  jest w tym przypadku symetryczny, więc istnieje funkcjonal typu (3.2). Realizując iloczyny skalarne w (3.2), otrzymano

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_1(w, M) = & \frac{1}{2} \frac{dc(t)}{E_0 J} * \int_0^L M(x, t) * M(x, t) dx + \frac{1}{2} \int_0^L w''(x, t) * M(x, t) dx + \\ & + \frac{1}{2} \int_0^L w(x, t) * M''(x, t) dx - \frac{1}{2} R_0 dr(t) * \int_0^L w(x, t) * w(x, t) dx + \int_0^L q(x, t) * w(x, t) dx. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Zaprezentowane ujęcie wariacyjne pierwszego zadania brzegowego pozwala na niezależne traktowanie pól przemieszczeń i momentów zginających, co stanowi zaletę z punktu widzenia metody elementów skończonych.

### Wariacyjne ujęcie zadania brzegowego 2°

Przedmiotem rozważań są tutaj równania (2.15), którym można nadać postać operatorową (3.1) o następującej strukturze:

$$\mathbf{A} = \left[ \begin{array}{l} E_0 J \cdot de * \frac{d^4}{dx^4} (\dots) - h \cdot S_0 ds * \frac{d^2}{dx^2} (\dots) + R_0 dr * (\dots), S_0 ds * \frac{d}{dx} (\dots) \\ S_0 ds * \frac{d}{dx} (\dots), \frac{E_0 A}{h} de * \frac{d^2}{dx^2} (\dots) - \frac{S_0}{h} ds * (\dots) \end{array} \right], \quad (3.8)$$

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} w(x, t) \\ u(x, t) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f} = \begin{bmatrix} -q(x, t) \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Podobnie jak w pierwszym zadaniu brzegowym, symetria operatora (3.8) zapewnia istnienie funkcyjnału typu (3.2). Realizując formułę (3.2) dla wyrażeń (3.8), otrzymano funkcyjnał

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_2(u, w) = & \frac{1}{2} E_0 J de(t) * \int_0^L w^{IV}(x, t) * w(x, t) dx - \frac{S_0}{2h} ds(t) * \int_0^L w''(x, t) * w(x, t) dx + \\ & + \frac{1}{2} R_0 dr(t) * \int_0^L w(x, t) * w(x, t) dx + \frac{1}{2} S_0 ds(t) * \int_0^L u'(x, t) * w(x, t) dx + \\ & + \frac{1}{2} S_0 ds(t) * \int_0^L w'(x, t) * u(x, t) dx + \frac{1}{2} \frac{E_0 A}{h} de(t) * \int_0^L u''(x, t) * u(x, t) dx + \\ & - \frac{1}{2} \frac{S_0}{h} ds(t) * \int_0^L u(x, t) * u(x, t) dx - \int_0^L q(x, t) * w(x, t) dx, \end{aligned} \quad (3.9)$$

którego warunek stacjonarności prowadzi do równań (2.15). W proponowanym ujęciu wariacyjnym (drugiego zadania brzegowego) pola przemieszczeń pionowych  $w(x, t)$  i poziomych  $u(x, t)$  traktowane są niezależnie.

### Wariacyjne ujęcie zadania brzegowego 3°

Dla wariacyjnego ujęcia trzeciego zadania brzegowego, równania (2.18) przepisano w następującej postaci operatorowej

$$\begin{bmatrix} \frac{E_0 J}{L^4} de(t) \times \int_0^1 \delta(\xi - \eta) \frac{d^4}{d\eta^4} (\cdot) d\eta, \delta(t) \times \int_0^1 \delta(\xi - \eta) (\cdot) d\eta \\ \delta(t) \times \int_0^1 \delta(\xi - \eta) (\cdot) d\eta, \frac{2}{\pi C_0} dc(t) \times \int_0^1 \ln|\xi - \eta| (\cdot) d\eta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} w(\eta, t) \\ p(\eta, t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -q(\xi, t) \\ A(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

Operator

$$\mathbf{A} = \int_0^1 \begin{bmatrix} \frac{E_0 J}{L^4} \delta(t) \times \frac{d^4}{d\eta^4} (\dots) \delta(\xi - \eta), \delta(t) \times (\dots) \delta(\xi - \eta) \\ \delta(t) \times (\dots) \delta(\xi - \eta), \frac{2}{\pi C_0} dc(t) \times \ln|\xi - \eta| (\dots) \end{bmatrix} d\eta$$

jest w tym przypadku operatorem całkowym. Fakt ten wyłania konieczność sprawdzenia jego symetrii (3.3). W rozważanym zadaniu brzegowym

$$\mathbf{u} = [w_1(\xi, t), p_1(\xi, t)], \quad \mathbf{v} = [w_2(\xi, t), p_2(\xi, t)].$$

Rozwijając warunek symetrii (3.3), otrzymano

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{A}\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle - \langle \mathbf{u}, \mathbf{A}\mathbf{v} \rangle &= \frac{E_0 J}{L^3} de(t) \times \int_0^1 w_1^{IV}(\xi, t) \times w_2(\xi, t) d\xi + L \int_0^1 p_1(\xi, t) \times w_2(\xi, t) d\xi + \\ &+ L \int_0^1 w_1(\xi, t) \times p_2(\xi, t) d\xi + \frac{2}{\pi C_0} dc(t) \times \int_0^1 \int_0^1 \ln|\xi - \eta| p_1(\xi, t) \times p_2(\eta, t) d\eta \cdot d\xi + \\ &- \frac{E_0 J}{L^3} de(t) \times \int_0^1 w_2^{IV}(\xi, t) \times w_1(\xi, t) d\xi - L \int_0^1 p_2(\xi, t) \times w_1(\xi, t) d\xi + \\ &- L \int_0^1 w_2(\xi, t) \times p_1(\xi, t) d\xi - \frac{2}{\pi C_0} dc(t) \times \int_0^1 \int_0^1 \ln|\xi - \eta| p_2(\xi, t) \times p_1(\eta, t) d\eta d\xi. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Całkowanie przez części oraz uwzględnienie warunków brzegowych pozwala zredukować większość składników w (3.11), z wyjątkiem tych, które zawierają całki podwójne. Jednak dzięki formalnej zamianie zmiennych w jednej z całek podwójnych i wykorzystaniu symetrii jądra całkowego  $\ln|\xi - \eta| = \ln|\eta - \xi|$ , staje się ona identyczna z drugą całką podwójną, a zatem składniki te również ulegają redukcji, co ostatecznie dowodzi symetrii operatora równań (3.10), a więc istnienia funkcjonału typu (3.2). Ma on postać



