

ZMODYFIKOWANA METODA PROPORCJONALNEGO NAPROWADZANIA POCISKÓW W POZIOMEJ PŁASZCZYŹNIE ZBLIŻENIA

MIROSLAW GLAPSKI (WARSZAWA)

Wojskowa Akademia Techniczna

Uwzględniając ograniczenia proporcjonalnego zblżenia, rozpatrzono możliwości usprawnienia procesu naprowadzania. Z przeprowadzonej analizy niezaburzonego ruchu pocisku o zmiennej masie i zmiennej prędkości, naprowadzanego w poziomej płaszczyźnie zblżenia, sformułowano wniosek o potrzebie „uzmiennienia” współczynnika (stałej) proporcjonalności. Pokazano zalety takiego podejścia. Zaproponowano zmodyfikowaną metodę proporcjonalnego zblżenia. Rozważania zilustrowano przykładami liczbowymi.

Wstęp

Proporcjonalne zblżenie (proporcjonalna nawigacja) wysunęło się na czołowe miejsce wśród metod samonaprowadzania pocisków, a szczególnie raket „powietrze-powietrze”. Proces samonaprowadzania tych raket odbywa się najczęściej w poziomej płaszczyźnie zblżenia (lub znacznie do niej zblżonej). Pozwala to na pewne uproszczenie modelu teoretycznych rozważań. Nie wszystkie jednak założenia czynione w dotychczasowych publikacjach są do przyjęcia, szczególnie właśnie w przypadku raket „powietrze-powietrze”. Znaczna część praktycznych rozwiązań tych raket cechuje się krótkim początkowym działaniem silnika raketowego i w związku z tym gwałtownym rozpędzaniem i częścią procesu samonaprowadzania na tzw. dolocie. W związku z tym zbyt daleko odbiega od rzeczywistości założenie o stałym module prędkości pocisku czy stałej prędkości wzajemnego zblżania się pocisku i atakowanego celu. Następuje również znaczna początkowa zmiana masy pocisku i nie należy przyjmować jej jako stałej.

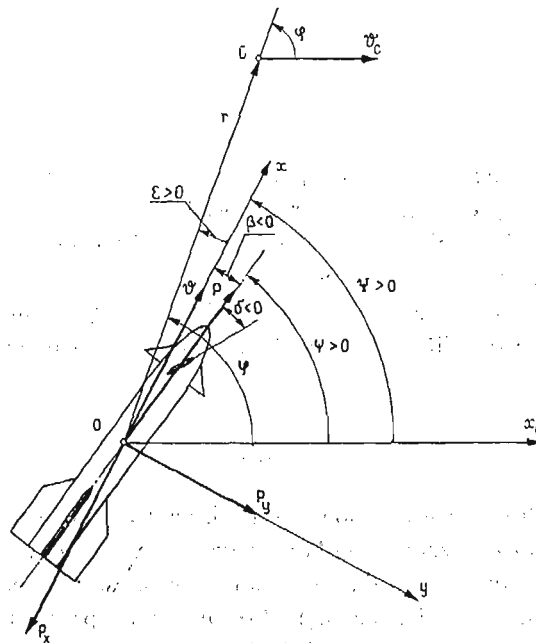
Niniejsze opracowanie, stanowiące kontynuację rozważań zawartych w pracach [1, 2, 3], podejmuje próbę dalszego ulepszenia i przystosowania metody proporcjonalnego zblżenia do wykorzystania w przypadku wspomnianych pocisków „powietrze-powietrze” o zmiennej, w trakcie naprowadzania, masie i zmiennym module prędkości lotu.

Szansę ulepszenia i przystosowania metody daje „uzmiennienie” współczynnika (tzw. stałej) proporcjonalności. Może to następować poprzez zmianę początkowej wartości współczynnika proporcjonalności wraz za zmianą początkowych warunków naprowa-

dzania, co uwidaczniało się już w cytowanych opracowaniach. Można również odpowiednio zaprogramować zmianę współczynnika proporcjonalności w czasie naprowadzania pocisku; stanowi to między innymi przedmiot poniższych rozważań.

1. Zależności wyjściowe

Rozpatrzmy proces naprowadzania pocisków rakietowych w poziomej płaszczyźnie zbliżenia (lub nieznacznie od niej odchylonej). Wzajemne usytuowanie pocisku „powietrze-powietrze” i atakowanego samolotu-celu pokazuje rys. 1.



Rys. 1.

Na rys. 1 oznaczono:

- P — ciąg silnika rakietowego,
- P_x — opór czołowy pocisku,
- P_y — siła boczna pocisku,
- r — promień — wektor (odległość pocisku od celu),
- v — prędkość środka masy pocisku,
- v_c — prędkość środka masy celu,
- β — kąt ślizgu pocisku,
- δ — kąt wychylenia steru kierunku pocisku,
- ϵ — kąt wyprzedzenia pocisku,
- φ — kąt obserwacji celu,
- ψ — kąt odchylenia pocisku (między osią Ox_0 związanego z rakieta układu grawitacyjnego a poziomym rzutem podłużnej osi układu sztywno związanego z rakieta);

Ψ — kąt odchylenia toru pocisku (między poziomą składową prędkości a osią Ox_0).

Założymy horyzontalny ruch pocisku przy równowadze ciężaru i siły nośnej powiększonej o pionową składową ciągu silnika raketowego, odbywający się bez przechylenia przy równowadze siły odśrodkowej i bocznej, powiększonej o poziomy rzut normalnej (do toru) składowej ciągu.

