MECHANIKA
TEORETYCZNA
I STOSOWANA
1/2, 22 (1984)

OPTYMALIZACJA PRZY JAWNEJ ZALEŻNOŚCI RÓWNAŃ STANU OD WARTOŚCI BRZEGOWYCH ZMIENNYCH STANU

B. LECHOWICZ,
Z. PIEKARSKI

Politechnika Krakowska

1. WSTĘP

Przedstawiona praca składa się z dwóch części. Pierwsza, ogólna dotyczy problemu optymalizacji w przypadku, gdy różniczkowe równania stanu układu zależą jawnie od nieokreślonych wartości brzegowych zmiennych stanu. Rozwiązanie tak postawionego problemu optymalizacji sprowadza się do całkowania, w ogólności nieliniowych równań różniczkowo-całkowych typu Fredholma.

Druga część jest ilustracją pierwszej i stanowi sformułowanie równań optymalizacji małych drgań geometrycznie nieliniowej belki.

2. Postawienie i rozwiązanie problemu

W dowodzie przedstawionego zagadnienia optymalizacji stosować będziemy teorię rachunku wariacyjnego wykorzystywaną szeroko np. w [1]. W ogólności przyjmujemy, że równania stanu układu mają postać:

$$w_j' = f_j(w, u, x, w(x_0), w(x_k)), \tag{1}$$

gdzie:

$$(\,)' \equiv \frac{d}{dx}$$

u_i — współrzędne wektora sterowania u
$i = 1, 2, \ldots, m$

W równaniach (1) wielkości $w(x_0)$, $w(x_k)$ oznaczają nieokreślone wartości zmiennych stanu $w(x)$ w punktach początkowym i końcowym. przedziału optymalizacji $x_0 \leqslant x \leqslant x_k$ Ograniczenia na sterowanie u przyjmujemy w formie ograniczeń równościowych

$$\begin{gathered}\psi_k(u, x) = 0,\\ k = 1, 2, \ldots, r < m,\end{gathered} \tag{2}$$

do której to formy można sprowadzić ograniczenia typu nierównościowego przez rozszerzenie wymiaru przestrzeni sterowania (jak np. w [1]). Warunki brzegowe dla ustalonego przedziału optymalizacji $x_0 \leqslant x \leqslant x_k$ można ogólnie zapisać wzorami:

$$\begin{gathered} \varphi_l\big(w(x_0),\, w(x_k)\big) = 0, \\ l = 1, 2, \dots, p \leqslant 2n. \end{gathered} \tag{3}$$

Jako funkcję celu przyjmujemy dla prostoty rozważań wyrażenie:

$$J = g\big(w(x_0),\, w(x_k)\big) = \text{minimum}. \tag{4}$$

Całkową funkcję celu, jak wiadomo, można zapisać również w postaci (4). Dla dowodu wprowadzamy pomocniczy funkcjonał (w którym obowiązuje konwencja sumacyjna):

$$F = \varphi + \int_{x_0}^{x_k} (\lambda_j w_j' - H)\,dx. \tag{5}$$

Funkcja brzegowa φ ma formę:

$$\varphi = g + \varrho_l \varphi_l, \tag{6}$$

zaś hamiltonian H

$$H = \lambda_j f_j + \mu_k \psi_k \tag{7}$$

gdzie:

$\lambda_j = \lambda_j(x)$ są zmiennymi sprzężonymi

ϱ_l, μ_k — stałe wielkości

Przy wszystkich powyższych założeniach pełna wariacja funkcjonału (5) ma postać:

$$\begin{aligned} \Delta F = & \left\{ \frac{\partial \varphi}{\partial w_j(x_0)} - \lambda_j(x_0) - \int_{x_0}^{x_k} \frac{\partial H}{\partial w_j(x_0)}\,dx \right\} \Delta w_j(x_0) + \\ & + \left\{ \frac{\partial \varphi}{\partial w_j(x_k)} + \lambda_j(x_k) - \int_{x_0}^{x_k} \frac{\partial H}{\partial w_j(x_k)}\,dx \right\} \Delta w_j(x_k) + \\ & + \int_{x_0}^{x_k} \left\{ \left(w_j' - \frac{\partial H}{\partial \lambda_j} \right) \delta\lambda_j - \left(\lambda_j' + \frac{\partial H}{\partial w_j} \right) \delta w_j - \right. \\ & \left. - \frac{\partial H}{\partial u_l}\,\delta u_l - \frac{\partial H}{\partial \mu_k}\,\delta \mu_k \right\} dx. \end{aligned} \tag{8}$$

