

DYNAMIKA JEDNOKULKOWEGO KOREKTORA PIONU SZTUCZNEGO HORYZONTU

ALEKSANDER DĄBROWSKI (WARSZAWA)

ZBIGNIEW BURDA

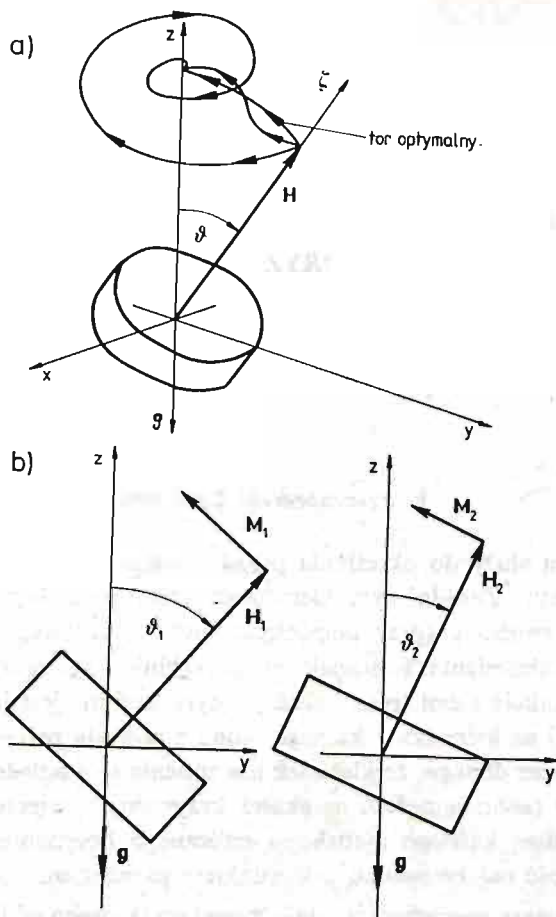
Politechnika Warszawska

1. Przeznaczenie korektora

Sztuczny horyzont służy do określania przestrzennego położenia samolotu względem płaszczyzny horyzontu. Zasadniczym elementem sztucznego horyzontu jest żyroskop o dwóch stopniach swobody (przy pominięciu ruchu obrotowego wirnika żyroskopu), którego oś jest osią odniesienia. Kierunek tej osi powinien być zgodny z kierunkiem pionowym w danym punkcie ziemi (pion lokalny). Żyroskop nie jest jednak w stanie utrzymać swej osi głównej na kierunku lokalnego pionu z powodu precesji wywołanej tarciami w łożyskach ramki oraz dlatego, że kierunek ten zmienia swe położenie względem układu inercjalnego podczas ruchu samolotu na skutek krzywizny powierzchni ziemi. Toteż niezbędnym wyposażeniem każdego żyroskopu sztucznego horyzontu jest korektor pionu wymuszający zgodność osi żyroskopu z kierunkiem pionowym.

Na rys. 1a przedstawiono schematycznie żyroskop, którego oś jest odchylona od kierunku pionowego o kąt ϑ . Zadaniem korektora jest wymuszenie ruchu żyroskopu w kierunku pokrycia się osi żyroskopu O_c z osią oz równoległą do wektora g natężenia pola grawitacyjnego. Ruch ten może być opisany kinematycznie torem dowolnego punktu osi żyroskopu o_c (różnego od punktu O — środka ruchu kulistego żyroskopu), np. punktem określającym koniec wektora H momentu pędu.

Dla optymalnej korekcji tor powinien leżeć w płaszczyźnie wyznaczonej przez oś żyroskopu O_c i oś wektora H . Na podstawie tzw. elementarnej teorii żyroskopu można powiedzieć, że aby taki ruch następował, na żyroskop musi działać moment zewnętrzny o kierunku stale prostopadłym do wektora H momentu pędu, leżący również w płaszczyźnie II_z , (rys. 1b). Prędkość opisanego powyżej ruchu precesyjnego jest ściśle zależna od modułu wektora momentu. Oczywiście jest rzeczą, że dla $\vartheta = 0$ moment ten powinien zanikać. Wynika stąd bezpośrednio, że zadaniem korektora jest wykrycie odchylenia osi żyroskopu od kierunku pionowego i wytworzenie momentu o odpowiednim zwrocie i module — wymuszającego precesję żyroskopu na kierunek pionowy. Moment ten nazywany jest momentem korekcyjnym.