Otrzymamy poniższy układ równań kierowanego, niezaburzonego, względnego ruchu pocisku i celu:

$$m \frac{dv}{dt} = P - P_x, \quad (1)$$

$$\frac{dm}{dt} = -m_s, \quad (2)$$

$$mv \frac{d\Psi}{dt} = (P + \bar{c}_y v^2) \beta, \quad (3)$$

$$J_z \frac{d^2\psi}{dt^2} = M_z^\delta \delta + M_z^\omega \frac{d\psi}{dt} + M_z^\beta \beta, \quad (4)$$

$$\frac{d\Psi}{dt} = a \frac{d\varphi}{dt}, \quad (5)$$

$$\frac{dr}{dt} = v_c \cos \varphi - v \cos \varepsilon, \quad (6)$$

$$r \frac{d\varphi}{dt} = -v_c \sin \varphi + v \sin \varepsilon, \quad (7)$$

$$\Psi = \varphi - \varepsilon, \quad (8)$$

$$\psi = \varphi - \varepsilon + \beta, \quad (9)$$

W powyższych równaniach oznaczono:

a — współczynnik proporcjonalności,

m — masa pocisku,

m_s — sekundowy wydatek masowy silnika raketowego,

t — czas,

$\bar{c}_y = S \frac{\rho}{2} (c_y^\beta + b c_y^\delta)$ — uogólniony współczynnik siły bocznej pocisku,

$M_z^\delta = m_z^\delta \frac{\rho v^2}{2} S \cdot l$ — współczynnik momentu sterującego,

$M_z^\omega = m_z^\omega \frac{\rho v^2}{2} S \cdot l$ — współczynnik momentu tłumiącego,

$M_z^\beta = m_z^\beta \frac{\rho v^2}{2} S \cdot l$ — współczynnik momentu stabilizującego.

Wykorzystamy również wyrażenie na współczynnik obciążenia bocznego pocisku, manewrującego w poziomej płaszczyźnie zblżenia

$$n = -\frac{v}{g} \frac{d\Psi}{dt}, \quad (10)$$

gdzie g — przyspieszenie ziemskie.

Rozpatrując możliwość wprowadzenia założeń upraszczających, rozpatrzmy prędkość zблиzenia pocisku i celu $\frac{dr}{dt}$. Różniczkując stronami równanie (6) otrzymamy:

$$\frac{d^2r}{dt^2} = \frac{dv_c}{dt} \cos \varphi - \frac{dv}{dt} \cos \varepsilon - av \sin \varepsilon \frac{d\varphi}{dt} + r \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2. \quad (11)$$

Przyjmując, dla uproszczenia rozważań, że dla początku naprowadzania $\varepsilon_0 = 0$ oraz $\left(\frac{dv_c}{dt} \right)_0 = 0$, otrzymujemy

$$\left(\frac{d^2r}{dt^2} \right)_0 = \frac{1}{r_0} v_0^2 \sin^2 \varphi_0 - \left(\frac{dv}{dt} \right)_0. \quad (12)$$

Jak widać z powyższego, początkowa zmiana prędkości zблиzenia, w wielu praktycznych przypadkach pocisków i początkowych warunków naprowadzania może być znaczna i nie należy jej pomijać. Zakładając $\frac{dr}{dt} = \text{const}$ zarówno na początku, jak i w czasie naprowadzania, musimy liczyć się ze znacznymi błędami.

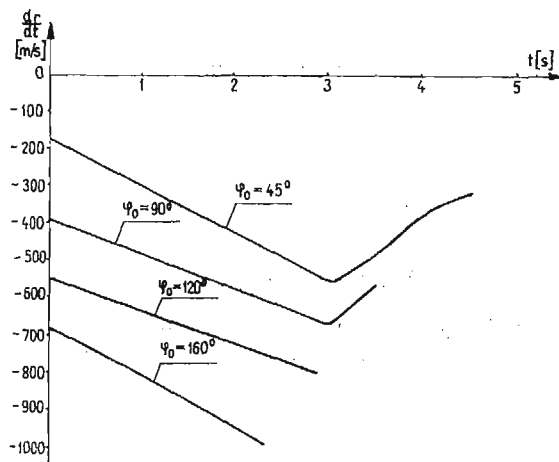
W niniejszym opracowaniu wykorzystuje się wykonane obliczenia dla hipotetycznego pocisku, zблиzonego do amerykańskiego pocisku „powietrze-powietrze” Sidewinder, gdzie dla wysokości ataku $H = 5000$ m przyspieszenie $\left(\frac{dv}{dt} \right)_0 = 140$ m/s², prędkość $v_0 = 400$ m/s. Zakładając do tego prędkość celu $v_c = 300$ m/s oraz początkową odległość ataku $r_0 = 2000$ m, mamy przykładowo:

— dla $\varphi_0 = 0^\circ$ $\left(\frac{d^2r}{dt^2} \right)_0 = -140$ m/s²,

— dla $\varphi_0 = 90^\circ$ $\left(\frac{d^2r}{dt^2} \right)_0 = -95$ m/s².

Są to już wielkości, które trudno pominąć w rozważaniach.

W wyniku wspomnianych numerycznych obliczeń uzyskano następujący obraz (pokazany na rys. 2) zmiany prędkości zблиzenia w trakcie naprowadzania.



Rys. 2.

Zmiany $\frac{dr}{dt}$ są znaczne i w rozpatrywanych przypadkach dochodzą nawet do 300% (dla $\varphi_0 = 45^\circ$). Przy $\varphi_0 = 90^\circ$ zmiana wynosi 70%, dla $\varphi_0 = 120^\circ$ dochodzi do 44%, a dla $\varphi_0 = 160^\circ$ do 46%.

Rozpatrując różne przypadki obliczeniowe proporcjonalnego naprowadzania wyżej omówionych typów pocisków powietrze-powietrze i poszukując możliwości złagodzenia ograniczeń (rozszerzenia stref ataku, skrócenia czasu naprowadzania, zwiększenia zapasu możliwości manewrowych w trakcie naprowadzania) zaobserwowano w szeregu przykładowych procesów zbliżania, że jeśli tylko na początku naprowadzania wartości bezwzględne współczynnika obciążenia lub kąta wychylenia steru nie narastają, to i podczas naprowadzania nie przewyższają (co do wartości bezwzględnych) swych początkowych wielkości.