Korzystając, jak w [1], ze wzorów (1) i (2), dobierając odpowiednio λ_j, oraz korzystając z niezależności od siebie wariacji $\delta w_j(x_0)$, $\delta w_j(x_k)$, δu_l, warunek stacjonarności

$$\Delta F = 0. \tag{9}$$

jest słuszny przy spełnieniu dodatkowych wyrażeń

a) równań sprzężonych

$$\lambda_j' = -\frac{\partial H}{\partial w_j}, \tag{10}$$

b) warunków transwersalności (warunków brzegowych dla λ_j) nowego typu

$$\lambda_j(x_0) = \frac{\partial \varphi}{\partial w_j(x_0)} - \int\limits_{x_0}^{x_k} \frac{\partial H}{\partial w_j(x_0)} dx,$$

$$\lambda_j(x_k) = -\frac{\partial \varphi}{\partial w_j(x_k)} + \int\limits_{x^0}^{x_k} \frac{\partial H}{\partial w_j(x_k)} dx. \tag{11}$$

gdzie w warunkach tych dodatkowo występują składniki w postaci całek. Dla problemu klasycznego, w którym funkcje f_j nie zależą od $w(x_0)$ i $w(x_k)$ całki we wzorach (11) są tożsamościowo równe zero. Otrzymujemy wtedy problem optymalizacji rozpatrywany np. w [1].

c) warunków optymalności

$$\frac{\partial H}{\partial u_i} = 0. \tag{12}$$

Aby zakończyć dowód postawionego zagadnienia należy jeszcze zapisać konieczny warunek Weierstrassa istnienia silnego minimum funkcjonału (4). Jak wynika z [1] warunek ten sprowadza się do nierówności

$$\underset{\text{optym}}{H}(x) \geqslant H(x) \tag{13}$$

gdzie optymalny hamiltonian H_{op} określony jest dla optymalnego sterowania $U = U_{op}^{(x)}$, natomiast hamiltonian H dla sterowania U dowolnego, ale dopuszczalnego.

Rozwiązanie rozważanego problemu sterowania optymalnego sprowadza się do rozwiązania równań (1) i (10) z warunkami brzegowymi (3) i (11), przy ograniczeniach (2) i (13). Od dotychczas rozpatrywanych problemów optymalizacji przedstawione zagadnienie różni się postacią warunków transwersalności (11), gdzie dodatkowo występują składniki w postaci całek. Przedstawione rozważania można łatwo uogólnić na przypadek zmiennego obszaru optymalizacji.

3. Przykład

Dla ilustracji powyższych wyników sformułowane zostały równania optymalizacji małych drgań geometrycznie nieliniowej belki. Przy zmiennym przekroju można metodą podaną w [2] otrzymać nieliniowe równanie drgań poprzecznych belki z uwzględnieniem wstępnego, osiowego naciągu:

$$(EJw'')'' - \frac{E}{l} w'' \int\limits_0^l Fu'dx - \frac{E}{2l} w'' \int\limits_0^l Fw'^2 dx + \varrho F\ddot{w} = 0, \tag{14}$$

gdzie:

$$(\;)^{\cdot} \equiv \frac{\partial}{\partial t} \qquad (\;)' \equiv \frac{\partial}{\partial x}$$

$$0 \leqslant x \leqslant l$$

ϱ, F, I, l, E — odpowiednio: gęstość, przekrój, moment bezwładności, długość, moduł Younge'a

$w(x, t)$ — przemieszczenie poprzeczne

$u(x, t)$ — przemieszczenie podłużne

Wzór (14) otrzymujemy przy założeniu, że szybkość zmian w czasie przemieszczeń osiowych u jest mała.

W dalszych rozważaniach przyjmować będziemy, że przemieszczenie

$$u(x, t) = u(x), \tag{15}$$

jest z góry zadane. Aby móc w (14) rozdzielić zmienne zakładamy, że na duże odkształcenia statyczne zostały nałożone małe drgania:

$$w(x, t) = y_1(x) + \varepsilon w_1(x) T(t), \tag{16}$$

ε — mały parametr

Zaniedbując wyrazy z ε^2 i wyższe, po wstawieniu (16) do (14) otrzymujemy układ równań różniczkowo całkowych postaci

$$(Iy_1'')'' - \frac{1}{l} y_1'' \int_0^l Fu' dx - \frac{1}{2l} y_1'' \int_0^l F y_1'^2 dx = 0, \tag{17}$$