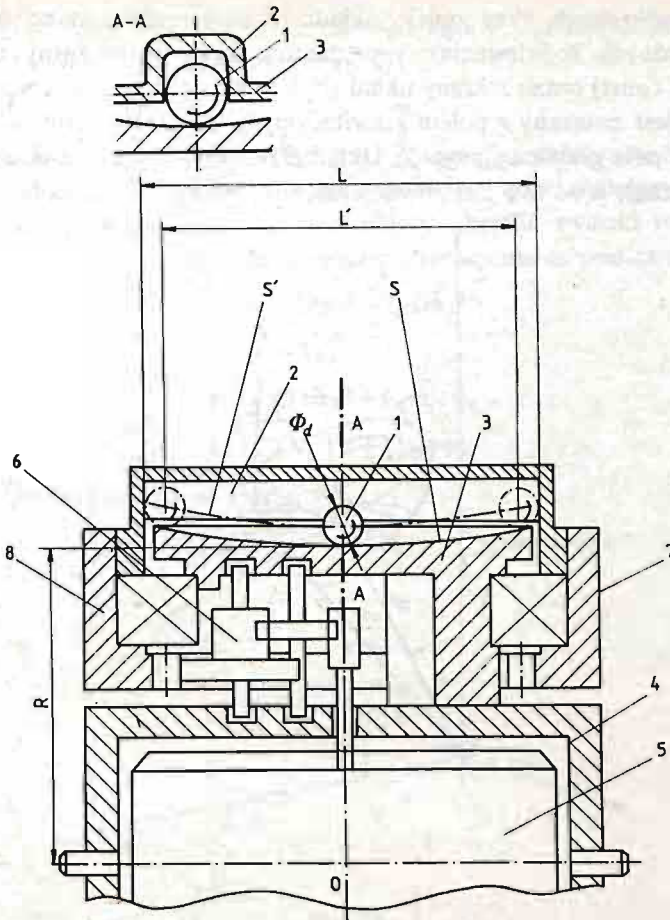


Rys. 1

2. Opis konstrukcji korektora jednokulkowego

Jednym z prostszych konstrukcyjnie rozwiązań korektora pionu sztucznego horyzontu jest, opatentowany w roku 1974 w ZSRR, korektor jednokulkowy o oznaczeniu Z.F. Całkowity brak w literaturze fachowej opisu zjawisk dynamicznych zachodzących podczas działania tego typu korektora uniemożliwiał dotąd zastosowanie go w wytwarzanych przez przemysł krajowy sztucznych horyzontach. Niniejsza praca, której podjęcie zostało zainicjowane sugestiami kierownictwa jednego z krajowych biur konstrukcyjnych przemysłu lotniczego, stwarza możliwości zaprojektowania korektora, który dzięki swej małej masie i prostej konstrukcji jest szczególnie predystynowany do wykorzystania w sztucznych horyzontach małych samolotów i szybowców, tak licznie wytwarzanych przez krajowy przemysł lotniczy.

Szczegóły konstrukcyjne korektora jednokulkowego są przedstawione na rys. 2. Kulka 1 umieszczona jest wewnątrz rowka prowadnicy 2 stanowiącej górną część ruchomego korpusu 8. Kulka spoczywa na wklęsłej (promień krzywizny S) powierzchni bieżni 3 związanej sztywno z ramką 4 żyroskopu. Korpus 8 ułożyskowany jest na ramce przy po-



Rys. 2

mocy łożyska 7 i napędzany przez żyroskop za pośrednictwem wielostopniowej przekładni zębatej 6.

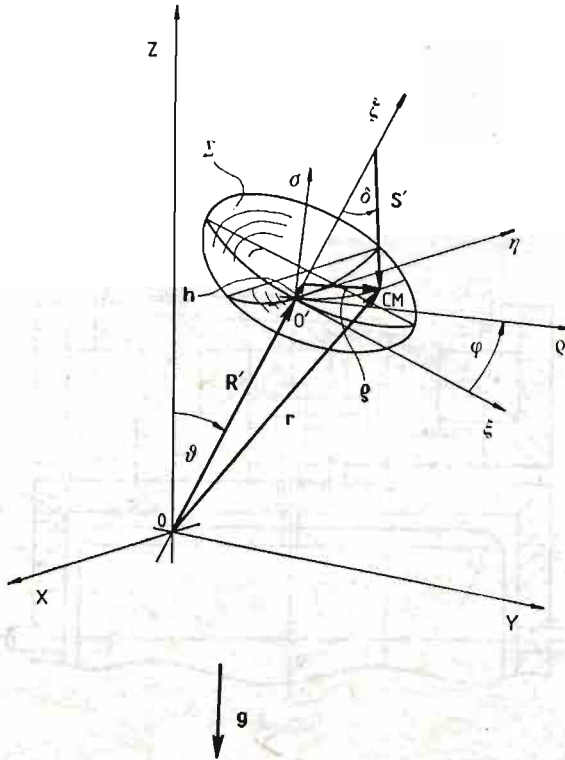
3. Analiza dynamiczna jednokulkowego korektora pionu

3.1. Założenia wstępne. Opis układu został wykonany w inercjalnym układzie odniesienia. Odpowiada to sytuacjom, w których samolot wraz z zamontowanym na nim sztucznym horyzontem porusza się ruchem jednostajnym prostoliniowym, lub też, gdy badamy zachowanie się sztucznego horyzontu z korektorem w warunkach laboratoryjnych. Są to zatem te wszystkie przypadki, w których pion pozorny pokrywa się z pionem rzeczywistym (kierunkiem g). Założono dalej, że oś żyroskopu sztucznego horyzontu wychylona jest o stały kąt od kierunku pionowego. Dla takiej sytuacji napisane są równania ruchu kulki oraz dyskusja i obliczenia momentu korekcyjnego.

Wreszcie jeżeli chodzi o dynamikę żyroskopu, oparto się na tzw. przybliżonej teorii zjawisk żyroskopowych (1) i (2). Wszystkie wzory zawarte w pracy są typu wielkościowego.

3.2. Układy współrzędnych. Przy opisie układu zostały wykorzystane trzy nieruchome układy współrzędnych (odniesienia): prostokątny $Oxyz$, prostokątny $O'\xi\eta\zeta$, sferyczny $QS'\delta\varphi$ (dla $S' = \text{const}$) oraz ruchomy układ $O'\rho\sigma$ leżący stale w płaszczyźnie $II\xi\eta$ (rys. 3).

Układ $Oxyz$ jest związany z polem grawitacyjnym, a ujemny zwrot osi Oz jest równoległy do wektora pola grawitacyjnego ζ' . Układ $O'\xi\eta\zeta$ jest związany z obudową żyroskopu (ramką wewnętrzną), a oś $O'\xi$ jest równoległa do wektora momentu pędu H żyroskopu.