$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_3(w, p) = & \frac{1}{2} \frac{E_0 J}{L^3} de(t) * \int_0^1 w^{iv}(\xi, t) * w(\xi, t) d\xi + L \int_0^1 p(\xi, t) * w(\xi, t) d\xi + \\
& + \frac{1}{C_0} dc(t) * \int_0^1 \int_0^1 \ln|\xi - \eta| p(\xi, t) * p(\eta, t) d\eta d\xi + \\
& - L \int_0^1 q(\xi, t) * w(\xi, t) d\xi - A(t) * L \int_0^1 p(\xi, t) d\xi.
\end{aligned} \tag{3.12}$$

W zakończeniu tej części pracy wydaje się rzeczą celową zwrócić uwagę na problem warunków brzegowych, które nie były dotychczas przedmiotem rozważań. Sposób ich uwzględnienia z reguły wiąże się z zastosowaną metodą rozwiązania zadania, dlatego szersze omówienie tego problemu ma miejsce w następnej części pracy, dotyczącej realizacji MES.

#### 4. Realizacja metody elementów skończonych

Algorytmy realizowane w metodzie elementów skończonych, których punktem wyjścia są wariacyjne zasady podejmowanych zadań mechaniki konstrukcji, cechuje — typowa dla tej metody — duża uniwersalność. Wyraża się to przede wszystkim niezależnością schematu postępowania (przy konstrukcji tych algorytmów) od przyjętej zasady wariacyjnej podejmowanego problemu.

W niniejszej pracy przedstawiono algorytm rozwiązania w MES dla pierwszego zadania brzegowego traktując ten algorytm jako przykład, a zarazem wzór do opracowania podobnych algorytmów dla pozostałych zadań brzegowych. W realizacji celu kierowano się koncepcją analitycznego ujęcia czasu i wykorzystania ścisłego zadania w zakresie sprężystym do aproksymacji poszukiwanego rozwiązania lepkospężystego.

##### Podział belki na elementy i aproksymacja rozwiązania

Dla aproksymacji rozwiązania zadania dokonano naturalnego podziału belki na elementy skończone w sposób pozwalający uniknąć kłopotów związanych z nieciągłością funkcji sił wewnętrznych w punktach przyłożenia obciążeń skupionych (rys. 2).

Zgodnie z koncepcją, aproksymację pola przemieszczeń i pola momentów zginających w obrębie elementu przyjęto w postaci [13]

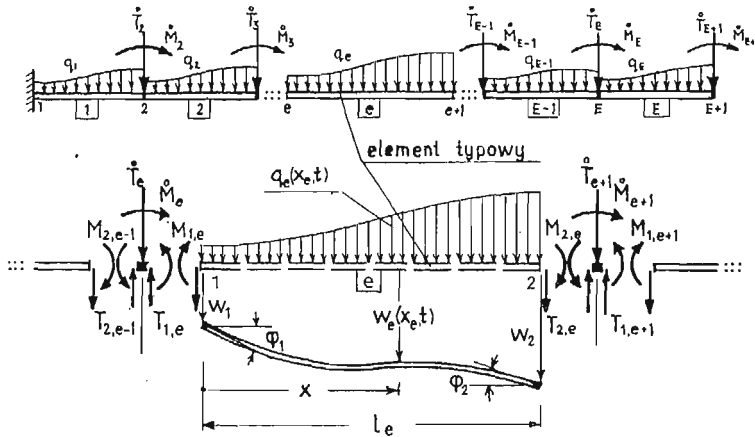
$$w_e(x_e, t) = \alpha_1^e(t)\eta_1^e(x_e) + \alpha_2^e(t)\eta_2^e(x_e) + \alpha_3^e(t)\eta_3^e(x_e) + \alpha_4^e(t)\eta_4^e(x_e) = \alpha_e^T(t)\eta_e(x_e), \tag{4.1}$$

$$M_e(x_e, t) = \beta_1^e(t)\eta_2^e(x_e) + \beta_2^e(t)\eta_3^e(x_e) + \beta_3^e(t)\eta_4^e(x_e) = \beta_e^T(t)\eta_e(x_e), \tag{4.2}$$

gdzie

$$\begin{aligned}
\eta_1^e(x_e) &= \text{sh}(\kappa_e x_e) \sin(\kappa_e x_e), & \eta_2^e(x_e) &= \text{sh}(\kappa_e x_e) \cos(\kappa_e x_e), \\
\eta_3^e(x_e) &= \text{ch}(\kappa_e x_e) \sin(\kappa_e x_e), & \eta_4^e(x_e) &= \text{ch}(\kappa_e x_e) \cos(\kappa_e x_e),
\end{aligned}$$

$$\kappa_e = \sqrt[4]{\frac{R_{0e}}{4E_0 J_e}}.$$



Rys. 2

Nieznane wektory funkcyjne  $\alpha_e(t)$  i  $\beta_e(t)$  muszą czynić zadość kinematycznym i statycznym warunkom brzegowym na końcach elementu (rys. 2), a więc

$$\begin{aligned}
 w_e(0, t) = w_{1e}(t) &\rightarrow \alpha_e^T(t) \eta_e(0) = w_{1e}(t) & M_e'(0, t) = -T_{1e}(t) &\rightarrow \beta_e^T(t) \eta_e'(0) = -T_{1e}(t) \\
 w_e'(0, t) = \Phi_{1e}(t) &\rightarrow \alpha_e^T(t) \eta_e'(0) = \Phi_{1e}(t) & M_e(0, t) = M_{1e}(t) &\rightarrow \beta_e^T(t) \eta_e(0) = M_{1e}(t) \\
 w_e(l_e, t) = w_{2e}(t) &\rightarrow \alpha_e^T(t) \eta_e(l_e) = w_{2e}(t) & M_e'(l_e, t) = T_{2e}(t) &\rightarrow \beta_e^T(t) \eta_e'(l_e) = T_{2e}(t) \\
 w_e'(l_e, t) = \Phi_{2e}(t) &\rightarrow \alpha_e^T(t) \eta_e'(l_e) = \Phi_{2e}(t) & M_e(l_e, t) = -M_{2e}(t) &\rightarrow \beta_e^T(t) \eta_e(l_e) = -M_{2e}(t)
 \end{aligned} \quad (4.3)$$