Wychodząc z tej właściwości można sformułować dla początku naprowadzania wstępny warunek

$$\frac{dn}{dt} \leq 0, \quad (13)$$

który ze względu na taki sam charakter zmian, zapewnia również początkowe zmniejszanie się bezwzględnych wartości kąta wychylenia steru.

Z drugiej strony, na początku naprowadzania zarówno współczynnik obciążenia boczego, jak i kąt wychylenia steru nie mogą przekroczyć wielkości dopuszczalnych

$$|n_0| \leq n_d, \quad (14)$$

$$|\delta_0| \leq \delta_d. \quad (15)$$

Okazuje się przy tym, że również spełnienie warunku na obciążenie dopuszczalne, na ogół, zapewnia nieprzekraczanie dopuszczalnego kąta wychylenia steru.

Uwzględniając obecnie zamierzone „uzmiennienie” współczynnika proporcjonalności, mamy na podstawie (10)

$$\frac{dn}{dt} = -\frac{1}{g} \left(\frac{da}{dt} \frac{d\varphi}{dt} v + a \frac{d^2\varphi}{dt^2} v + a \frac{dv}{dt} \frac{d\varphi}{dt} \right)$$

i według (13) dla początku naprowadzania:

$$a_0 \geq -\frac{da}{dt} \frac{d\varphi}{dt} v \left(v \frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{dv}{dt} \frac{d\varphi}{dt} \right)^{-1}. \quad (16)$$

Na podstawie (6), (7), (10) i (16) otrzymujemy, po uwzględnieniu (14)

$$a_0 \geq 2 + \frac{1}{\cos \varepsilon_0} \left[\frac{1}{gn_d} \frac{da}{dt} (v_{c_0} \sin \varphi_0 - v_0 \sin \varepsilon_0) - \frac{2v_{c_0}}{v_0} \cos \varphi_0 + \frac{r_0}{v_0^2} \frac{dv}{dt} \left(\frac{v_0 \sin \varepsilon_0}{-v_{c_0} \sin \varphi_0 + v_0 \sin \varepsilon_0} + 1 \right) \right]. \quad (17)$$

Z drugiej strony, ze względu na dopuszczalne obciążenia po uwzględnieniu (7), mamy na podstawie (10) dla początku naprowadzania

$$a_0 \leq n_d g r_0 [v_0 (v_{c_0} \sin \varphi_0 - v_0 \sin \varepsilon_0)]^{-1}. \quad (18)$$

Wyrażenia (17) i (18) tworzą zestaw warunków, wstępnie określających zakres początkowych wartości współczynnika proporcjonalności przy jego doborze.

Oznaczając odpowiednio prawe strony nierówności (17) i (18) przez M oraz N , możemy kryterium wstępnego doboru początkowych wartości współczynnika proporcjonalności zapisać następująco

$$M \leq a_0 \leq N. \quad (19)$$

Ograniczenia, które z powyższego kryterium wynikają, uwidaczniają się głównie w bardzo ważnej, z punktu widzenia strefy możliwych ataków, tzw. bliższej granicy możliwych ataków, czyli minimalnych odległości od celu $(r_0)_{\min}$, z których można rozpocząć skuteczny proces naprowadzania.

Zapisując inaczej (19) mamy

$$M \leq N \quad (20)$$

i na tej podstawie możemy uzyskać ogólne wyrażenie

$$r_0 \geq 2 \frac{E}{Z} (v_0 \cos \varepsilon_0 - v_{c_0} \cos \varphi_0) + \frac{da}{dt} \frac{v_0 E^2}{g n_d Z}, \quad (21)$$

gdzie

$$E = v_{c_0} \sin \varphi_0 - v_0 \sin \varepsilon_0,$$

$$Z = g n_d \cos \varepsilon_0 - \frac{dv}{dt} \left(\frac{v_{c_0}}{v_0} \sin \varphi_0 - 2 \sin \varepsilon_0 \right).$$

Wyrażenie (20) dla najczęściej spotykanego w praktyce przypadku $\varepsilon_0 = 0$ przybiera postać

$$r_0 \geq \frac{2v_{c_0} \sin \varphi_0 (v_0 - v_{c_0} \cos \varphi_0)}{g n_d - \frac{dv}{dt} \frac{v_{c_0}}{v_0} \sin \varphi_0} + \frac{da}{dt} \frac{v_0 v_{c_0}^2 \sin^2 \varphi_0}{g n_d \left(g n_d - \frac{dv}{dt} \frac{v_{c_0}}{v_0} \sin \varphi_0 \right)}. \quad (22)$$

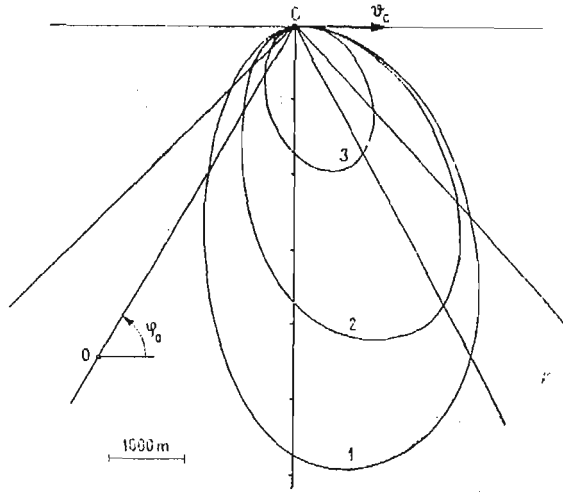
W wyniku numerycznych obliczeń, z wykorzystaniem EMC, dla wspomnianego wcześniej hipotetycznego pocisku oraz przy założeniu $v_c = 300$ m/s i dopuszczalnych obciążeniach bocznych pocisku $n_d = 15$ oraz $\varepsilon_0 = 0$ uzyskano obraz bliższej granicy strefy możliwych ataków, pokazany na rys. 3.

