

NUMERYCZNA ANALIZA PRZEPLYWU MHD W KANAŁE Z NIESYMETRYCZNYM ROZSZERZENIEM

EDWARD WALICKI, JERZY SAWICKI

1. Wstęp

Przepływy MHD w kanałach płaskich i okrągłych o niesymetrycznych kształtach, występujące w różnych urządzeniach technicznych, budzą od dawna duże zainteresowanie wielu badaczy.

W pracy [1] dokonano przeglądu zagadnień przepływów MHD w kanałach o różnych kształtach i przekrojach poprzecznych — omawiając rozwiązania analityczne, uzyskane przy pewnych dość znacznych założeniach upraszczających. Prace [11, 12, 13] podają przykłady analizy przepływu płynnych metali w zakrzywionych kanałach, w obecności prostopadłego zewnętrznego pola magnetycznego.

Badaniami płaskich przepływów MHD w kanałach o niesymetrycznych rozszerzeniach lub przepływów, które do takiego modelu dały się sprowadzić, zajmowano się w pracach [2, 7, 8].

Celem tej pracy jest uzyskanie numerycznego rozwiązania zagadnienia ustalonego płaskiego przepływu MHD w kanale z niesymetrycznym uskokiem, wywołanego gradientem ciśnienia bądź ruchem ścianki ograniczającej przepływ (rys. 1).

Przyjęto następujące założenia upraszczające, dotyczące właściwości płynu: gęstość $\rho = \text{const}$, lepkość dynamiczna $\mu = \text{const}$, przewodność elektryczna $\sigma = \text{const}$.

Tak zdefiniowany płyn lepki i przewodzący elektrycznie będziemy dalej określać mianem „płynu magnetycznego”.

Dodatkowo zakładamy, że wektor pola magnetycznego $\vec{B} (0, B_0, 0)$ jest prostopadły do ruchomej ścianki kanału.

Równaniami określającymi stan „mechaniczny” przepływającej cieczy są przy tych założeniach¹:

- równanie ciągłości,
- magnetohydrodynamiczne równanie Naviera-Stokesa,
- równania Maxwella,
- prawo Ohma.

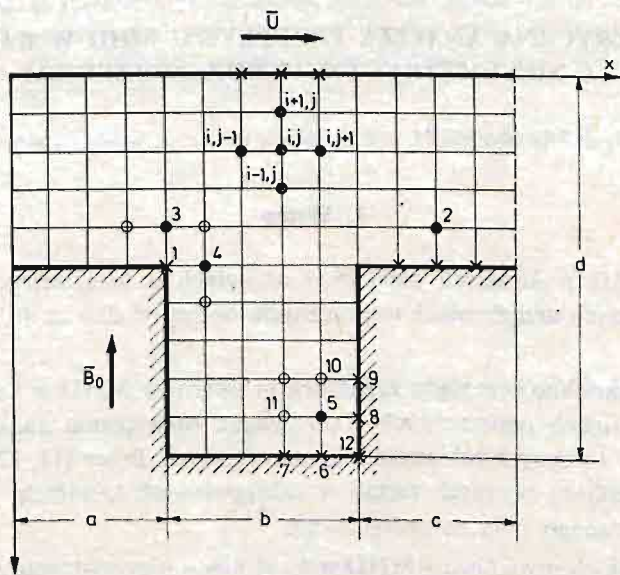
Badania przepływu płynu magnetycznego przeprowadzono dla przypadków:

- przepływu wywołanego gradientem ciśnienia, tzw. przepływu Poiseuille'a,

¹⁾ Równania te przedstawiono w następnym punkcie pracy.

- przepływu wywołanego ruchem ścianki, tzw. przepływu Couette'a,
- przepływu wywołanego — łącznie — gradientem ciśnienia i ruchem ścianki.

Rozwiązanie zagadnienia ograniczono do przypadku przepływu dla małych liczb Reynoldsa ($Re \leq 50$), dla których przepływ jest stateczny, a zastosowana metoda rozwiązywania numerycznego jest stabilna i zbieżna.