Warunkom (4.3) można nadać następującą postać macierzową

$$\mathbf{w}_e(t) = [\mathbf{A}_e]^{-1} \alpha_e(t), \quad (4.4)$$

$$\mathbf{m}_e(t) = [\mathbf{B}_e]^{-1} \beta_e(t), \quad (4.5)$$

gdzie

$$\mathbf{w}_e(t) = [w_{1e}(t), \Phi_{1e}(t), w_{2e}(t), \Phi_{2e}(t)]^T, \quad \mathbf{m}_e(t) = [T_{1e}(t), M_{1e}(t), T_{2e}(t), M_{2e}(t)]^T,$$

$$[\mathbf{A}_e]^{-1} = \begin{bmatrix} \eta_{1e}(0), & \eta_{2e}(0), & \eta_{3e}(0), & \eta_{4e}(0) \\ \eta'_{1e}(0), & \eta'_{2e}(0), & \eta'_{3e}(0), & \eta'_{4e}(0) \\ \eta_{1e}(l_e), & \eta_{2e}(l_e), & \eta_{3e}(l_e), & \eta_{4e}(l_e) \\ \eta'_{1e}(l_e), & \eta'_{2e}(l_e), & \eta'_{3e}(l_e), & \eta'_{4e}(l_e) \end{bmatrix},$$

$$[\mathbf{B}_e]^{-1} = \begin{bmatrix} -\eta'_{1e}(0), & -\eta'_{2e}(0), & -\eta'_{3e}(0), & -\eta'_{4e}(0) \\ \eta_{1e}(0), & \eta_{2e}(0), & \eta_{3e}(0), & \eta_{4e}(0) \\ \eta'_{1e}(l_e), & \eta'_{2e}(l_e), & \eta'_{3e}(l_e), & \eta'_{4e}(l_e) \\ -\eta_{1e}(l_e), & -\eta_{2e}(l_e), & -\eta_{3e}(l_e), & -\eta_{4e}(l_e) \end{bmatrix}$$

W ten sposób funkcje  $w_e(x_e, t)$  i  $M_e(x_e, t)$  zostały wyrażone przez parametry węzłowe  $\mathbf{w}_e(t)$ ,  $\mathbf{m}_e(t)$  oraz wektor funkcyjny  $\eta_e(x_e)$

$$w_e(x_e, t) = \eta_e^T(x_e) [\mathbf{A}_e] \mathbf{w}_e(t) = \mathbf{w}_e^T(t) [\mathbf{A}_e^T] \eta_e(x_e), \quad (4.6)$$

$$M_e(x_e, t) = \eta_e^T(x_e) [\mathbf{B}_e] \mathbf{m}_e(t) = \mathbf{m}_e^T(t) [\mathbf{B}_e^T] \eta_e(x_e). \quad (4.7)$$

**Funkcjonał dla elementu typowego**

Wykorzystując wariacyjne ujęcie rozważanego zagadnienia, funkcyjonał (3.7) dla typowego elementu belki (rys. 2) zapisano w postaci

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_e(w_e, M_e) = & \frac{1}{2} \frac{dc(t)}{E_0 J_e} \times \int_0^{l_e} M_e(x_e, t) \times M_e(x_e, t) dx_e + \frac{1}{2} \int_0^{l_e} w_e''(x_e, t) \times M_e(x_e, t) dx_e + \\ & + \frac{1}{2} \int_0^{l_e} w_e(x_e, t) \times M_e''(x_e, t) dx_e - \frac{1}{2} R_0 dr(t) \times \int_0^{l_e} w_e(x_e, t) \times w_e(x_e, t) dx_e + \\ & + \int_0^{l_e} w_e(x_e, t) \times q_e(x_e, t) dx_e, \end{aligned} \quad (4.8)$$

a następnie — korzystając z (4.6) i (4.7) — nadano temu funkcyjonałowi następującą formę macierzową

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_e(\mathbf{w}_e, \mathbf{m}_e) = & \frac{1}{2} dc(t) * \mathbf{m}_e^T(t) * [\mathbf{K}_e] \mathbf{m}_e(t) + \mathbf{w}_e^T(t) * [\mathbf{T}_e] \mathbf{m}_e(t) + \\ & - \frac{1}{2} dr(t) * \mathbf{w}_e^T(t) * [\mathbf{S}_e] \mathbf{w}_e(t) + \mathbf{w}_e^T(t) \times \mathbf{q}_e(t), \end{aligned} \quad (4.9)$$

gdzie

$$\begin{aligned} [\mathbf{K}_e] = & \frac{1}{E_0 J_e} [\mathbf{B}_e^T] \int_0^{l_e} \boldsymbol{\eta}_e(x_e) \cdot \boldsymbol{\eta}_e^T(x_e) dx_e [\mathbf{B}_e], \\ [\mathbf{S}_e] = & R_0 [\mathbf{A}_e^T] \int_0^{l_e} \boldsymbol{\eta}_e(x_e) \cdot \boldsymbol{\eta}_e^T(x_e) dx_e [\mathbf{A}_e], \\ [\mathbf{T}_e] = & \frac{1}{2} [\mathbf{A}_e^T] \int_0^{l_e} [\boldsymbol{\eta}_e''(x_e) \boldsymbol{\eta}_e^T(x_e) + \boldsymbol{\eta}_e(x_e) \boldsymbol{\eta}_e''^T(x_e)] dx_e [\mathbf{B}_e], \\ \mathbf{q}_e(t) = & [\mathbf{A}_e^T] \int_0^{l_e} \boldsymbol{\eta}_e(x_e) \cdot q_e(x_e, t) dx_e. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Jak widać, funkcyjonał (4.9) stanowi sumę form kwadratowych, dwuliniowej i liniowej nieznanymi parametrów węzłowych  $\mathbf{w}_e(t)$  i  $\mathbf{m}_e(t)$  względem iloczynu splotowego. Jądrami tych form są macierze określone wzorami (4.10).