Na rys. 3 początkowe wartości współczynnika proporcjonalności określano zgodnie z kryterium (19). Krzywa 1 pokazuje $(r_0)_{\min} = f(\varphi_0)$ dla $a_0 = \text{const}$, czyli $\frac{da}{dt} = 0$, krzywa zaś 2 dla $\frac{da}{dt} = -0,1$.

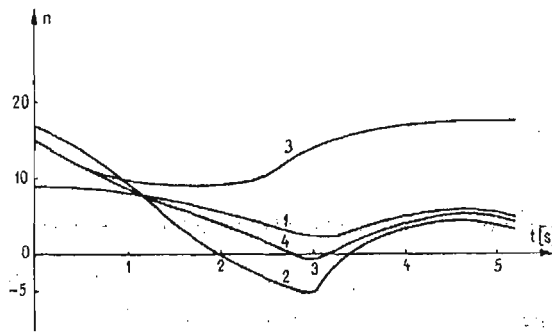
Krzywa 3 będzie omówiona w dalszej części opracowania.

Jak wyglądają różne warianty proporcjonalnego naprowadzania, w aspekcie proponowanych kryteriów ograniczających pokazują poniższe przykłady obliczeniowe dla wspomnianego hipotetycznego pocisku rozpędzanego (w trakcie 3s działającego silnika) od $v_0 = 400$ m/s do $v = 820$ m/s. Na rys. 4 pokazano charakter zmian obciążeń bocznych przy ataku z tylnej półsfery $\varphi_0 = 0,7854$ (45°), przy czym $\varepsilon_0 = 0$ oraz $r_0 = 2000$ m.

Początkowe wartości przy $a = 2 = \text{const}$ (krzywa 1) spełniają kryterium (19) i jak widać, przez cały czas naprowadzania obciążenia nie przekraczają dopuszczalnej wartości



Rys. 3.



Rys. 4.

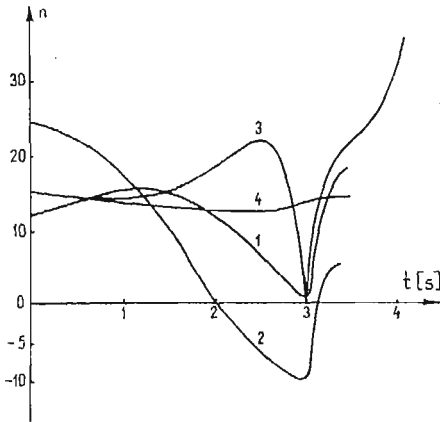
$n_d = 15$. Wartości początkowe przy $a = 4$ (krzywa 2) nie spełniają kryterium (19) i ograniczeń z niego wynikających ($a = 4$ jest większe od $a_{0\max} = 3,46$), stąd obciążenia w początkowym okresie naprowadzania przekraczają wartość dopuszczalną. W przypadku krzywej 3 spełnione zostało kryterium (19) i obserwujemy przy nieprzekraczaniu na początku $n_d = 15$ również i początkowy spadek obciążeń, ale pod koniec naprowadzania obciążenia przewyższają założone dopuszczalne wartości. Jest to przykład nie w każdym przypadku spełnianych oczekiwań przebiegu $n = f(t)$ mimo wypełnienia zastosowanego kryterium (19). Między innymi przyczyniło się to do dalszych poszukiwań i opracowania modyfikacji metody (następny rozdział).

Rys. 5 ilustruje przebiegi $n = f(t)$ dla $r_0 = 2000$ m i $\varphi_0 = 1,5708$ (90°) oraz $\varepsilon_0 = 0$, również dla $a = 2 = \text{const}$ (krzywa 1) i $a = 4 = \text{const}$ (krzywa 2) oraz dla $a_0 = 2,45$ i $\frac{da}{dt} = -0,81$ (krzywa 3).

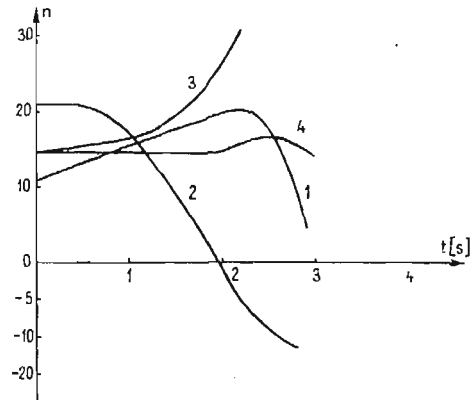
Omawiane, pokazane na rys. 5, krzywe 1, 2, 3 charakteryzują procesy naprowadzania dla warunków początkowych nie spełniających kryterium (19) i w każdym z tych przypadków współczynniki obciążenia przekraczają w trakcie naprowadzania $n_d = 15$.

Rys. 6 przedstawia charakter zmian $n = f(t)$ dla przedniej strefy ataku $\varphi_0 = 2,0944$ (120°), $r_0 = 2000$ m, $\varepsilon_0 = 0$ i również dla $a = 2 = \text{const}$ (krzywa 1) dla $a = 4 = \text{const}$ (krzywa 2) oraz dla $a_0 = 2,83$ i $\frac{da}{dt} = -0,61$ (krzywa 3).

Również i w tym przypadku przebiegi $n = f(t)$, pokazane przez krzywe 1, 2 i 3, nie spełniają na początku kryterium (19) i współczynniki obciążenia przewyższają $n_d = 15$



Rys. 5.



Rys. 6.

2. Zmodyfikowana metoda proporcjonalnego zbliżenia

Wprowadzenie zmiennego w trakcie naprowadzania współczynnika proporcjonalności umożliwiło złagodzenie ograniczeń procesu naprowadzania i otworzyło nowe kierunki badań w celu dalszego jego usprawniania. Czynniono szereg prób korzystnego doboru prawa zmiany w czasie współczynnika proporcjonalności. Między innymi zakładano liniowy charakter zmniejszania się współczynnika na aktywnej części toru

$$a = a_0 + \frac{da}{dt} t \quad (23)$$

i przyjmowano, że

$$\frac{da}{dt} = \frac{1}{t_a} (1 - a_0) \quad (24)$$

co powodowało, że na końcu aktywnej części toru (przy czasie t_a) współczynnik proporcjonalności przybierał wartość $a = 1$ i dalej naprowadzanie odbywało się według klasycznej metody pogoni. Przykłady takiego naprowadzania pokazują krzywe 3 na rysunkach 4, 5, 6.