Rys. 3

Punkt O układu $Oxyz$ pokrywa się ze środkiem ruchu kulistego żyroskopu (z punktem przecięcia się osi ramek zawieszenia kardanowego żyroskopu). Oś $O'\zeta$ i Oz przecinają się ze sobą w punkcie O tworząc kąt ϑ . Punkt O' jest oddalony od punktu O o odległość $R + d/2$ (por. rys. 2). Ruchomy układ $O'\rho\sigma$ jest związany z korpusem δ (rys. 2), a oś $O'\rho$ jest równoległa do osi podłużnej rowka prowadnicy 2 (rys. 2).

Powierzchnia sferyczna Σ stanowi miejsce geometryczne możliwych położenia środka kulki. Chwilowe położenie środka kulki opisuje w układzie XYZ wektor \mathbf{r} , który może być przedstawiony w postaci sumy (składniki sumy zostaną objaśnione później):

$$\mathbf{r} = \mathbf{R}' + \mathbf{h} + \boldsymbol{\rho}. \quad (1)$$

W układzie sferycznym położenie to określone jest jednoznacznie przez kąty δ, φ ($S' = \text{const}$).

Kąt δ jest kątem pomiędzy ujemnym zwrotem osi $O'\zeta$ a wektorem wodzącym S' środka kulki poprowadzonym ze środka krzywizny Q powierzchni sferycznej Σ . Kąt φ jest kątem

między osią $O'\xi$ a osią $O'\rho$. Pochodna czasowa kąta φ jest równa prędkości kątowej, z jaką obraca się korpus z prowadnicą 2 (rys. 2):

$$\dot{\varphi} = \omega = \text{const.} \quad (2)$$

Równanie (2) nakłada więzy na współzrzedną φ . Zatem przy założeniu, że kulka toczy się po bieźni bez poślizgu, ma ona jeden stopień swobody, odpowiadający współzrzednej δ .

Przed przystąpieniem do dalszej analizy należy określić związki między wersorami układów $OXYZ$, $O'\xi\eta\zeta$ i $O\rho\sigma$. Związki te zostały wyznaczone na podstawie rys. 4:

$$\mathbf{1}_\xi = \mathbf{1}_Y \cos \vartheta - \mathbf{1}_Z \sin \vartheta, \quad (3)$$

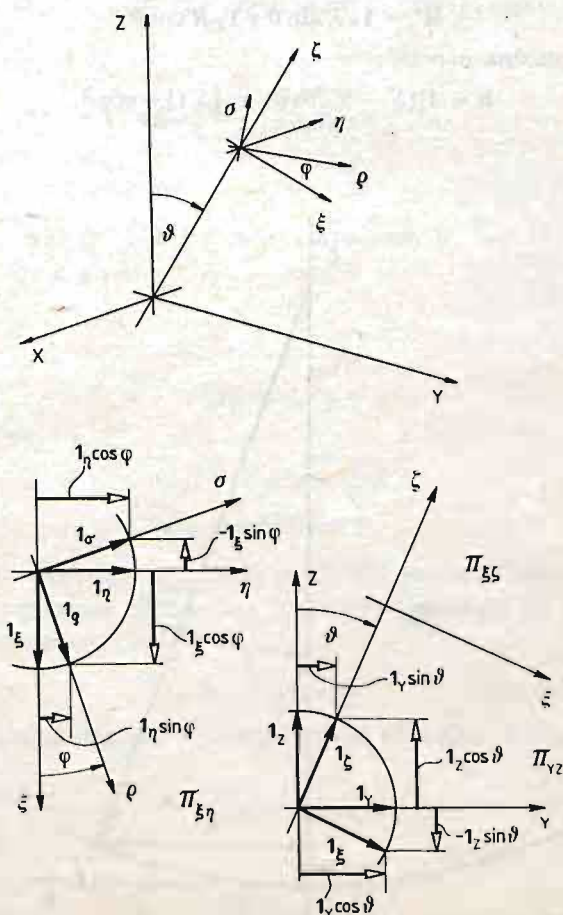
$$\mathbf{1}_\eta = -\mathbf{1}_X, \quad (4)$$

$$\mathbf{1}_\zeta = \mathbf{1}_Y \sin \vartheta + \mathbf{1}_Z \cos \vartheta, \quad (5)$$

$$\mathbf{1}_\rho = \mathbf{1}_\xi \cos \varphi + \mathbf{1}_\eta^z \sin \varphi, \quad (6)$$

a po podstawieniu (3) i (4) do (6) otrzymamy:

$$\mathbf{1}_\rho = -\mathbf{1}_X \sin \varphi + \mathbf{1}_Y \cos \vartheta \cos \varphi - \mathbf{1}_Z \sin \vartheta \cos \varphi. \quad (7)$$



Rys. 4

Podobnie:

$$\mathbf{1}_\sigma = \mathbf{1}_\eta \cos \varphi - \mathbf{1}_\xi \sin \varphi, \quad (8)$$

$$\mathbf{1} = \mathbf{1}_x \cos \varphi - \mathbf{1}_y \cos \vartheta \sin \varphi + \mathbf{1}_z \sin \vartheta \sin \varphi. \quad (9)$$

Jak to wykazano we wzorze (1), wektor \mathbf{r} można przedstawić jako sumę wektorów \mathbf{R}' , \mathbf{h} i ρ , gdzie:

$$\mathbf{R}' = \mathbf{1}_\zeta \left(R + \frac{d}{2} \right). \quad (10)$$

3.3. Kinematyka układu. Aby wyrazić położenie środka kulki (określone przez wektor \mathbf{r}) przy pomocy zmiennych δ i φ , co będzie potrzebne do wyznaczenia funkcji opisującej energię kulki, należy dokonać podanych dalej przekształceń. Podstawiając (5) do (6) otrzymano następujący związek:

$$\mathbf{R}' = \mathbf{1}_y \left(R + \frac{d}{2} \right) \sin \vartheta + \mathbf{1}_z \left(R + \frac{d}{2} \right) \cos \vartheta. \quad (11)$$