**Globalny układ równań MES**

Tworzenie globalnego funkcyjonału dla całego (połączonego) układu dyskretnego polega tutaj na zapewnieniu ciągłości pola przemieszczeń w węzłach podziału belki na elementy

$$\begin{aligned} w_{2,e}(t) = w_{1,e+1}(t) = w_{e+1}(t), \\ \Phi_{2,e}(t) = \Phi_{1,e+1}(t) = \Phi_{e+1}(t) \end{aligned} \quad (4.11)$$

oraz na zagwarantowaniu równowagi tych węzłów (rys. 2)

$$\begin{aligned} T_{2,e}(t) + T_{1,e+1}(t) &= T_{e+1}(t), \\ M_{2,e}(t) + M_{1,e+1}(t) &= M_{e+1}(t). \end{aligned} \quad (4.12)$$

Realizacja warunków (4.11) i (4.12) narzuca odpowiednie łączenie macierzy  $[\mathbf{K}_e]$ ,  $[\mathbf{T}_e]$ ,  $[\mathbf{S}_e]$  i wektorów  $\mathbf{q}_e(t)$  dla poszczególnych elementów. W wyniku tego łączenia otrzymuje się globalny funkcjonal będący sumą form (kwadratowych, dwuliniowej i liniowej) globalnych parametrów węzłowych  $\mathbf{w}(t)$  i  $\mathbf{m}(t)$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\mathbf{w}, \mathbf{m}) &= \frac{1}{2} dc(t) \times \mathbf{m}^T(t) \times [\mathbf{K}] \mathbf{m}(t) + dc(t) \times \mathbf{m}^T(t) \times [\mathbf{Q}] \dot{\mathbf{m}}(t) + \\ &+ \frac{1}{2} dc(t) \times \dot{\mathbf{m}}(t) \times [\mathbf{K}] \dot{\mathbf{m}}(t) + \mathbf{w}^T(t) \times [\mathbf{T}] \mathbf{m}(t) + \mathbf{w}^T(t) \times [\boldsymbol{\theta}] \dot{\mathbf{m}}(t) - \\ &- \frac{1}{2} dr(t) \times \mathbf{w}^T(t) \times [\mathbf{S}] \mathbf{w}(t) + \mathbf{w}^T(t) \times \mathbf{q}(t) \end{aligned} \quad (4.13)$$

gdzie

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{m}}(t) &= [\dot{T}_1(t), \dot{M}_1(t), \dot{T}_2(t), \dot{M}_2(t), \dots, \dot{T}_{E+1}(t), \dot{M}_{E+1}(t)]^T, \\ [\mathbf{K}] &= \bigcup_{e=1}^E [\mathbf{X}] [\mathbf{K}_e] [\mathbf{X}], \quad [\mathbf{S}] = \bigcup_{e=1}^E [\mathbf{S}_e], \quad [\mathbf{T}] = \bigcup_{e=1}^E [\mathbf{T}_e] [\mathbf{X}], \quad [\hat{\mathbf{K}}] = \bigcup_{e=1}^E [\mathbf{Y}] [\mathbf{K}_e] [\mathbf{Y}], \\ [\mathbf{Q}] &= \bigcup_{e=1}^E [\mathbf{X}] [\mathbf{K}_e] [\mathbf{Y}], \quad [\boldsymbol{\theta}] = \bigcup_{e=1}^E [\mathbf{T}_e] [\mathbf{Y}], \end{aligned} \quad (4.14)$$

$$[\mathbf{X}] = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad [\mathbf{Y}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Warunek stacjonarności funkcjonału (4.13)  $\delta\mathcal{F} = 0$ , w połączeniu z twierdzeniem Titchmarsha [14] prowadzi do globalnego układu równań MES, a mianowicie

$$dc(t) \times [\mathbf{K}] \mathbf{m}(t) + (\mathbf{T}^T) \mathbf{w}(t) = -dc(t) \times [\mathbf{Q}] \dot{\mathbf{m}}(t), \quad (4.15)$$

$$-[\mathbf{T}] \mathbf{m}(t) + dr(t) \times [\mathbf{S}] \mathbf{w}(t) = \mathbf{q}(t) + [\boldsymbol{\theta}] \dot{\mathbf{m}}(t). \quad (4.16)$$

### Rozwiązanie globalnego układu równań MES

Zmierzając do rozwiązania globalnego układu równań (4.15, 4.16), dokonano na nich transformacji Laplace'a, a następnie wyrugowano wektor  $\bar{\mathbf{m}}(p)$ , otrzymując

$$\mathbf{m}(p) = d\bar{e}(p) [\mathbf{K}]^{-1} [\mathbf{T}^T] \bar{\mathbf{w}}(p) - [\mathbf{K}]^{-1} [\mathbf{Q}] \dot{\bar{\mathbf{m}}}(p), \quad (4.17)$$

$$\{d\bar{e}(p) [\mathbf{T}] [\mathbf{K}]^{-1} [\mathbf{T}^T] + d\bar{r}(p) [\mathbf{S}]\} \bar{\mathbf{w}}(p) = \bar{\mathbf{q}}(p) + \langle [\boldsymbol{\theta}] - [\mathbf{T}] [\mathbf{K}]^{-1} [\mathbf{Q}] \rangle \dot{\bar{\mathbf{m}}}(p). \quad (4.18)$$

Po podzieleniu równania (4.18) przez  $d\bar{e}(p) = 1/d\bar{c}(p)$  i wprowadzeniu oznaczeń  $\bar{g}(p) = = d\bar{r}(p)/d\bar{e}(p)$ ,  $\bar{\mathbf{f}}(p) = \bar{\mathbf{q}}(p) + \langle [\boldsymbol{\theta}] - [\mathbf{T}] [\mathbf{K}]^{-1} [\mathbf{Q}] \rangle \dot{\bar{\mathbf{m}}}(p)$ ,  $[\hat{\mathbf{K}}] = [\mathbf{T}] [\mathbf{K}]^{-1} [\mathbf{T}^T]$ , otrzymano

$$\langle [\hat{\mathbf{K}}] + \bar{g}(p) [\mathbf{S}] \rangle \bar{\mathbf{w}}(p) = \frac{1}{d\bar{e}(p)} \bar{\mathbf{f}}(p). \quad (4.19)$$