Okazało się, że korzystne z wielu względów wyniki (szybkie zmniejszanie współczynników obciążenia bocznych na torze, skrócenie czasu naprowadzania, uproszczenie wzorów obliczeniowych w trakcie analizy procesu naprowadzania itp.) uzyskano przy hipotezie zakładającej zmianę współczynnika proporcjonalności odwrotnie proporcjonalną do zmiany modułu prędkości pocisku

$$a = \frac{K}{v}, \quad (25)$$

gdzie $K = \text{const.}$

Przyjęto przy tym, że wartość współczynnika K określać należy dla początkowych warunków naprowadzania i dopuszczalnego współczynnika obciążenia bocznego n_d . Wówczas

$$K = - \frac{gn_d}{\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)_0}. \quad (26)$$

Dla powyższej hipotezy zmiana współczynnika proporcjonalności wygląda następująco

$$\frac{da}{dt} = - \frac{K}{v^2} \frac{dv}{dt} = - \frac{a}{v} \frac{dv}{dt}. \quad (27)$$

Ujemny gradient współczynnika proporcjonalności zmienia się odwrotnie proporcjonalnie do kwadratu modułu prędkości rakiety. Dla tak zmodyfikowanej metody uzyskano na podstawie (17), po uwzględnieniu (26) i (27),

$$a_0 \geq 2 - 2 \frac{v_{c_0}}{v_0} \frac{\cos \varphi_0}{\cos \varepsilon_0} + r_0 \frac{dv}{dt} \frac{\text{tg } \varepsilon_0}{v_0} (-v_{c_0} \sin \varphi_0 + v_0 \sin \varepsilon_0)^{-1} \quad (28)$$

i pozostawiając taki sam warunek (18), z analogicznego do (19) kryterium określono bliższą granicę strefy możliwych ataków

$$r_0 \geq \frac{2(v_0 \cos \varepsilon_0 - v_{c_0} \cos \varphi_0)(v_{c_0} \sin \varphi_0 - v_0 \sin \varepsilon_0)}{gn_d \cos \varepsilon_0 + \frac{dv}{dt} \sin \varepsilon_0}. \quad (29)$$

Dla częstego, praktycznego przypadku $\varepsilon_0 = 0$ wzór (29) upraszcza się do

$$r_0 \geq \frac{2(v_0 - v_{c_0} \cos \varphi_0)v_{c_0} \sin \varphi_0}{gn_d}. \quad (30)$$

Jak widać, wyrażenia (28), (29) i (30) są prostsze od ogólnych wyrażań (17), (21) i (22), nawet w porównaniu z przypadkiem $a = \text{const.}$

Bliższa granica możliwych ataków przybliża się znacznie do atakowanego celu. Widać to wyraźnie z obliczeń wykonanych dla hipotetycznego pocisku i przyjętych warunków początkowych. Ilustruje to, obliczona na podstawie (30), krzywa 3 na rys. 3.

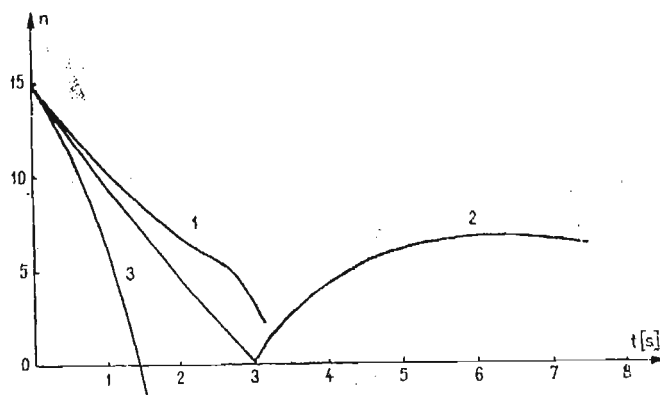
Znacznie korzystniejsze są również zmiany $n = f(t)$. Pokazują to krzywe 4 z obliczeń dla $r_0 = 2000$ m i $\varphi_0 = 0,7854$ (45°), $\varphi_0 = 1,5708$ (90°) i $\varphi_0 = 2,0944$ (120°) odpowiednio na rys. 4, rys. 5 i rys. 6.

Szczególnie korzystnie wyglądają krzywe $n = f(t)$ dla r_0 wyraźnie przekraczających $(r_0)_{\text{min}}$. Pokazuje to rys. 7. Krzywa 1 charakteryzuje zmiany obciążeń bocznych dla $r_0 = 1200$ m i $\varphi_0 = 0,7854$ (45°), krzywa 2 — dla $r_0 = 5200$ m i $\varphi_0 = 2,0944$ (120°) krzywa 3 — dla $r_0 = 1400$ m i $\varphi_0 = 2,7925$ (160°).

Rozpatrzmy obecnie, na ile możliwe jest przy zaproponowanej metodzie przyjęcie założenia o stałości prędkości zbliżania, $\frac{dr}{dt} = \text{const.}$

Po zróżniczkowaniu względem czasu równania (7), wykorzystaniu (6) i uwzględnieniu (8) mamy:

$$r \frac{d^2\varphi}{dt^2} + 2 \frac{dr}{dt} \frac{d\varphi}{dt} = \frac{dv}{dt} \sin \varepsilon - v \frac{d\Psi}{dt} \cos \varepsilon - \frac{dv_c}{dt} \sin \varphi. \quad (31)$$



Rys. 7.