$$\begin{gathered} (Iw_1'')'' - \frac{1}{l} w_1'' \int_0^l Fu' dx - \frac{1}{2l} w_1'' \int_0^l F y_1'^2 dx - \\ -\frac{1}{l} y_1'' \int_0^l F y_1' w_1' dx - \frac{\varrho \omega^2}{E} F w_1 = 0, \end{gathered} \tag{18}$$

oraz

$$\ddot{T} + \omega^2 T = 0. \tag{19}$$

Przez wprowadzenie nowych, dodatkowych zmiennych można różniczkowo-całkowe równania (17) i (18) sprowadzić do postaci (1) i zastosować przedstawioną w punkcie 2 metodę optymalizacji. Rozważać będziemy mianowicie zmienne typu

$$\begin{aligned} y_5 &= \int_0^x F y_1'^2 ds, \\ w_5 &= \int_0^x F y_1' w_1' ds, \\ z &= \int_0^x F u' ds. \end{aligned} \tag{20}$$

Pozwala to równania (17) i (18) i związki (20) sprowadzić do 11-tu równań różniczkowych 1-ego rzędu:

a) dla statycznego ugięcia

$$
\begin{aligned}
y_1' &= y_2,\\
y_2' &= \frac{1}{I} y_3,\\
y_3' &= y_4,\\
y_4' &= \frac{z(l)}{l}\frac{1}{I} y_3 + \frac{y_5(l)}{2lI} y_3,\\
y_5' &= F y_2^2,\\
z' &= Fu'.
\end{aligned} \tag{21}
$$

b) dla małych drgań

$$
\begin{aligned}
w_1' &= w_2,\\
w_2' &= \frac{1}{I} w_3,\\
w_3' &= w_4,\\
w_4' &= \frac{z(l)}{l}\frac{1}{I} w_3 + \frac{y_5(l)}{2l}\frac{1}{I} w_3 + \frac{w_5(l)}{l}\frac{1}{I} y_3 + \frac{\varrho\omega^2}{E} F w_1,\\
w_5' &= F y_2 w_2.
\end{aligned} \tag{22}
$$

Równania powyższe są typu (1), występują w nich bowiem nieokreślone wartości $z(l)$, $y_5(l)$, $w_5(l)$ zmiennych stanu w punkcie końcowym przedziału optymalizacji.

Dla prostoty rozważać będziemy belkę obustronnie podpartą. Wtedy warunki brzegowe dla (21) i (22) będą po wykorzystaniu (16) i (20) następujące:
dla zmiennej $w(x)$

$$
\begin{aligned}
w_1(0) = w_3(0) = w_6(0) = 0,\\
w_1(l) = w_3(l) = 0,
\end{aligned} \tag{23}
$$

dla zmiennej $y(x)$

$$
\begin{aligned}
z(0) = y_1(0) = y_3(0) = y_5(0) = 0,\\
y_1(l) = y_3(l) = 0.
\end{aligned} \tag{24}
$$

Jako funkcję celu przyjmujemy minimum masy belki przy stałej częstości drgań

$$
\begin{gathered}
\int_0^l F dx = \min.\\
\omega = \text{const}.
\end{gathered} \tag{25}
$$

Sterowanie F podlega ograniczeniu nierównościowemu

$$F_1 \leqslant F \leqslant F_2. \tag{26}$$

Ograniczenie to można, przez wprowadzenie dodatkowego sterowania v, sprowadzić do typu równościowego (jak w [1]):

$$\psi = (F-F_1)(F_2-F)-v^2 = 0. \tag{27}$$

Przyjmujemy, że optymalizacji podlegać będą małe drgania, tzn. optymalizacja przeprowadzona będzie w oparciu tylko o układ równań (22). Należy więc znaleźć optymalne rozwiązanie układu (22) z warunkami brzegowymi (23) przy założeniu (25) oraz ograniczeniami (27) pamiętając, że muszą być spełnione równania (21) z warunkami (24).
W celu rozwiązania wprowadzamy funkcję brzegową φ oraz hamiltonian H.
Z (23) mamy związek (6) w postaci:

$$\varphi = \varrho_1 w_1(0)+\varrho_2 w_3(0)+\varrho_3 w_5(0)+\varrho_4 w_1(l)+\varrho_5 w_3(l), \tag{28}$$

natomiast z (22) i (25) wyrażenie jest (7) w postaci:

$$\begin{aligned} H = & -F+\lambda_1 w_2+\lambda_2 \frac{1}{I} w_3+\lambda_3 w_4+\lambda_4 \frac{\varrho\omega^2}{\mathrm{E}} F w_1 + \\ & +\lambda_4\left(\frac{z(l)}{l}+\frac{y_5(l)}{2l}\right)\frac{1}{I} w_3+\lambda_4 \frac{w_5(l)}{l}\frac{1}{I} y_3+ \\ & +\lambda_5 F y_2 w_2+\mu(F-F_1)(F_2-F)-\mu v^2. \end{aligned} \tag{29}$$