Pojawia się teraz problem rozwiązania algebraicznego równania macierzowego (4.19), lecz nie jest to możliwe poprzez bezpośrednie odwrócenie macierzy tego równania, ponieważ zawiera ona czynnik analityczny  $\bar{g}(p)$ . Jednak dzięki twierdzeniu Hamiltona [15], odwrotną macierz równania (4.19) można otrzymać przy pomocy jej rozkładu spektralnego

$$[\hat{\mathbf{K}} + \bar{g}(p) [\mathbf{S}]] = [\mathbf{W}^T]^{-1} \langle \langle \mathbf{G} \rangle + \bar{g}(p) \{I\} \rangle [\mathbf{W}]^{-1}, \quad (4.20)$$

gdzie  $\{I\}$  jest macierzą jednostkową, natomiast  $\{\mathbf{G}\}$  macierzą spektralną, a  $[\mathbf{W}]$  macierzą własną rozszerzonego zagadnienia własnego [15]

$$[\hat{\mathbf{K}}] \mathbf{x} = g[\mathbf{S}] \mathbf{x}. \quad (4.21)$$

Taka postać macierzy równania (4.19) pozwala na jej odwrócenie przy jednoczesnym wyłączeniu czynnika analitycznego  $\bar{g}(p)$  poza operacje macierzowe, mianowicie

$$\begin{aligned} \langle [\hat{\mathbf{K}} + \bar{g}(p) [\mathbf{S}]]^{-1} &= [\mathbf{W}] \langle \langle \mathbf{G} \rangle + \bar{g}(p) \{I\} \rangle^{-1} [\mathbf{W}^T] = \\ &= \sum_{n=1}^N \frac{1}{g_n + \bar{g}(p)} [\mathbf{V}_n] = \sum_{n=1}^N \frac{d\bar{e}(p)}{g_n d\bar{e}(p) + d\bar{r}(p)} [\mathbf{V}_n], \end{aligned} \quad (4.22)$$

gdzie  $N$  jest wymiarem macierzy równania (4.19), natomiast  $[\mathbf{V}_n]$  są macierzami powstałymi z iloczynów tensorowych wektorów własnych przez siebie, odpowiadających kolejnym wartościom własnym  $g_n$  równania (4.21). Przy takim podejściu, rozwiązanie równania (4.19) ma postać

$$\mathbf{w}(t) = \sum_{n=1}^N \Phi_n(t) * [\mathbf{V}_n] \mathbf{f}(t), \quad (4.23)$$

gdzie

$$\Phi_n(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{g_n d\bar{e}(p) + d\bar{r}(p)} \right\}.$$

Globalny wektor sił węzłowych  $\mathbf{m}(t)$  otrzymuje się z równania (4.17) poprzez jego retransformację i podstawienie rozwiązania (4.23)

$$\mathbf{m}(t) = [\mathbf{K}]^{-1} \langle [\mathbf{T}^T] \sum_{n=1}^N \Psi_n(t) * [\mathbf{V}_n] \mathbf{f}(t) - [\mathbf{Q}] \dot{\mathbf{m}}(t) \rangle \quad (4.24)$$

gdzie

$$\Psi_n(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{d\bar{e}(p)}{g_n d\bar{e}(p) + d\bar{r}(p)} \right\}.$$

Globalne wektory  $\mathbf{w}(t)$  i  $\mathbf{m}(t)$  determinują pola przemieszczeń i sił wewnętrznych w poszczególnych elementach, zgodnie z przyjętą aproksymacją.

## 5. Przykłady obliczeń numerycznych

W celu wykazania efektywności przedstawionego algorytmu w MES, dla podjętego zadania, opracowano program obliczeń na EMC i dokonano analizy numerycznej trzech przykładów współpracy belki z podłożem.

Funkcje relaksacji materiału belki  $e(t)$  i podłoża  $r(t)$  zapisano w formie ujmującej jednocześnie modele: Hooke'a, Maxwella oraz standardowy, a mianowicie

$$\begin{aligned} e(t) &= (1-\eta)H(t) + \eta \cdot \exp(-e_0 t) \\ r(t) &= (1-\varrho)H(t) + \varrho \cdot \exp(-r_0 t) \end{aligned} \quad (5.1)$$

gdzie  $H(t)$  jest funkcją Heaviside'a,  $\eta, \varrho$  — bezwymiarowymi współczynnikami z przedziału  $\langle 0, 1 \rangle$ ,  $e_0, r_0$  — współczynnikami lepkości. Przyjmując  $\eta = 0$ , ( $\varrho = 0$ ), otrzymuje się model sprężysty, natomiast dla  $\eta = 1$ , ( $\varrho = 1$ ), funkcje (5.1) odpowiadają modelowi Maxwella. W pozostałych przypadkach opisują one model standardowy (Zennera). Realne wartości parametrów funkcji (5.1) ustalono na podstawie [16], traktując belki w analizowanych przykładach jako żelbetowe.