Po uwzględnieniu (5) i (25) równanie (31) przybiera postać

$$r \frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{d\varphi}{dt} \left(2 \frac{dr}{dt} + K \cos \varepsilon \right) = \frac{dv}{dt} \sin \varepsilon - \frac{dv_c}{dt} \sin \varphi. \quad (32)$$

Jeśli założymy stałą prędkość zbliżania $\frac{dr}{dt} = \text{const}$, możemy napisać, analogicznie do rozważań w [4],

$$r = r_0 + \frac{dr}{dt} t,$$

i gdy przez t_c oznaczymy całkowity czas takiego naprowadzania, a przez r_0 — odległość początkową między pociskiem i celem, to uzyskujemy

$$r_0 = - \frac{dr}{dt} t_c, \quad (33)$$

wobec czego

$$r = (t - t_c) \frac{dr}{dt}. \quad (34)$$

Wykorzystując powyższe dojdziemy do równania różniczkowego. Na podstawie (32) i (33) mamy

$$(t_c - t) \frac{d^2\varphi}{dt^2} - \left[2 + K \left(\frac{dr}{dt} \right)^{-1} \cos \varepsilon \right] \frac{d\varphi}{dt} = - \left(\frac{dr}{dt} \right)^{-1} \left(\frac{dv}{dt} \sin \varepsilon - \frac{dv_c}{dt} \sin \varphi \right). \quad (35)$$

Rozwiązując powyższe równanie otrzymujemy dla $\frac{dv_c}{dt} = 0$, przy założeniu $\cos \varepsilon = 1$ oraz $\sin \varepsilon = \varepsilon = \text{const}$,

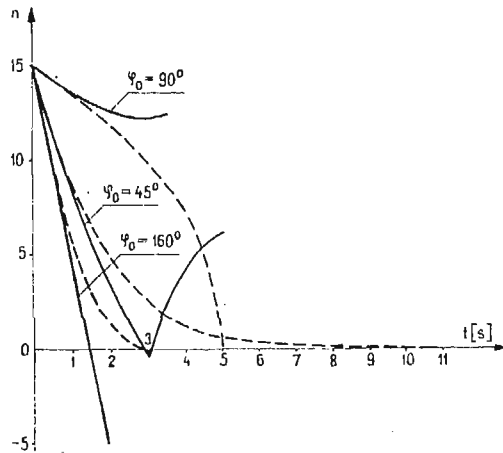
$$\frac{d\varphi}{dt} = \left(\frac{t_c - t}{t_c}\right)^b \cdot \left[\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)_0 - \frac{c}{b}\right] - \frac{c}{b}, \quad (36)$$

gdzie $b = -2 - K\left(\frac{dr}{dt}\right)^{-1}$,

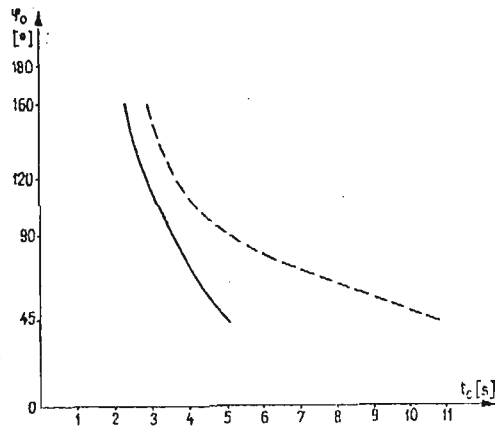
$$c = \left(\frac{dr}{dt}\right)^{-1} \frac{dv}{dt} \varepsilon.$$

Dla porównania wykonano uzupełniające przykładowe obliczenia dla wspomnianego hipotetycznego pocisku, przy $\varepsilon_0 = 0$ i $r_0 = 2000$ m według uzyskanego rozwiązania (36). Wyniki uzyskane z całkowania liczbowych wyjściowych równań przy użyciu EMC i obliczeń według rozwiązania (36) pokazuje rys. 8.

Na rys. 8 linią ciągłą wykreślono zmiany $n = f(t)$ uzyskane przy numerycznych obliczeniach, a linią przerywaną — przy wykorzystaniu rozwiązania (36).



Rys. 8.



Rys. 9.

Jak wynika z porównań, w początku naprowadzania różnice są niewielkie i największe bezwzględne wartości osiągają przy końcu czasu naprowadzania t_c określonego z numerycznych obliczeń. Znacznie również różni się rzeczywisty czas naprowadzania (tak nazwiemy czas t_c z numerycznych obliczeń) od czasu wynikającego z przybliżonej zależności (33). Ilustruje to rys. 9 z obliczeń dla $r_0 = 2000$ m. Krzywą ciągłą naniesiono rzeczywisty czas naprowadzania.

Krzywa przerywana na rys. 9 pokazuje $t_c = f(\varphi_0)$ dla $\frac{dr}{dt} = \text{const}$. Im mniejsza początkowa wartość kąta obserwacji celu φ_0 , tym bardziej przybliżona wartość t_c różni się od rzeczywistej. Na przykład dla $\varphi_0 = 45^\circ$ przybliżony czas naprowadzania przewyższa więcej niż dwukrotnie czas rzeczywisty (10,64 s wobec 5,1 s).