Rys. 1

Wymiary a i c (por. rys. 1) przyjęto na tyle duże, by przy zmiennych wymiarach b i d wpływ zaburzeń powstałych w miejscu zmian przekroju kanału na rozkład prędkości na wlocie i wylocie z kanału był pomijalnie mały.

2. Równania ruchu płynu magnetycznego

Równaniami opisującymi ruch płynu magnetycznego dla przypadku przepływu ustalonego są:

- równanie ciągłości

$$\operatorname{div} \bar{V} = 0, \quad (1)$$

- równanie Naviera-Stokesa

$$\rho(\bar{V} \operatorname{grad}) \bar{V} = -\operatorname{grad} p + \mu \nabla^2 \bar{V} + \bar{j} \times \bar{B}, \quad (2)$$

- równania Maxwella

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \bar{E} &= 0, \\ \operatorname{rot} \bar{B} &= \mu_e \bar{j}, \\ \operatorname{div} \bar{B} &= 0, \end{aligned} \quad (3)$$

- prawo Ohma

$$\bar{j} = \sigma(\bar{E} + \bar{V} \times \bar{B}). \quad (4)$$

Przechodząc do płaskiego ustalonego przepływu płynu magnetycznego będącego tematem pracy i uwzględniając jednocześnie tzw. przybliżenie hydrodynamiczne, to znaczy zakładając: małe wartości wektora natężenia pola elektrycznego $\bar{E}^{(2)}$, oraz małe wartości magnetycznej liczby Reynoldsa, sprowadzamy równania (1) i (2) do postaci:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (5)$$

$$\rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \Delta u - \sigma B_0^2 u, \quad (6)$$

$$\rho \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = - \frac{\partial p}{\partial y} + \mu \Delta v.$$

przy czym uwzględniono (4).

Równań tych użyjemy teraz do opisu przepływu płynu magnetycznego w rozpatrywanym kanale (rys. 1).

Wprowadzając funkcję prądu określoną zależnościami:

$$u = \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad v = \frac{\partial \Psi}{\partial x} \quad (7)$$

oraz eliminując ciśnienie z układu równań (6) otrzymamy:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial \zeta}{\partial y} - \frac{\partial \Psi}{\partial y} \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\sigma}{\rho} B_0^2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = \nu \Delta \zeta, \quad (8)$$

gdzie ζ jest wirowością. Jest ona związana z funkcją prądu Ψ zależnością:

$$\Delta \Psi = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = \zeta, \quad (9)$$

przy czym Δ oznacza operator Laplace'a

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

Aby uzyskane rozwiązanie układu równań (8) i (9), równoważnego układowi (6), było dogodnie w praktycznych zastosowaniach, wprowadźmy zmienne bezwymiarowe:

$$x = Lx', \quad y = Ly', \quad u = Uu', \quad v = Uv',$$

$$p = \frac{1}{2} \rho U^2 p', \quad \Psi = UL\Psi', \quad \zeta = \frac{U}{L} \zeta', \quad \text{Re} = \frac{UL}{\nu}, \quad (10)$$

$$H = B_0 L \sqrt{\frac{\sigma}{\mu}},$$

przy czym sens oznaczeń jest następujący:

U — średnia prędkość przepływu cieczy w węższej części kanału,

L — szerokość kanału w węższej jego części,

Re — liczba Reynoldsa,

H — liczba Hartmana.

²⁾ Inaczej mówiąc spełniona jest zależność: $\bar{E}/(\bar{V} \times \bar{B}) \ll 1$.