Za pomocą hamiltonianu (29) można wprowadzić równania sprzężone (10) w formie:

$$\begin{aligned} \lambda_1' &= -\frac{\varrho\omega^2}{\mathrm{E}} F\lambda_4, \\ \lambda_2' &= -\lambda_1-Fy_2\lambda_5 \\ \lambda_3' &= -\frac{1}{I}\lambda_2-\left(\frac{z(l)}{l}+\frac{y_5(l)}{2l}\right)\frac{1}{I}\lambda_4, \\ \lambda_4' &= -\lambda_3, \\ \lambda_5 &= 0. \end{aligned} \tag{30}$$

Za pomocą funkcji brzegowej (28) wprowadzamy warunki brzegowe do równań (30) typu (11):

$$\begin{aligned} \lambda_2(0) = \lambda_4(0) = \lambda_2(l) = \lambda_4(l) = 0, \\ \lambda_5(l) = \frac{1}{l}\int_0^l \frac{1}{I} y_3\lambda_4 dx. \end{aligned} \tag{31}$$

Z warunków optymalności (12) przy założeniu $I = aF^n$ (32) dostajemy

$$2\eta v = 0. \tag{33}$$

Z równania (33) i warunku (27) wynika

$$\begin{aligned} &\text{a)} && \mu \neq 0, \quad v = 0, \\ & && F = F_1 \quad \text{lub} \quad F = F_2, \\ &\text{b)} && \mu = 0, \quad v \neq 0, \\ & && F_1 < F < F_2, \\ &\text{c)} && \mu = 0, \quad v = 0, \\ & && F = F_1 \quad \text{lub} \quad F = F_2. \end{aligned} \tag{34}$$

W przypadkach b) i c) z drugiego warunku optymalności $\frac{\partial H}{\partial F} = 0$ otrzymujemy

$$F^{n+1} = \frac{n\left[\frac{\lambda_2 w_3}{a} + \left(z(l) + \frac{y_5(l)}{2}\right)\frac{\lambda_4 w_3}{la} + w_5(l)\frac{\lambda_4 y_3}{la}\right]}{\left[-1 + \varrho\frac{\omega^2}{\mathrm{E}}\lambda_4 w_1 + y_2\lambda_5 w_2\right]}. \tag{35}$$

Za pomocą wzorów (34) i (35) określamy optymalny przekrój rozpatrywanej belki.

Ostatecznie, aby rozwiązać problem optymalizacji, trzeba rozwiązać równania (22) i (30) z warunkami (23) i (31), z warunkiem optymalności (35), zakładając, że mamy (15) oraz stałe w (32) przy jednoczesnym spełnieniu (21) z (24).

Literatura cytowana w tekście

1. W. A. TROICKIJ, *Optymalnyje prociesy koliebanij miechanicziеskich sistem*, Leningrad 1976.
2. S. KALISKI, *Drgania i fale w ciałach stałych* Warszawa 1966.

Р е з ю м е

ОПТИМАЛИЗАЦИЯ ПРИ ЗАВИСИМОСТИ УРАВНЕНИЙ СОСТОЯНИЯ ОТ КРАЕВЫХ ЗНАЧЕНИЙ ПЕРЕМЕННЫХ СОСТОЯНИЯ

В работе, опираясь на классическом вариационном исчислении представляется метод оптимального управления системами, описанными системой дифференциальных уравнений зависящих от неопределенных значений переменных состояния в начальной и конечной точках предела оптимализации.

S u m m a r y

OPTIMIZATION FOR A DEPENDENCE BETWEEN STATE EQUATIONS AND BOUNDARY VALUES OF STATE VARIABLE

In this paper a method of optimal design of systems given by a set of differential equations has been developed. The set of differential equations straight depends on boundary values of state variables. The method is based on clasical varational calculus.

Praca została złożona w Redakcji dnia 23 września 1982 roku