Występujące w rozwiązaniach (4.23) i (4.24) funkcje  $\varphi_n(t)$  i  $\psi_n(t)$  zależą od postaci funkcji relaksacji materiału belki i podłoża, czyli od typów modeli reologicznych tych materiałów. W realizacji algorytmu na EMC, funkcje te muszą być wyznaczone analitycznie, a następnie ujęte w programie w formie procedur. Dla funkcji relaksacji określonych wzorami (5.1) otrzymano

$$\Phi_n(t) = \frac{1}{1+g_n} [\delta(t) + A_n \exp(\alpha_n t) + B_n \exp(\beta_n t)], \quad (5.2)$$

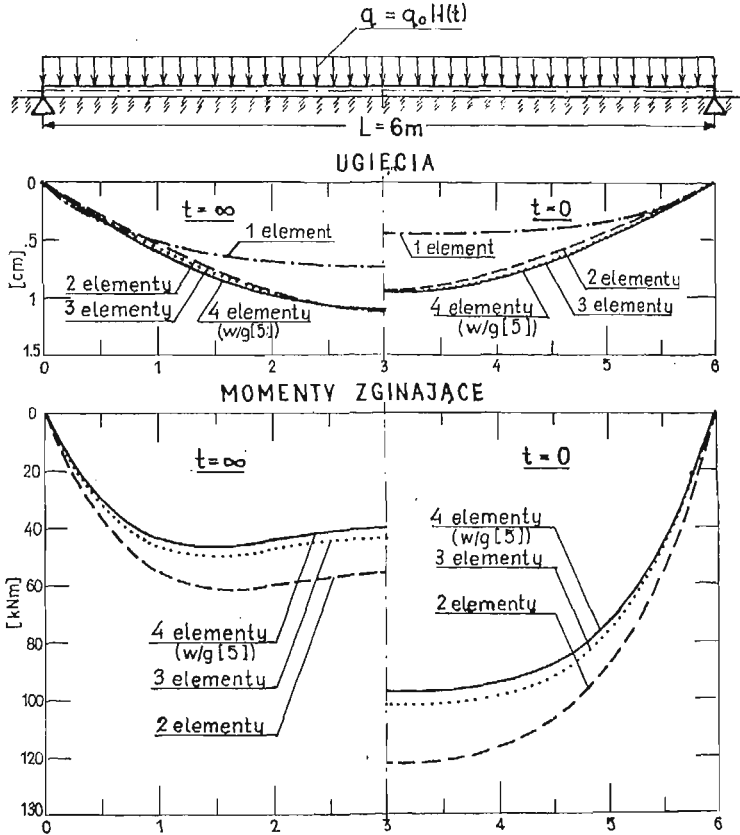
$$\Psi_n(t) = \frac{1}{1+g_n} \left[ \delta(t) + \frac{(1-\eta)e_0 + \alpha_n}{e_0 + \alpha_n} A_n \exp(\alpha_n t) + \frac{(1-\eta)e_0 + \beta_n}{e_0 + \beta_n} B_n \exp(\beta_n t) \right], \quad (5.3)$$

gdzie

$$\begin{aligned} \alpha_n &= -\frac{1}{2(1+g_n)} \left\{ (1+g_n-\varrho)r_0 + (1+g_n-g_n\eta)e_0 + \right. \\ &\quad \left. + \sqrt{[(1+g_n-\varrho)r_0 - (1+g_n-g_n\eta)e_0]^2 + 4g_n r_0 \varrho e_0 \eta} \right\}, \\ \beta_n &= -\frac{1}{2(1+g_n)} \left\{ (1+g_n-\varrho)r_0 + (1+g_n-g_n\eta)e_0 + \right. \\ &\quad \left. - \sqrt{[(1+g_n-\varrho)r_0 - (1+g_n-g_n\eta)e_0]^2 + 4g_n r_0 \varrho e_0 \eta} \right\}, \\ A_n &= \frac{1}{1+g_n} \frac{(\varrho+g_n\eta)e_0 r_0 - (\varrho r_0 + g_n r_0 \eta)\alpha_n}{\alpha_n - \beta_n} \\ B_n &= \frac{1}{1+g_n} \frac{(\varrho+g_n\eta)e_0 r_0 - (\varrho r_0 + g_n e_0 \eta)\beta_n}{\beta_n - \alpha_n} \end{aligned}$$

Przykład 1: Żelbetowa belka leżąca na podłożu sprężystym, podparta przegubowo na końcach i obciążona równomiernie (rys. 3). Przykład ten dobrano dla sprawdzenia zbieżności rozwiązania względem gęstości podziału na elementy oraz dla porównania z rozwiązaniem analitycznym wg [5].

Przykład 2: Belka swobodnie leżąca na podłożu i obciążona na końcu siłą skupioną (rys. 4). Przykład ten rozwiązano w dwóch wariantach. W pierwszym belkę potraktowano jako lepkosprężystą, a podłożo sprężyste, natomiast w drugim wariantcie zamieniono własności belki i podłoża. Celem przykładu jest porównanie zachowania się pól przemieszczeń i sił wewnętrznych przy zamianie własności reologicznych materiału belki i podłoża.

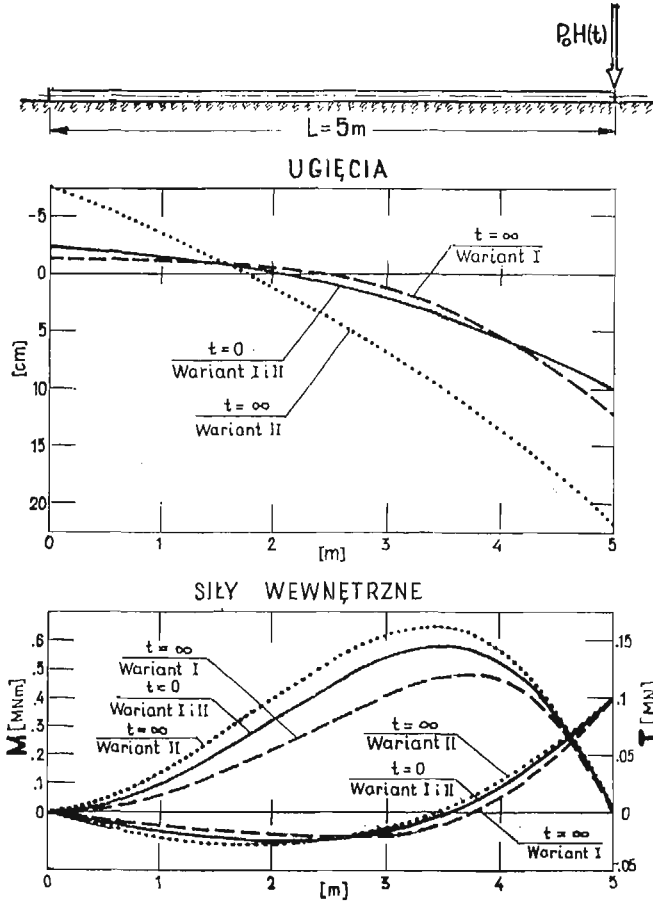


Rys. 3 Dane liczbowe:  $q_0 = 10^5$  [N/m],  $E_0 J = 4 \cdot 10^7$  [Nm<sup>2</sup>],  $\eta = .595 e_0 = .08116$  [d<sup>-1</sup>],  $R_0 = 10^7$  [N/m<sup>2</sup>],  $\varphi = 0$ . Podział na elementy: I — 1 × 6 m, II — 2 × 3 m, III — 3 × 2 m, IV — 4 × 1,5 m

W graficznej prezentacji wyników analizy ograniczono się jedynie do wykresów przemieszczeń i sił wewnętrznych dla  $t = 0$  i  $t = \infty$ , co daje jakościowe wyobrażenie o współpracy belki z podłożem w skrajnych fazach tej współpracy przy obciążeniach quasistatycznych.