Wprowadzając zależności (10) do równań (6) lub do równań (8), (9) otrzymamy bezwymiarową postać równań ruchu. Opuszczając w tych równaniach (dla uproszczenia zapisu) kreski przy wielkościach bezwymiarowych otrzymujemy:

$$\left(\frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial \zeta}{\partial y} - \frac{\partial \Psi}{\partial y} \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right) \text{Re} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} \cdot H^2 = \Delta \zeta \quad (11)$$

$$\Delta \Psi = \zeta. \quad (12)$$

3. Warunki brzegowe

Warunki brzegowe dla równań (11) i (12), dotyczące granic obszaru przepływu, wynikają z następujących założeń:

- a) płyn na „wejściu” i „wyjściu” z kanału porusza się ruchem laminarnym,
- b) składowe prędkości na ścianie nieruchomej:

$$u = 0, \quad v = 0; \quad (13)$$

stąd wynikają warunki

$$\frac{\partial \Psi}{\partial n} = 0, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial s} = 0, \quad \Psi = \text{const}. \quad (14)$$

na ściankach kanału $\left(\frac{\partial}{\partial n}, \frac{\partial}{\partial s} \right)$ oznaczają pochodne w kierunku normalnej i stycznej do ścianki),

- c) składowa prędkości na ścianie ruchomej:

$$u = U, \quad v = 0; \quad (15)$$

wynika stąd warunek

$$\Psi = \text{const}.$$

na tej ściance³⁾.

Uwzględniając warunki (13), (14) i (15) oraz wykorzystując zależności (7) i (9) otrzymujemy następujące wyrażenia⁴⁾:

— dla funkcji prądu

$$\Psi = \frac{A}{H^3} \left[\text{sh } H\eta - \frac{(\text{ch } H - 1)}{\text{sh } H} \text{ch } H\eta - H\eta \right] - \frac{B}{H} (\text{sh } H\eta - \text{cth } H \text{ch } H\eta), \quad (16)$$

— dla wirowości

$$\zeta = \frac{A}{H} \left[\text{sh } H\eta - \frac{(\text{ch } H - 1)}{\text{sh } H} \text{ch } H\eta \right] - B \cdot H (\text{sh } H\eta - \text{cth } H \text{ch } H\eta). \quad (17)$$

³⁾ Warunek ten związany jest ze sposobem obrania układu współrzędnych.

⁴⁾ Parametry A i B są wielkościami zależnymi od przyczyny wywołującej ruch płynu: np. $A = 12$, $B = 0$ oznacza przepływ wywołany gradientem ciśnienia, zaś $A = 0$, $B = 2$ — przepływ wywołany ruchem ścianki.

4. Schemat różnicowy równań ruchu

Pokrywając obszar przepływu siatką prostych, równoległych odpowiednio do osi współrzędnych (por. rys. 1):

$$x = x_0 + ih, \quad (i = 1, 2, \dots),$$

$$y = y_0 + jh, \quad (j = 1, 2, \dots),$$

otrzymamy kwadratową siatkę o kroku równym h .

Zastępując pochodne występujące w równaniach (11) i (12) prostymi wyrażeniami różnicowymi [6] otrzymamy wzory dla $\Psi_{i,j}$ oraz $\zeta_{i,j}$ w punkcie „0”, w zależności od wartości tych funkcji w węzłach sąsiednich:

$$\zeta_{i,j} = \frac{1}{4}(\zeta_{i,j+1} + \zeta_{i,j-1} + \zeta_{i+1,j} + \zeta_{i-1,j} - \frac{\text{Re}}{16} [(\zeta_{i+1,j} - \zeta_{i-1,j})(\Psi_{i,j+1} - \Psi_{i,j-1}) + (\Psi_{i+1,j} - \Psi_{i-1,j})(\zeta_{i,j+1} - \zeta_{i,j-1})]) + \frac{H^2}{4}(\Psi_{i+1,j} - 2\Psi_{i,j} + \Psi_{i-1,j}), \quad (18)$$

$$\Psi_{i,j} = \frac{1}{4}(\Psi_{i+1,j} + \Psi_{i-1,j} + \Psi_{i,j+1} + \Psi_{i,j-1}) - \frac{1}{4}h^2\zeta_{i,j}. \quad (19)$$

5. Rozwiązanie równań różnicowych

Otrzymane w poprzednim punkcie pracy przybliżone równania różnicowe rozwiązano metodą iteracji.

Wartości funkcji prądu i wirowości na granicach obszaru obliczeniowego, tzn. na „wejściu” i „wyjściu” z kanału są znane i stałe w ruchu ustalonym. Na ściankach natomiast znane są tylko wartości funkcji prądu.