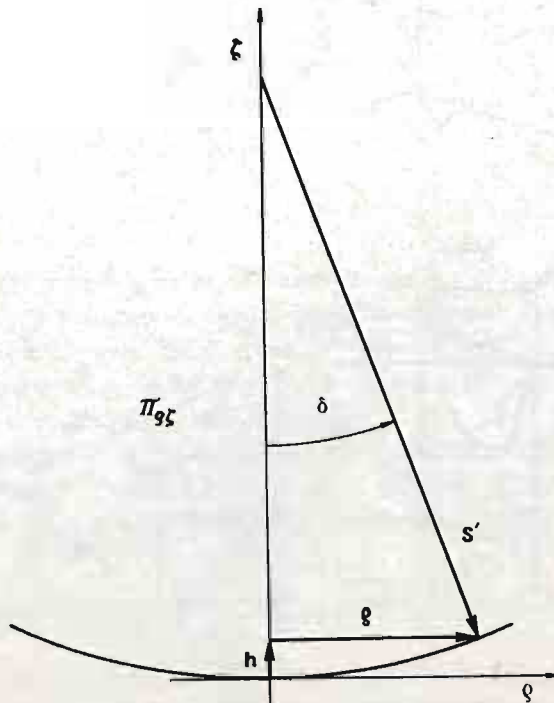
Wprowadzając do (11) $R' = R + \frac{d}{2}$ otrzymano ostatecznie:

$$\mathbf{R}' = \mathbf{1}_y R' \sin \vartheta + \mathbf{1}_z R' \cos \vartheta. \quad (12)$$

Na podstawie rys. 5 można napisać:

$$\mathbf{h} = \mathbf{1}_\zeta (S' - S' \cos \delta) = \mathbf{1}_\zeta S' (1 - \cos \delta), \quad (13)$$

gdzie: $S' = S - \frac{d}{2}$.



Rys. 5

Po wstawieniu (5) do (13) otrzymamy:

$$\mathbf{h} = \mathbf{1}_Y S(1 - \cos \delta) \sin \vartheta + \mathbf{1}_Z S'(1 - \cos \delta) \cos \vartheta \quad (14)$$

oraz

$$\boldsymbol{\rho} = \mathbf{1}_\rho S' \sin \delta \quad (15)$$

$$\boldsymbol{\varrho} = S' \sin \delta \quad (16)$$

a po podstawieniu w miejsce $\mathbf{1}_\rho$ wyrażenia (7)

$$\boldsymbol{\rho} = -\mathbf{1}_X S' \sin \delta \sin \varphi + \mathbf{1}_Y S' \sin \delta \cos \vartheta \cos \varphi - \mathbf{1}_Z S' \sin \delta \sin \vartheta \cos \varphi. \quad (17)$$

Po podstawieniu do (1) związków (11), (14) i (17) otrzymano ostateczną postać wyrażenia określającego wektor \mathbf{r} :

$$\mathbf{r} = -\mathbf{1}_X S' \sin \delta \sin \varphi + \mathbf{1}_Y [R' \sin \vartheta + S'(1 - \cos \delta) \sin \vartheta + S' \sin \delta \cos \vartheta \cos \varphi] + \mathbf{1}_Z [R' \cos \vartheta + S'(1 - \cos \delta) \cos \vartheta - S' \sin \delta \sin \vartheta \cos \varphi]. \quad (18)$$

Prędkość środka kulki może być wyznaczona przez zróżniczkowanie względem czasu wyrażenia (18). Łatwiej jednak jest tę prędkość (a właściwie jej moduł) wyrazić bezpośrednio przez pochodne współrzędne układu sferycznego.

Prędkość środka kulki \mathbf{v}_{CM} można przedstawić w postaci sumy:

$$\mathbf{v}_{CM} = \mathbf{v}_r + \mathbf{v}_e, \quad (19)$$

gdzie:

\mathbf{v}_r — prędkość środka kulki względem układu $O'\varrho\zeta$,

\mathbf{v}_e — prędkość unoszenia.

Korzystając z rys. 6 napiszemy:

$$\mathbf{v}_r = \dot{\boldsymbol{\delta}} \times S' \hat{\boldsymbol{\delta}} \text{ ma zwrot przeciwny do osi } O'\sigma \text{ (por. rys. 3)} \quad (20)$$

$$|\mathbf{v}_r| = \omega \cdot S' \quad (21)$$

oraz

$$\mathbf{v}_e = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}, \quad (22)$$

$$|\mathbf{v}_e| = \omega \cdot \varrho, \quad (23)$$

Ponieważ $\mathbf{v}_r \perp \mathbf{v}_e$, więc

$$|\mathbf{v}_{CM}| = \sqrt{\omega^2 \varrho^2 + \dot{\boldsymbol{\delta}}^2 S'^2}, \quad (24)$$

$$\mathbf{v}_{CM}^2 = \omega^2 \varrho^2 + \dot{\boldsymbol{\delta}}^2 S'^2. \quad (25)$$

Przy wyznaczaniu bezwzględnej chwilowej prędkości kątowej kulki zakładamy, że prędkość kątowa kulki względem układu $\varrho\sigma\zeta$ jest stale równoległa do osi $O'\sigma$. Po przyjęciu tego założenia otrzymujemy:

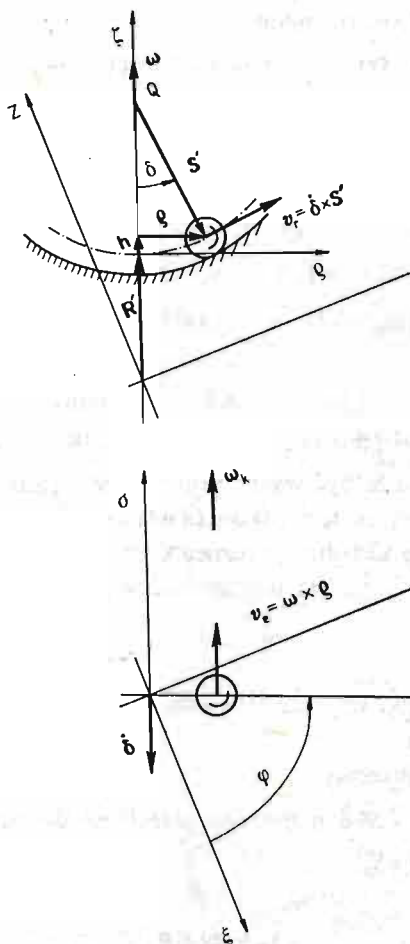
$$\boldsymbol{\omega}_C = \boldsymbol{\omega}_k + \boldsymbol{\omega}. \quad (26)$$

Zgodnie z powyższym założeniem $\boldsymbol{\omega}$ ma zwrot osi $O'\sigma$. Dla wyznaczenia $\boldsymbol{\omega}_k$ posłużymy się równaniem

$$\mathbf{v}_r = \dot{\boldsymbol{\delta}} S', \quad (27)$$

z drugiej zaś strony

$$v_r = \omega_k \frac{d}{2}, \quad (28)$$



Rys. 6

czyli

$$\dot{\delta}S' = \omega_k \frac{d}{2}. \quad (29)$$

Stąd

$$\omega_k = \frac{2}{d} \dot{\delta}S'. \quad (30)$$

Wobec tego, że $\omega_k \perp \omega$, można napisać:

$$\omega_c^2 = \frac{4}{d^2} \dot{\delta}^2 S'^2 + \omega^2. \quad (31)$$

3.4. Energia układu. Równanie (18) pozwala określić z-tową składową położenia środka kulki względem układu $OXYZ$:

$$r_z = \mathbf{1}_z [R' \cos \theta + S' (1 - \cos \delta) \cos \vartheta - S' \sin \sigma \sin \vartheta \cos \varphi], \quad (32)$$

$$r_z = R' \cos \vartheta + S' (1 - \cos \delta) \cos \vartheta - S' \sin \delta \sin \vartheta \cos \varphi. \quad (33)$$

Oznaczmy przez V energię potencjalną kulki i przyjmijmy jej zerową wartość dla $r_z = \cos \vartheta R'$

$$V_{(r_z = \cos \vartheta R')} = 0.$$

Będzie wtedy

$$V = mg[S'(1 - \cos \delta)\cos \vartheta - S'\sin \delta \sin \vartheta \cos \varphi], \quad (34)$$

gdzie:

m — masa kulki,

g — natężenie pola grawitacyjnego.

Energię kinetyczną można wyznaczyć następująco:

$$E = \frac{1}{2}mv^2_{CM} + \frac{1}{2}I_{CM}\omega_c^2. \quad (35)$$

gdzie:

E — energia kinetyczna,

I_{CM} — moment bezwładności kulki względem osi przechodzącej przez środek, $I_{CM} = 0,1 md^2$.

Po podstawieniu do (35), (25) i (31) otrzymamy:

$$E = \frac{1}{2}m\omega^2\varrho^2 + \frac{7}{10}m\dot{\delta}^2S'^2 + \frac{1}{20}md^2\omega^2. \quad (36)$$

A podstawiając (16) do (36) otrzymamy ostatecznie:

$$E = \frac{1}{2}m\omega^2S'^2\sin^2\delta + \frac{7}{10}m\dot{\delta}^2S'^2 + \frac{1}{20}md^2. \quad (37)$$

Po założeniu, że dla δ przyjętej jako współrzędna uogólniona nie występują siły niepotencjalne ($Q_\delta = 0$), a więc że ruch kulki względem prowadnicy jest ruchem nietłumionym, równanie Lagrange'a II rodzaju opisujące układ przybierze następującą postać:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E}{\partial \dot{\delta}} \right) - \frac{\partial E}{\partial \delta} + \frac{\partial U}{\partial \delta} = 0. \quad (38)$$

Wyznamy poszczególne składniki (38)

$$\frac{\partial E}{\partial \dot{\delta}} = \frac{7}{5}mS'^2\dot{\delta},$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E}{\partial \dot{\delta}} \right) = \frac{7}{5}mS'^2\ddot{\delta}, \quad (39)$$

$$\frac{\partial E}{\partial \delta} = m\omega^2S'^2\sin \delta \cos \delta, \quad (40)$$

$$\frac{\partial V}{\partial \delta} = mg[S'\sin \delta \cos \vartheta - S'\cos \delta \sin \vartheta \cos \varphi]. \quad (41)$$

Po wstawieniu (39), (40), (41) do (38) otrzymamy ostatecznie

$$\frac{7}{5}mS'^2\ddot{\delta} - m\omega^2S'^2\sin \delta \cos \delta + mgS'\sin \delta \cos \vartheta - mgS'\cos \delta \sin \vartheta \cos \varphi = 0. \quad (42)$$

Jest to równanie ruchu kulki ściśle, przy wszystkich dotychczasowych założeniach.