Przykład 3: Belka żelbetowa o złożonym schemacie statycznym i zmiennej sztywności sprężystej, obciążona możliwymi typami sił (rozłożone i skupione), leżąca na podłożu lepkosprężystym (rys. 5). Zamiarem przytoczenia tego przykładu jest potwierdzenie ogólności metody i algorytmu obliczeń numerycznych.

Przykład 3 upoważnia do przytoczenia sposobu uwzględniania statycznych i kinematycznych warunków brzegowych, czyli ograniczeń na przemieszczenia i siły wewnętrzne, stosowane do schematu statycznego belki. Ograniczenia na przemieszczenia (przesunięcie i obrót) uwzględniane są w algorytmie poprzez modyfikację macierzy [S], natomiast realizację zerowych warunków statycznych uzyskuje się poprzez modyfikację macierzy [K]. Modyfikacja ta — zgodnie z koncepcją IRONSA [17] — polega na znacznym zwiększeniu elementu diagonalnego macierzy (np. poprzez pomnożenie przez dużą liczbę), odpowiadającemu parametrowi węzłowemu (przemieszczeń i sił wewnętrznych), na który nakładane są ograniczenia.



Rys. 4. Dane liczbowe: Wariant I —  $P_0 = 10^6$  [N],  $E_0 J = 4 \cdot 10^7$  [Nm<sup>2</sup>],  $\eta = 0.5947$ ,  $e_0 = 0.08116$  [d<sup>-1</sup>],  $R_0 = 10^7$  [N/m<sup>2</sup>],  $\varrho = 0$ . Wariant II —  $P_0 = 10^6$  [N],  $E_0 J = 4 \cdot 10^7$  [Nm<sup>2</sup>],  $\eta = 0$ ,  $R_0 = 10^7$  [N/m<sup>2</sup>],  $\varrho = 0.5947$ ,  $r_0 = 0.08116$  [d<sup>-1</sup>]. Podział na elementy: 2m+2m+1m

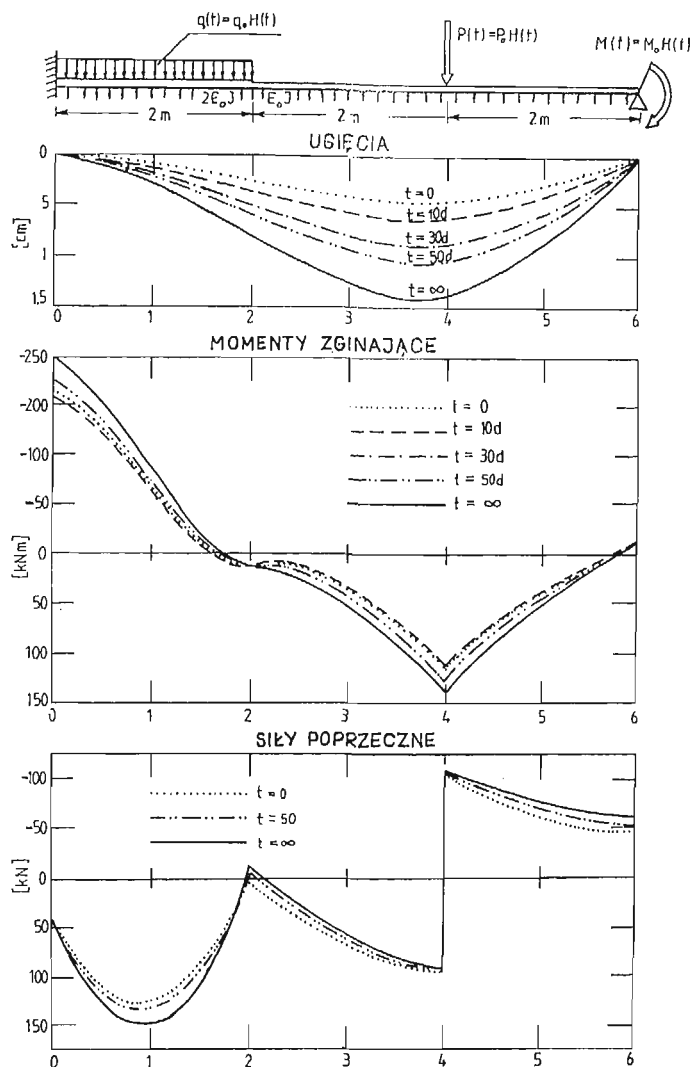
## 6. Wnioski końcowe

Doświadczenia zdobyte w trakcie opracowywania metody oraz analiza wyników obliczeń licznych przykładów (ze zrozumiałych względów nie zamieszczonych w pracy), skłaniają do kilku wniosków o charakterze ogólnym.

1° Wariacyjne ujęcie zadań brzegowych w wersji dwupolowej w połączeniu z MES oraz wykorzystanie ścisłego rozwiązania „sprężystego” do aproksymacji poszukiwanych rozwiązań, stworzyło możliwość budowy efektywnego algorytmu do analizy szerokiej klasy konkretnych i realnych zadań dotyczących współpracy belek z podłożem, w ujęciu reologicznym.