3. Zmiana kąta wychylenia sterów pocisku

Podstawowym równaniem w tej części rozważań jest równanie (4). Po uwzględnieniu (8) i (9) otrzymujemy

$$M_z^{\delta} \delta = -M_z^{\beta} \beta - M_z^{\omega} \left(\frac{d\beta}{dt} + \frac{dY'}{dt} \right) + J_z \left(\frac{d^2\beta}{dt^2} + \frac{d^2Y'}{dt^2} \right) \quad (37)$$

i jeśli wykorzystamy (2), (3) i (5) oraz oznaczymy:

$$\beta = A \frac{dY'}{dt}, \quad (38)$$

$$A = mB, \quad (39)$$

$$B = \frac{v}{P + \bar{c}_y v^2}, \quad (40)$$

to uwzględniając zmianę w czasie współczynnika proporcjonalności, otrzymamy ostatecznie wyrażenie na kąt wychylenia steru:

$$\delta = \left(D_1 a + D_2 \frac{da}{dt} + D_3 \frac{d^2 a}{dt^2} \right) \frac{d\varphi}{dt} + \left(D_2 a + 2D_3 \frac{da}{dt} \right) \frac{d^2 \varphi}{dt^2} + D_3 a \frac{d^3 \varphi}{dt^3}. \quad (41)$$

W (41) oznaczono:

$$D_1 = \frac{1}{M_z^{\delta}} \left(J_z \frac{d^2 A}{dt^2} - M_z^{\omega} \frac{dA}{dt} - M_z^{\omega} - M_z^{\beta} A \right), \quad (42)$$

$$D_2 = \frac{1}{M_z^{\delta}} \left(J_z - M_z^{\omega} A + 2J_z \frac{dA}{dt} \right), \quad (43)$$

$$D_3 = \frac{I_z A}{M_z^{\delta}}, \quad (44)$$

w (42) i (43) zaś:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{A_2} \left(\frac{dA_1}{dt} - \frac{dA_2}{dt} A \right), \quad (45)$$

$$A_1 = mv; \quad \frac{dA_1}{dt} = \frac{dm}{dt} v + m \frac{dv}{dt},$$

$$A_2 = P + c_y v^2; \quad \frac{dA_2}{dt} = \frac{d\bar{c}_y}{dt} v^2 + 2v\bar{c}_y \frac{dv}{dt}, \quad (45)$$

[cd.]

$$\frac{d^2 A}{dt^2} = \frac{1}{A_2} \left(\frac{d^2 A_2}{dt^2} - A_2 \frac{d^2 A_2}{dt^2} - 2 \frac{dA}{dt} \frac{dA_2}{dt} \right), \quad (46)$$

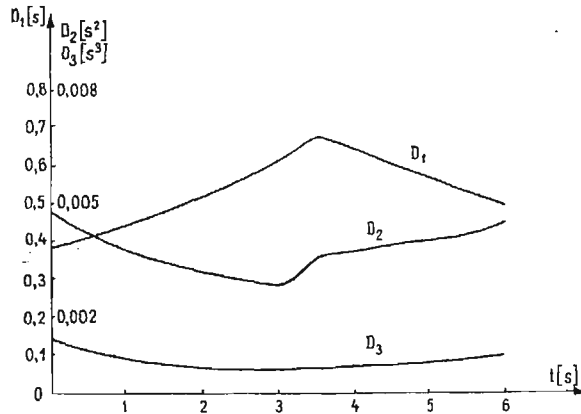
$$\frac{d^2 A_1}{dt^2} = 2 \frac{dm}{dt} \frac{dv}{dt} + m \frac{d^2 v}{dt^2}; \quad \text{przy} \quad \frac{d^2 m}{dt^2} = 0,$$

$$\frac{d^2 A_2}{dt^2} = 4 \frac{d\bar{c}_y}{dt} v \frac{dv}{dt} + 2\bar{c}_y \left[\left(\frac{dv}{dt} \right)^2 + v \frac{d^2 v}{dt^2} \right],$$

przy $\frac{d^2 \bar{c}_y}{dt^2} = 0$.

Jak wynika z obliczeń dla hipotetycznego pocisku, współczynnik D_1 przybiera wartości rzędu kilku dziesiątych. Współczynniki D_2 i D_3 mają wartości odpowiednio o dwa i trzy rzędy niższe.

Zmiana tych współczynników w czasie naprowadzania, dla przyjętych warunków (rozdz. 1), została pokazana na rys. 10.



Rys. 10.

Jeśli uwzględnimy proponowaną modyfikację proporcjonalnej nawigacji i zmianę współczynnika proporcjonalności według (26) i (27), to znaczy:

$$a = \frac{K}{v}; \quad \frac{da}{dt} = -\frac{a}{v} \frac{dv}{dt}$$

oraz (jak stąd wynika)

$$\frac{d^2 a}{dt^2} = \frac{a}{v^2} \left[2 \left(\frac{dv}{dt} \right)^2 - v \frac{d^2 v}{dt^2} \right], \quad (47)$$

to otrzymamy wyrażenie na kąt wychylenia steru w następującej postaci:

$$\delta = \left\{ D_1 - D_2 \frac{1}{v} \frac{dv}{dt} + D_3 \frac{1}{v^2} \left[2 \left(\frac{dv}{dt} \right)^2 - v \frac{d^2v}{dt^2} \right] \right\} a \frac{d\varphi}{dt} + \left(D_2 - 2D_3 \frac{dv}{dt} \right) a \frac{d^2\varphi}{dt^2} + D_3 a \frac{d^3\varphi}{dt^3}. \quad (48)$$

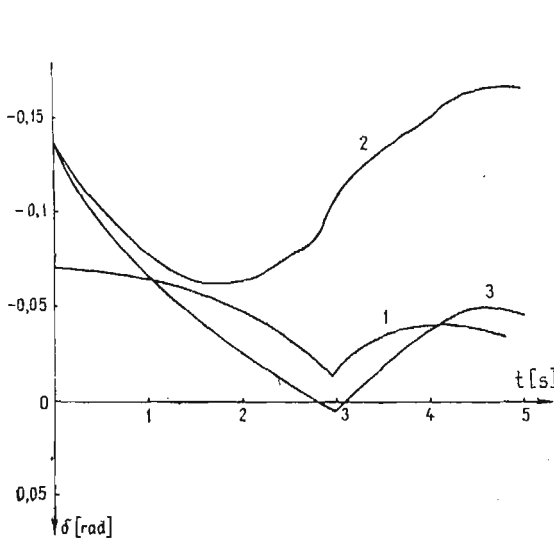
Jak wynika z analizy poprzednio uzyskanego wyrażenia (41) i wyrażenia dla zmodyfikowanej metody (48), podstawowe znaczenie ma pierwszy człon iloczynu, i w przybliżeniu można przyjmować