Obecnie, dla uwzględnienia rozproszenia energii, założmy, że ruch kulki tłumiony jest siłą proporcjonalną do prędkości środka kulki względem zabieraka-prowadnicy. Równanie (42) wzbogaci się wtedy o składnik $\nu S' \dot{\delta}$. Współczynnik ν charakteryzuje intensywność tłumienia:

$$\frac{7}{5} m S'^2 \ddot{\delta} - m \omega^2 S'^2 \sin \delta \cos \delta + m g S' \sin \delta \cos \vartheta - m g S' \cos \delta \sin \vartheta \cos \varphi + \nu S' \dot{\delta} = 0.$$

Ponieważ $\varphi = \omega t$, możemy więc napisać:

$$\frac{7}{5} m S'^2 \ddot{\delta} + \nu S' \dot{\delta} + m \omega^2 S'^2 \sin \delta \cos \delta + m g S' \sin \delta \cos \vartheta = m g S' \cos \delta \sin \vartheta \cos(\omega t). \quad (43)$$

Dla uproszczenia dalszej analizy równanie (43) zlinearyzujemy w otoczeniu punktu $\delta = 0$. Otrzymamy:

$$\frac{7}{5} m S'^2 \ddot{\delta} + \nu S' \dot{\delta} - m \omega^2 S'^2 \delta + m g S' \cos \vartheta \delta = m g S' \sin \vartheta \cos(\omega t), \quad (44)$$

$$\frac{7}{5} m S'^2 \ddot{\delta} + \nu S' \dot{\delta} + m S' (g \cos \vartheta - \omega^2 S') \delta = m g S' \sin \vartheta \cos(\omega t). \quad (45)$$

Dla uproszczenia postaci równania wprowadzimy następujące oznaczenia:

$$\tilde{I} = \frac{7}{5} m S'^2,$$

$$\tilde{b} = \nu S',$$

$$\tilde{k} = m S' (g \cos \vartheta - \omega^2 S'),$$

$$\tilde{M} = m g S' \sin \vartheta.$$

Po ich podstawieniu do równania (45) otrzymamy:

$$\tilde{I} \ddot{\delta} + \tilde{b} \dot{\delta} + \tilde{k} \delta = \tilde{M} \cos \omega t, \quad (46)$$

Jest to liniowe równanie różniczkowe o stałych współczynnikach. Rozwiązanie jego można przedstawić w postaci sumy rozwiązań opisujących ruch wymuszony i ruch swobodny. Aby ruch swobodny, a zatem i wypadkowy, był ruchem nierozbieżnym, musi być spełniony warunek:

$$\tilde{k} > 0$$

Stąd wynika, że

$$\omega^2 < \frac{g \cos \vartheta}{\delta'}.$$

A zakładając

$$\vartheta_{\max} = \frac{\pi}{4}$$

otrzymamy warunek w postaci:

$$\omega^2 < \frac{g\sqrt{2}}{2\delta'} \quad (47)$$

Dla $\tilde{k} > 0$ składowa opisująca ruch swobodny, ze względu na tłumienie, po upływie czasu równego kilku stałym czasowym zmniejsza się do zera. Dlatego też w rozwiązaniu uwzględniamy tylko składową wymuszoną.

Rozwiązaniem (46) będzie:

$$\delta = \delta_m \cos(\omega t + \psi), \quad (48)$$

gdzie: δ_m — amplituda; ψ — kąt przesunięcia fazowego,

$$\delta_m = \left| \frac{\tilde{M}}{-\tilde{I}\omega^2 + j\tilde{b}\omega + \tilde{k}} \right|,$$

$$\psi = \arg\left(\frac{\tilde{M}}{-\tilde{I}\omega^2 + j\tilde{b}\omega + \tilde{k}}\right),$$

lub w postaci rzeczywistej:

$$\delta_m = \frac{\tilde{M}}{\sqrt{(\tilde{k} - \tilde{I}\omega^2)^2 + (\tilde{b}\omega)^2}}, \quad (49)$$

$$\psi = -\arctg \frac{\tilde{b}\omega}{\tilde{k} - \tilde{I}\omega^2}. \quad (50)$$

Efekt korekcji będzie maksymalny dla kąta przesunięcia fazowego $\psi = -\frac{\pi}{2}$ i zerowy dla $\psi = 0$ lub $\psi = -\pi$. Warunek ten pozwala wyznaczyć prędkość kątową ω , z jaką powinna być napędzana prowadnica 2 (rys. 2):

$$-\frac{\pi}{2} = -\arctg \frac{b\omega}{\tilde{k} - \tilde{I}\omega^2},$$

czyli

$$\tilde{k} - \tilde{I}\omega^2 = 0,$$

$$\omega^2 = \frac{\tilde{k}}{\tilde{I}},$$

a po podstawieniu uprzednio przyjętych oznaczeń:

$$\omega^2 = \frac{5}{12} \frac{g \cos \vartheta}{S'}. \quad (51)$$

Ponieważ układ jako całość pracuje w otoczeniu ($\delta = 0$) i spełnia warunek określony przez nierówność (47), można przyjąć:

$$\omega \approx \sqrt{\frac{5}{12} \frac{g}{S'}}. \quad (52)$$

W dalszym ciągu tę właśnie wartość częstotliwości będziemy oznaczali ω_r (pulsacja rezonansowa).

3.5. Trajektorla kulki. Amplituda δ_m dla $\omega = \omega_r$ wyniesie:

$$\delta_{m(r)} = \frac{\tilde{M}}{\tilde{b}\omega_r} = \sqrt{\frac{12}{5} \frac{S'}{g}} \frac{m g \sin \vartheta}{\nu}. \quad (53)$$

Rozwiązanie (53) dla $\omega = \omega_r$ przybierze następującą postać:

$$\begin{aligned}\delta &= \delta_{m(r)} \cos(\omega_r t + \psi_r), \\ \delta &= \sqrt{\frac{12}{5} \frac{S'}{g} \frac{mg}{\nu}} \sin \vartheta \cos\left(\omega_r t - \frac{\pi}{2}\right), \\ \delta &= \sqrt{\frac{12}{5} \frac{S'}{g} \frac{mg}{\nu}} \sin \vartheta \sin(\omega_r t).\end{aligned}$$

Oznaczmy:

$$A = \sqrt{\frac{12}{5} \frac{S'}{g} \frac{mg}{\nu}}; \quad (54)$$

wtedy:

$$\delta = A \sin \vartheta \sin(\omega_r t). \quad (55)$$

Wstawiając (55) do (18) otrzymamy wektorowe równanie trajektorii środka kulki w układzie $OXYZ$. Trajektoria ta jest krzywą leżącą na powierzchni sferycznej Σ .