2° Szczególnie pozytywną zaletą metody jest analityczne ujęcie zmiennej czasowej, co stwarza możliwość operowania różnymi wariantami obciążeń bez konieczności powtarzania głównej części programu obliczeń dla danego schematu statycznego belki. Dzięki





Rys. 5. Dane liczbowe:  $q_0 = 10^5$  [N/m],  $P_0 = 2 \cdot 10^5$  [N],  $M_0 = 10^5$  [Nm],  $E_0 J = 4 \cdot 10^7$  [Nm<sup>2</sup>],  $= \eta \cdot 5947$ ,  $e_0 = 0.08116$  [d<sup>-1</sup>],  $R_0 = 10^{-7}$  [N/m<sup>2</sup>],  $Q = .75$ ,  $r_0 = .05$  [d<sup>-1</sup>].

temu, opracowana metoda jest bardzo przydatna w sytuacji skromnej bazy komputerowej, gdyż nie wymaga tak dużej pamięci EMC, jak ma to miejsce w przypadku metod opartych na dyskretyzacji skali czasu.

3° W przypadku dysponowania EMC z pamięcią zewnętrzną proponowana metoda może być bezpośrednio przeniesiona na zagadnienia dwu- i trójwymiarowe (np. płyty lub powłoki). W tym celu należy sformułować odpowiedni funkcyjonał dla podjętego zadania brzegowego, a następnie zastosować MES, wzorując się na przedstawionym w pracy algorytmie.

4° W realizacji metody przyjęto konkretne postacie funkcji relaksacji materiału belki i podłoża, co jednak nie wynika z ograniczeń metody. Ograniczenia na te funkcje wynikają

jedynie z liniowości związków fizycznych i z warunków istnienia transformat Laplace'a. Wprowadzając pojęcie splotu uogólnionego, zamiast wykorzystanego w pracy splotu w sensie Borella, można uogólnić metodę na zagadnienia w ramach bardziej zaawansowanych liniowych teorii lepkosprężystości (np. Arutuniana teoria starzenia).

5° Uzyskane wyniki numeryczne wskazują na znaczne jakościowe i ilościowe zmiany przemieszczeń i sił wewnętrznych w procesie deformacji układu belka-podłoże. Fakt ten podkreśla celowość uwzględniania reologicznych cech układu w praktyce projektowej.

#### Literatura

1. M. I. GORBUNOW-POSADOW, *Obliczanie konstrukcji na podłożu sprężystym*, WBiA, Warszawa 1956.
2. A. IWANCZEWSKA, J. LEWANDOWSKI, *Obliczanie konstrukcji na sprężystym podłożu*, Arkady, Warszawa 1968,
3. J. MAĆZKA, G. SZEFER, *Krótkie belki na podłożu typu półprzestrzeni sprężystej*, Rozpr. Inż., t. 18, z. 1, 1970 s. 133 - 155,
4. Praca zbiorowa, *Numerical methods in geotechnical engineering*, McGraw-Hill Book Company, 1977,
5. W. NOWACKI, *Teoria pełzania*, Arkady, Warszawa 1963,
6. K. SZPUNAR, *Ugięcie belki na podłożu reologicznym Pragera*, Rozpr. Inż., t. 10, z. 2, s. 211 - 229, 1962,
7. B. SKALMIERSKI, *Zagadnienie lepkosprężystego pręta kolowego na podłożu lepkosprężystym*, Rozpr. Inż., t. 13, z. 2, s. 325 - 339, 1965,
8. M. E. GURTIN, E. STERNBERG, *On the linear theory of viscoelasticity*, Arch. Rat. Mech. Anal., 11, s. 291 - 356, 1962,
9. R. M. CHRISTENSEN, *Theory of viscoelasticity*, Academic Press, New York, and London 1971
10. W. NOWACKI, *Teoria sprężystości*, PWN, Warszawa 1970,
11. Y. C. FUNG, *Podstawy mechaniki ciała stałego*, PWN, Warszawa 1969,
12. J. T. ODEN, *Finite elements of nonlinear continua*, McGraw-Hill Book Company, 1972,
13. T. SMOLEŃ, *Sprężysto — lepkosprężysta analiza statyczna belek na podłożu odkształcalnym*, XXVIII Konf. Nauk. KILiW PAN i KN PZITB, Warszawa—Krynica 1982, t. 1, s. 151 - 158,
14. Praca zbiorowa, *Poradnik inżyniera — matematyka*, WNT, Warszawa 1971,
15. A. RALSTON, *Wstęp do analizy numerycznej*, PWN, Warszawa 1975,
16. A. MITZEL, *Reologia betonu*, Arkady, Warszawa 1972,
17. O. C. ZIENKIEWICZ, *Metoda elementów skończonych*, Arkady, Warszawa 1972.

#### Резюме

#### ИЗГИБАНИЕ ВЯЗКОУПРУГИХ БАЛОК НА РЕОЛОГИЧЕСКОМ ОСНОВАНИИ

В работе сформулировано несколько задач касающихся изгибаия вязкоупругих балок при произвольной статической схеме, лежащих на основании облагающим реологическими свойствами. При формулировке принято различие реологических моделей материалов балки и основания без уточнения типов этих моделей на этапе формулировки. Имея во вниманио применение метода конечных элементов для решения сформулированных задач, сделано вариационную формулировку этих задач, а также представлено общий алгоритм для числительного анализа с использованием ЭВМ. В изготовлении алгоритма применено полуаналитическую аппроксимацию, которая состоит в аналитическом принятию рассуждаемых соотношений по отношению к временной переменной. Эффективность алгоритма иллюстрированно несколькими числительными примерами.

## S u m m a r y

## BENDING OF VISCOELASTIC BEAMS ON A RHEOLOGICAL FOUNDATION

In the paper several problems of bending of viscoelastic beams with arbitrary static scheme, resting on a foundation having viscoelastic properties are formulated. In the formulation the difference of rheological models of a beam and foundation materials is assumed but they are not precised on the stage of the formulation. Keeping on mind the application of the finite element method, the variational formulations of the problems are achieved and general algorithm and its computer realization is presented. In working out of the algorithm the semi-analytical approximation of searched solution by using the solution of analogical elastic problem is applicated. The approximation consist in analytic formulating of considered dependences with respect to time. The efficiency of the algorithm by several numerical examples is supported.

*Praca została złożona w Redakcji dnia 7 sierpnia 1984 roku*

---