Wartości wirowości na ściankach są początkowo (jak w całym obszarze obliczeń) założone możliwie blisko przewidywanych, a następnie przybliżane w toku procesu iteracyjnego.

Do poprawienia wartości ζ na brzegach obszaru (tj. w węzłach oznaczonych przykładowo „krzyżykami” na rys. 1) wykorzystano zależność wyprowadzoną w pracy [9].

$$\zeta_0 = \frac{3(\Psi_2 - \Psi_0)}{h^2} - \frac{\zeta_2}{2} - \frac{3U}{h}. \quad (20)$$

Aby uniknąć nieustalonych oscylacji pola wartości funkcji wirowości nie stosuje się w nowym cyklu iteracji wartości bezpośrednio wyliczonych z wzoru (20), lecz jej kombinację liniową z wartością z poprzedniego cyklu. Dla nieruchomej ścianki będzie

$$\zeta_0^{(n)} = \zeta_0^{(n-1)} + \frac{1}{2}[\zeta_0 - \zeta_0^{(n-1)}], \quad (21)$$

gdzie:

$\zeta_0^{(n-1)}$ — poprzednia wartość brzegowa,

ζ_0 — nowa wartość brzegowa,

$\zeta_0^{(n)}$ — wartość brzegowa wprowadzona do nowego cyklu iteracyjnego.

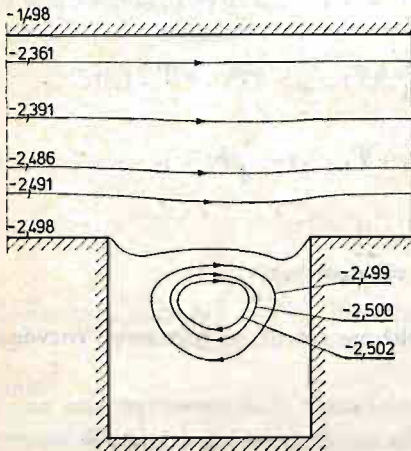
Osobnego traktowania wymagają naroża występujące w obszarze przepływu.

Dla naroża wklęsłego wartości brzegowe w punktach 6 i 7 poziomej ścianki oraz w punktach 8 i 9 pionowej ścianki naroża wyliczono posługując się zależnością (21) zastosowaną odpowiednio do punktów 5, 10, 11. Wartość w punkcie 12 naroża musi być równa:

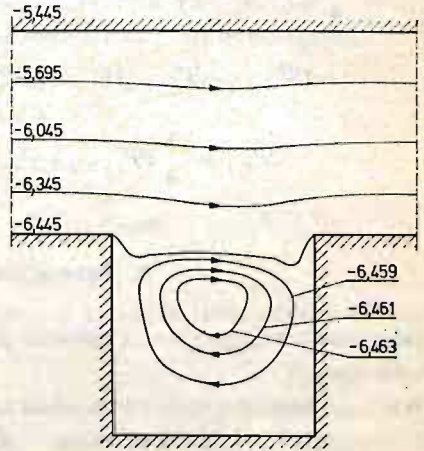
$$\zeta_{12} = \zeta_6 = \zeta_8. \quad (22)$$

Dla naroża wypukłego wyprowadzono dwie różne wartości z powodu dużego gradientu wirowości. Jedną z nich wyliczono przy użyciu zależności (21) i odpowiednich wartości w punktach 1 i 4, drugą przy użyciu odpowiednich wartości z punktu 1 i 3.