$$\delta \cong D_1 a \frac{d\varphi}{dt}. \quad (49)$$

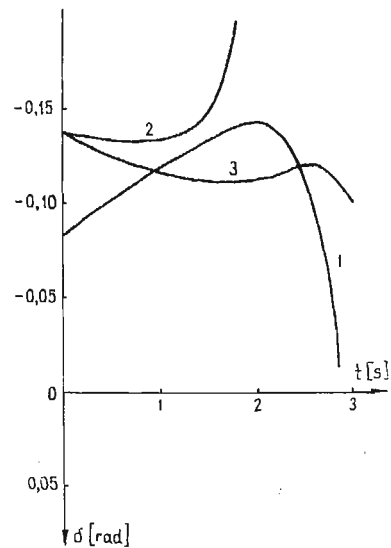
Bezpośredni i decydujący wpływ na zmianę kąta wychylenia steru w procesie naprowadzania ma zmiana charakterystyk dynamicznych pocisku oraz zastosowane prawo zmiany współczynnika proporcjonalności, mające również podstawowy wpływ na zmianę kąta obserwacji celu φ .

Dla ilustracji pokazano na rys. 11 i rys. 12 zmiany kąta wychylenia steru dla przyjętego hipotetycznego pocisku (oraz warunków podanych w rozdziale 1 przy $r_0 = 2000$ m), dla stałego współczynnika proporcjonalności $a = 2$ (krzywe 1). Dla zmiennego współczynnika proporcjonalności zgodnie z (23) i (24) pokazują to krzywe 2, a dla współczynnika proporcjonalności zmieniającego się zgodnie z proponowaną zasadą (krzywa 3).

Rys. 11 ilustruje naprowadzanie przy $\varphi_0 = 0,7854$ (45°).



Rys. 11.



Rys. 12.

Rys. 12 charakteryzuje naprowadzanie z przedniego obszaru, $\varphi_0 = 2,0944$ (120°).

Z rysunków 11 i 12 widać, że najbardziej korzystną zmianę $\delta = f(t)$ obserwujemy w przypadku proponowanej zmodyfikowanej metody proporcjonalnego naprowadzania (krzywe 3).

4. Wnioski

1. Na podstawie szeregu wykonanych uprzednio rozważań i przykładowych obliczeń [1, 2] potwierdzona została możliwość, szczególnie przy wstępnych rozważaniach, doboru współczynnika proporcjonalności i określenia bliższej granicy możliwych ataków w oparciu o początkowe wartości czynników toru pocisku i celu.

2. Zmiana modułu prędkości pocisku, jak również zmiana prędkości wzajemnego zbliżania pocisku i atakowanego celu, uzasadnia zmianę w trakcie naprowadzania współczynnika proporcjonalności.

3. Wynikająca z przeprowadzonych analiz hipoteza o zmianie współczynnika proporcjonalności odwrotnie proporcjonalnej do modułu prędkości pocisku i zaproponowana modyfikacja metody proporcjonalnego naprowadzania wpływa korzystnie zarówno na dopuszczalne początkowe warunki naprowadzania (przybliża do atakowanego celu strefę możliwych ataków), jak również na zmianę dynamicznych parametrów ruchu na torze (pocisk wykonuje szybki manewr na początku naprowadzania, przygotowując niejako duży zapas obciążeń bocznych i kąta wychylenia steru w przewidywaniu manewru obronnego celu).

4. Przeprowadzone rozważania i proponowana modyfikacja metody proporcjonalnego zbliżenia może stanowić podstawę szeregu praktycznych wskazówek i zaleceń przy analizie warunków optymalnego naprowadzania pocisków „powietrze-powietrze”.

Literatura

1. M. GLAŃSKI, *Ograniczenia proporcjonalnej nawigacji w ogólnym przypadku naprowadzania kierowanych pocisków „powietrze-powietrze”*, Biuletyn WAT, 3, 1972.
2. M. GLAŃSKI, *Ograniczenia proporcjonalnej nawigacji w uproszczonym przypadku naprowadzania kierowanych pocisków „powietrze-powietrze”*, Biuletyn WAT, 8, 1971.
3. M. GLAŃSKI, *Wpływ początkowego kąta wyprzedzenia na strefę ataku przy proporcjonalnej nawigacji pocisków „powietrze-powietrze”*, Biuletyn WAT, 9, 1973.
4. E. I. KRYNIECKI, *Sistemy nawiedienija*, Moskwa 1970.

Резюме

МОДИФИЦИРОВАННЫЙ МЕТОД ПРОПОРЦИОНАЛЬНОГО НАВЕДЕНИЯ СНАРЯДОВ В ГОРИЗОНТАЛЬНОЙ ПЛОСКОСТИ СБЛИЖЕНИЯ

Учитывая ограничения пропорциональной навигации, рассмотрены возможности совершенствования процесса наведения. Из проведенного анализа невозмущенного движения снаряда с переменной массой и переменной скоростью, наводимого в горизонтальной плоскости сближения, сформулирован вывод о необходимости „вариации” коэффициента (постоянной) пропорциональности. Показаны достоинства такого подхода. Предложен модифицированный метод пропорционального сближения.

Рассуждения иллюстрированы числовыми примерами.

S u m m a r y

THE MODIFIED METHOD OF PROPORTIONAL APPROACH OF A MISSILES IN THE
HORIZONTAL APPROACH — PLANE

On consideration of limitations to the proportional navigation, have been considered of making the homing-in process more efficient.

From an analysis of the unperturbed motion of a missiles with a variable mass and a variable velocity and being homed-in in the horizontal approach — plane, a conclusion has been formulated on the need of rendering the factor (constant) of proportionality variable. The advantages of such of solution have been demonstrated.

The considerations have been illustrated by the numeric examples.

Praca została złożona w Redakcji dnia 20 kwietnia 1985 roku