Przeanalizujemy teraz, jak przedstawia się równanie trajektorii środka kulki w układzie $O'\xi\eta\zeta$, a właściwie, przy pominięciu składowej h , w płaszczyźnie $O'\xi\eta$ (rzut trajektorii na płaszczyznę $O'\xi\eta$).

W płaszczyźnie $O'\xi\eta$ położenie środka rzutu kulki opisane jest wektorem ρ (16), a w przybliżeniu (por. rys. 5)

$$\rho = \mathbf{1}_\rho S' \delta. \quad (56)$$

Moduł wektora ρ jest określony następująco:

$$|\rho| = S' \delta = S' A \sin \vartheta \sin(\omega_r t).$$

Trajektoria środka kulki w płaszczyźnie $O'\xi\delta$ dana jest równaniami parametrycznymi:

$$\begin{aligned}\varphi &= \omega_r t, \\ \varrho &= S' A \sin \vartheta \sin(\omega_r t).\end{aligned}$$

Po wyrugowaniu t otrzymamy:

$$\varrho = S' A \sin \vartheta \sin \varphi. \quad (57)$$

Równanie to możemy napisać w postaci:

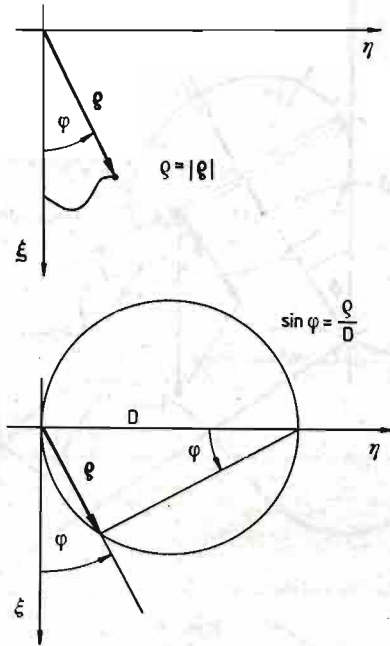
$$\sin \varphi = \frac{\varrho}{S' A \sin \vartheta} = \frac{\varrho}{D}. \quad (58)$$

Jest to biegunowe równanie rodziny okręgów o średnicy $D = S' A \sin \vartheta$ zależnej od kąta ϑ (rys. 7).

3.6. Wyznaczenie momentu korekcyjnego. W poniższych obliczeniach zakładamy, że żyroskop jest całkowicie wyważony dynamicznie i że układy: żyroskop-ramka wewnętrzna (obudowa) oraz żyroskop-ramka wewnętrzna-ramka zewnętrzna są idealnie wyważone statycznie względem środka ruchu kulistego żyroskopu (żyroskop astatyczny). Wynika stąd, że jedynym źródłem niewyważenia będzie przemieszczanie się kulki (1 rys. 2) korektora.

Na kulkę (w układzie inercjalnym, np. $OXYZ$) działają siły: ciężkości i reakcje prowadzącej oraz bocznej powierzchni zabieraka. Założmy, że boczne powierzchnie zabieraka-

przewodnicy są równoległe do osi żyroskopu, a co za tym idzie, reakcja kulki na powierzchnię boczną zabieraka jest prostopadła do tej osi. Moment tej reakcji względem punktu O (środek ruchu kulistego żyroskopu) jest wektorem leżącym na osi momentu pędu żyroskopu (osi żyroskopu) i jako taki nie może zmienić kierunku wektora momentu pędu. Stanowi on natomiast dodatkowe obciążenie silnika żyroskopu.



Rys. 7

Moment korekcyjny (moment powodujący precesję osi żyroskopu na kierunku pionowy) będzie zatem momentem reakcji kulki na powierzchnię prowadzącą (bieżnię 3, rys. 2). Reakcja ta jest sumą reakcji statycznej i dynamicznej. Ponieważ składową przyspieszenia kulki równoległą do osi $O\xi$ można pominąć, zatem również składową dynamiczną wyżej wspomnianej reakcji pominiemy w dalszych obliczeniach.

Statyczna składowa tej reakcji jest równa składowej siły ciężkości równoległej do osi $O\xi$ (rys. 8):

$$\mathbf{P} = \mathbf{G}_\zeta = -1_\zeta mg \cos \vartheta. \quad (59)$$

Moment chwilowy tej siły względem punktu O wyniesie:

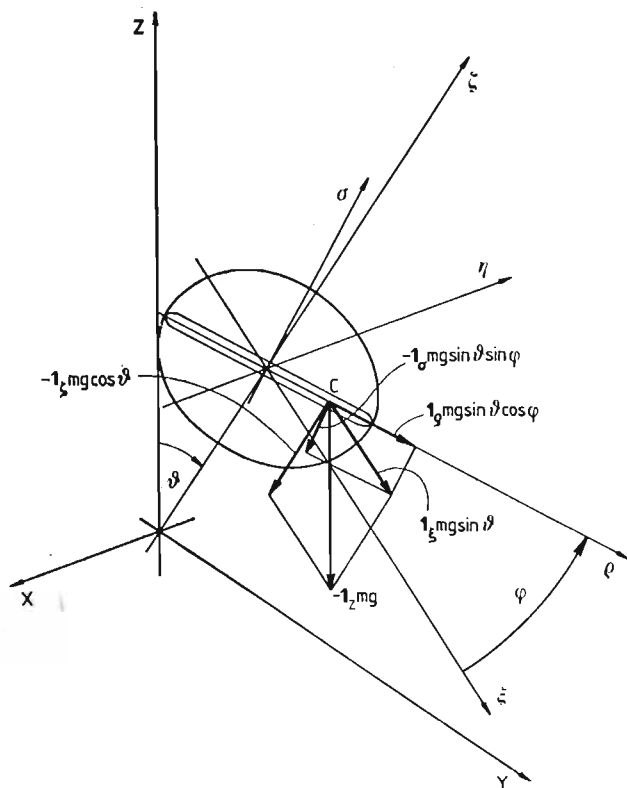
$$\mathbf{M}_0 = \mathbf{r}(t) \times \mathbf{P} \quad (60)$$