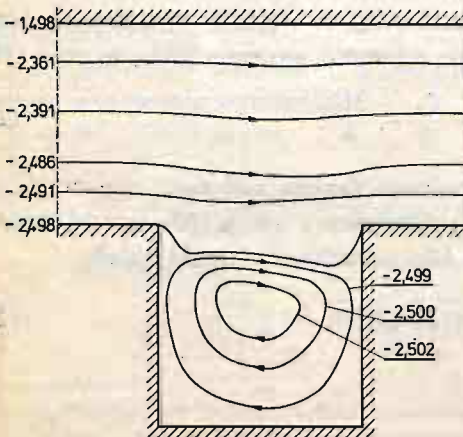
Przepływ płynu wywołany gradientem ciśnienia $A = 12$, $B = 0$



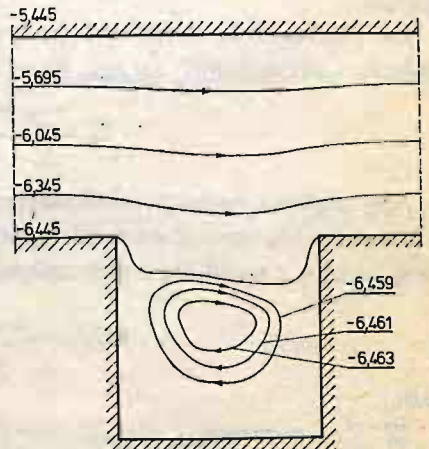
Rys. 2. Funkcja prądu Ψ , $Re = 20$, $H = 0,5$,
 $d \times b = 2 \times 1$



Rys. 3. Funkcja prądu Ψ , $Re = 20$, $H = 1,0$,
 $d \times b = 2 \times 1$



Rys. 4. Funkcja prądu Ψ , $Re = 50$, $H = 0,5$,
 $d \times b = 2 \times 1$



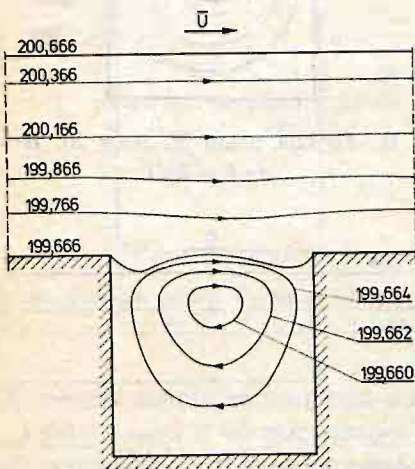
Rys. 5. Funkcja prądu Ψ , $Re = 50$, $H = 1,0$,
 $d \times b = 2 \times 1$

6. Wyniki obliczeń. Wnioski

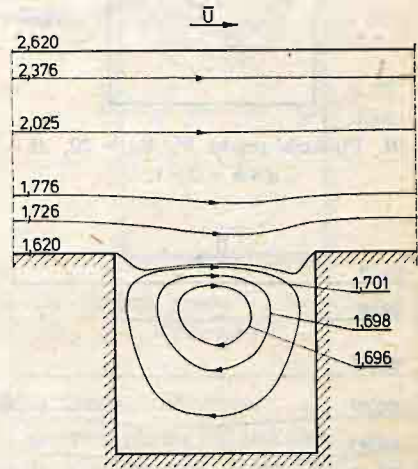
Zastosowany w pracy schemat różnicowy dla magnetohydrodynamicznych równań Naviera-Stokesa charakteryzuje się dla małych liczb Reynoldsa dobrą stabilnością i zbieżnością.

Obliczenia przeprowadzono dla liczb Reynoldsa $Re = 0, 1, 5, 10, 20, 50$, liczb Hartmana $H = 0,1, 0,5, 1$, kroku siatki $h = 0,1$, wymiary kanału przyjęto: $d \times b = 2 \times 1, 3 \times 1$. Rysunki 2÷15 przedstawiają sporządzone na podstawie obliczeń wykresy linii

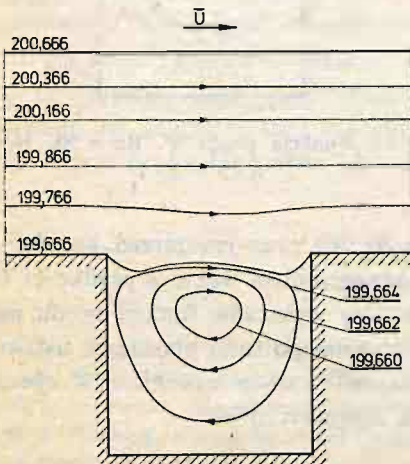
Przepływ wywołany ruchem ścianki $A = 0, B = 2,$



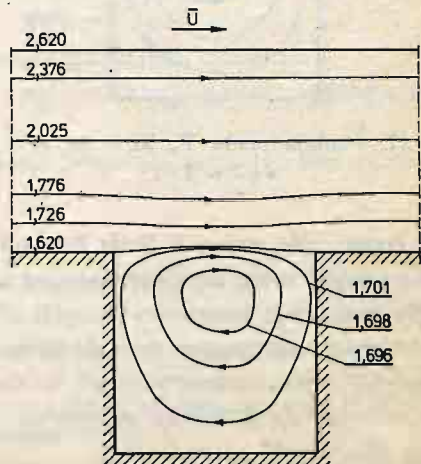
Rys. 6. Funkcja prądu Ψ , $Re = 20, H = 0,1,$
 $d \times b = 2 \times 1$



Rys. 7. Funkcja prądu Ψ , $Re = 20, H = 1,0$
 $d \times b = 2 \times 1$

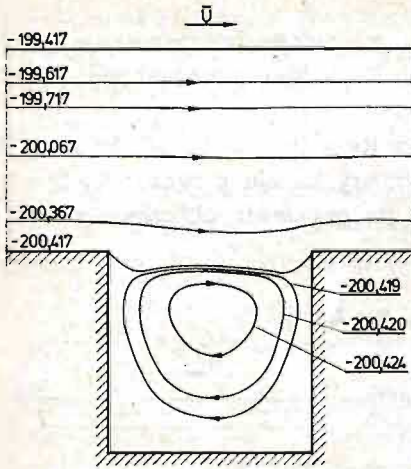


Rys. 8. Funkcja prądu Ψ , $Re = 50, H = 0,1,$
 $d \times b = 2 \times 1$

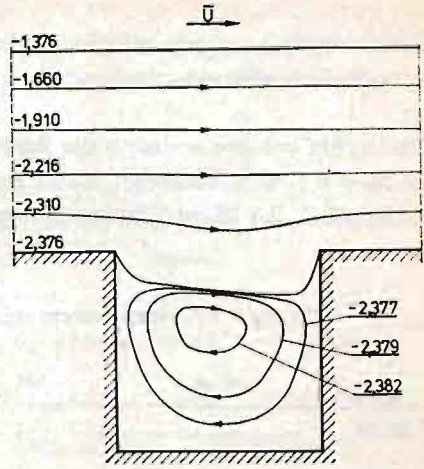


Rys. 9. Funkcja prądu Ψ , $Re = 50, H = 1,0,$
 $d \times b = 2 \times 1$

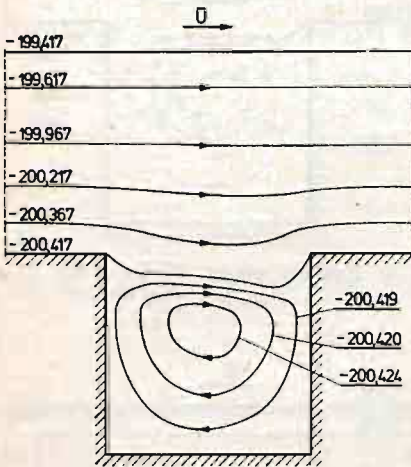
Przepływ wywołany ruchem ścianki i gradientem ciśnienia $A = 6, B = 1$



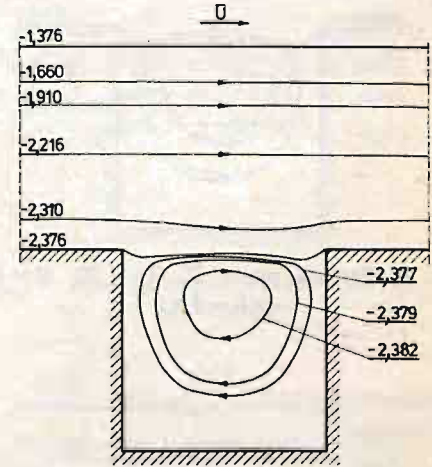
Rys. 10. Funkcja prądu Ψ , $Re = 20, H = 0,1,$
 $d \times b = 2 \times 1,$



Rys. 11. Funkcja prądu Ψ , $Re = 20, H = 1,0,$
 $d \times b = 2 \times 1$



Rys. 12. Funkcja prądu Ψ , $Re = 50, H = 0,1,$
 $d \times b = 2 \times 1$



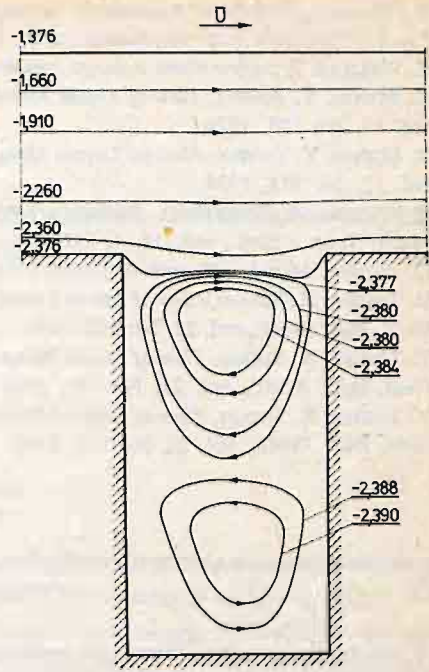
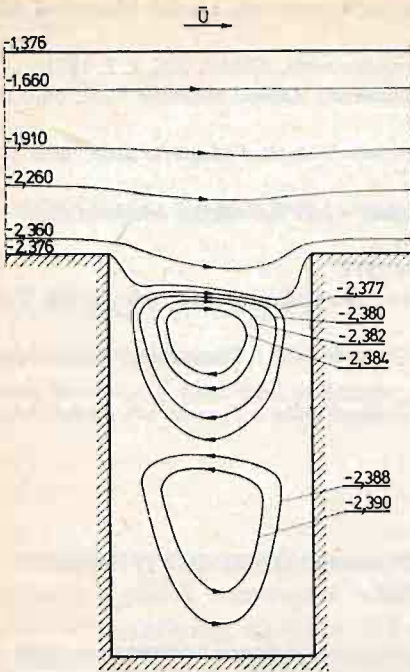
Rys. 13. Funkcja prądu Ψ , $Re = 50, H = 1,0,$
 $d \times b = 2 \times 1$

$\Psi = \text{const.}$, dla różnych liczb Reynoldsa ($Re = 20, 50$) oraz rozszerzeń kanału. Fakt ruchu ścianki został uwidoczniiony na wykresach zaznaczeniem wektora prędkości \bar{U} .

Na podstawie przeprowadzonych obliczeń i analizy wykresów funkcji prądu można sformułować następujące wnioski dotyczące przedstawionego tutaj płaskiego, ustalonego przepływu płynu magnetycznego w kanale z niesymetrycznym uskokiem w obecności poprzecznego do kierunku przepływu płynu pola magnetycznego:

— dla ścianki nieruchomej

a) linia oderwania charakteryzuje się wyraźną symetrią względem osi geometrycznej uskoku dla $Re > 20,$



Rys. 14. Funkcja prądu Ψ , $Re = 20$, $H = 1,0$,
 $d \times b = 3 \times 1$

Rys. 15. Funkcja prądu Ψ , $Re = 50$, $H = 1,0$,
 $d \times b = 3 \times 1$

- b) obszar zastoju ze wzrostem liczby Reynoldsa nieznacznie rośnie,
- c) środek wiru w obszarze zastoju leży blisko geometrycznej osi uskoku,
- d) wzrost liczby Hartmana powoduje powstanie wyraźnej asymetrii linii oderwania,
— dla ścianki ruchomej i przepływu bezgradientowego:
- e) obszar zastoju ze wzrostem liczby Reynoldsa nieznacznie wzrasta,
- f) środek wiru ze wzrostem liczby Hartmana oddala się od geometrycznej osi uskoku
zgodnie z kierunkiem przepływu,
— dla ścianki ruchomej i przepływu wywołanego gradientem ciśnienia:
- g) ze wzrostem liczby Reynoldsa linia oderwania charakteryzuje się wyraźną symetrią
względem osi geometrycznej uskoku,
- h) wzrost liczby Hartmana powoduje powstanie wyraźnej asymetrii linii oderwania.

Literatura cytowana w tekście

1. A. B. ВАТАЖИН, Г. А. ЛЮБИМОВ, С. А. РЕГИРЕР, *Магнитогидродинамические течения в каналах*, Изд. Наука, Москва 1970.
2. А. Б. ЦИНОБЕР, *Магнитогидродинамическое обтекание тел*, Изд. Зинатне, Рига 1970.
3. W. J. PROSNAK, *Mechanika płynów*, t. 1, PWN, Warszawa 1970.
4. H. PEYRET, J. LADEVESE, *Resolution numerique de l'ecoulement dans un canal avec elargissement brusque*, Euromech Coll. 27 on Numerical methods for solving the Navier-Stokes equations, Aug. 16-19, 1972, Jabłonna, Polska.

5. E. WALICKI, *Stabilność i zbieżność prostego schematu różnicowego dla równań Naviera — Stokesa* Zeszyty Naukowe P. Ł. Mechanika, z. 29, Łódź 1972.
6. E. WALICKI, *Przepływ płynu lepkiego kanałem o nagłym rozszerzeniu*, ABM t. XX, z. 2, 1973.
7. K. SUDON, Y. TOMITA, *Flow of Liquid Metals with a Transversely Applied Magnetic Field*, Bull. JSME, vol. 17, No 108, 1974.
8. K. SUDON, Y. TOMITA, *Flow of Liquid Metals with a transversely Applied Magnetic Field*, Bull. JSME, vol. 17, No 114, 1974.
9. E. WALICKI, A. TOPOLIŃSKI, *Powolny przepływ cieczy lepkiej w kanale o nagłym lokalnym rozszerzeniu*. Mech. Teor. i Stos., vol. 14, 1, 1976.
10. D. POTTER, *Metody obliczeniowe fizyki*, PWN, Warszawa 1977.
11. Y. TOMITA, K. SUDON, *Flow of Liquid Metals in Curved Channels under a Transversely Applied Magnetic Field*, Bull. JSME, vol. 22, No 167, 1979.
12. Y. TOMITA, K. SUDON, *Flow of Liquid Metals in Curved Channels under a Transversely Applied Magnetic Field*, Bull. JSME, vol. 22, No 173, 1979.
13. Y. TOMITA, K. SUDON, *Flow of Liquid Metals in Curved Channels under a Transversely Applied Magnetic Field*, Bull. JSME, vol. 23, No 176, 1980.

Резюме

ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ ТЕЧЕНИЯ МГД В КАНАЛЕ С НЕСИММЕТРИЧНЫМ РАСШИРЕНИЕМ

В работе представлено численное решение, соответствующее течению электропроводной жидкости при малых значениях числа Рейнольдса и Гартмана в канале с местным несимметричным расширением. МГД уравнения Навье-Стокса для плоского течения решены методом конечных разностей. Рассмотрено течение в каналах с разными размерами расширения. Результаты вычисления для чисел Рейнольдса $Re \leq 50$ и чисел Гартмана $H \leq 1,0$ представлены в виде графиков линий тока.

Summary

NUMERICAL ANALYSIS OF MHD FLOW IN THE CHANNEL WITH A UNSYMMETRICAL CAVITY

In the paper the numerical solution fitted of the electrical-conductance fluid flow with low Reynolds number and low Hartman number in the channel with unsymmetrical cavity is described. The method of finite differences is used to solve the MHD Navier-Stokes equations for plane flow. The flow through channels with different dimensions of cavity is considered. The results of numerical investigations for Reynolds number $Re \leq 50$ and Hartman number $H \leq 1,0$ are shown in graphs of streamlines.

Praca została złożona w Redakcji dnia 27 stycznia 1981 roku