a ponieważ $[\mathbf{R}' + \mathbf{h}] \parallel O\xi$ (rys. 3), więc:

$$\mathbf{M}_0(t) = \boldsymbol{\rho}(t) \times \mathbf{P}. \quad (61)$$

Podstawiając (56) i (59) do (61) otrzymamy:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_0(t) &= [\mathbf{1}_\rho S' \delta(t)] \times [-1_\zeta mg \cos \vartheta], \\ \mathbf{M}_0(t) &= \mathbf{1}_\sigma S' \delta(t) mg \cos \vartheta, \end{aligned} \quad (62)$$



Rys. 8

a podstawivszy (55):

$$\mathbf{M}_0(t) = \mathbf{1}_\sigma S' mg A \sin \vartheta A \sin \vartheta \sin(\omega_r t) \quad (63)$$

oraz

$$|\mathbf{M}_0(t)| = \frac{1}{2} S' mg A \sin 2\vartheta \sin(\omega_r t). \quad (64)$$

Aby wyrazić $\mathbf{M}_0(t)$ w układzie nieruchomym, podstawiamy (8) do (63):

$$\mathbf{M}_0(t) = [-\mathbf{1}_\xi \sin(\omega_r t) + \mathbf{1}_\eta \cos(\omega_r t)] \frac{1}{2} S' mg 2 \sin \vartheta \sin(\omega_r t),$$

a po przekształceniu

$$\mathbf{M}_0(t) = -\mathbf{1}_\xi \frac{1}{4} S' mg A \sin 2\vartheta [1 - \cos(2\omega_r t)] + \mathbf{1}_\eta \frac{1}{4} S' mg A \sin 2\vartheta \sin(2\omega_r t) \quad (65)$$

Równanie (65) przedstawia rozkład chwilowego momentu korekcyjnego na sumę momentów względem osi $O'\xi$ i $O'\eta$.

Na rys. 9 przedstawiono przebiegi składowych tych momentów. Z równania (65) Z równania (65) widać, że przebiegi zmienności składowych momentu korekcyjnego mają

okres podstawowy $T/2$, gdzie $T = \frac{2\pi}{\omega_r}$. Wyznaczmy impuls momentu korekcyjnego za jeden okres ($T/2$):

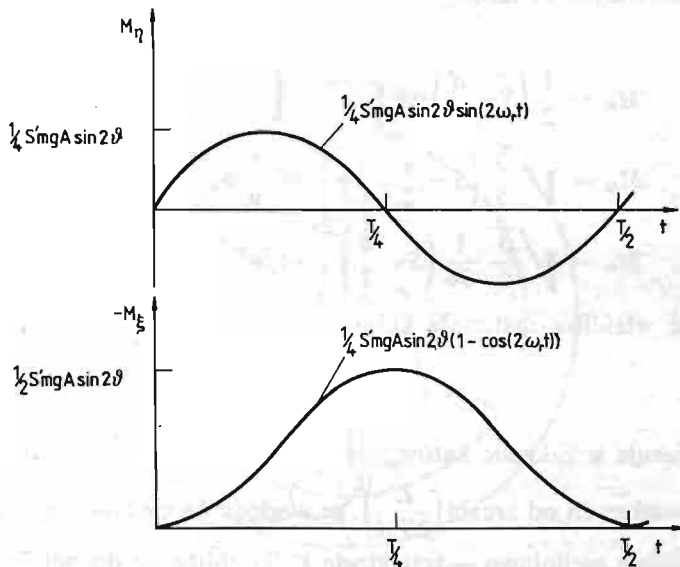
$$\Pi\left(\mathbf{M}_0, \frac{T}{2}\right) = \int_0^{T/2} \mathbf{M}_0(t) dt;$$

analogicznie

$$\Pi_{\xi/\eta}\left(\mathbf{M}_0, \frac{T}{2}\right) = \int_0^{T/2} \mathbf{M}_{\xi/\eta}(t) dt.$$

Impuls całkowity jest sumą składowych:

$$\Pi = \Pi_{\xi} + \Pi_{\eta}.$$



Rys. 9

Składowe impulsy momentu korekcyjnego można wyznaczyć z poniższych związków:

$$\Pi_{\eta} = \int_0^{T/2} \mathbf{1}_{\eta} \left[\frac{1}{4} S'mgA \sin 2\vartheta \sin(2\omega_r t) \right] dt = 0,$$

$$\Pi_{\xi} = \int_0^{T/2} -\mathbf{1}_{\xi} \left[\frac{1}{4} S'mgA \sin 2\vartheta (1 - \cos(2\omega_r t)) \right] dt =$$

$$= -\mathbf{1}_{\xi} \frac{1}{4} S'mgA \sin 2\vartheta \int_0^{T/2} (1 - \cos(2\omega_r t)) dt =$$

$$= -\mathbf{1}_{\xi} \frac{1}{4} S'mgA \sin 2\vartheta \frac{T}{2} = -\mathbf{1}_{\xi} \frac{1}{8} S'mgA \sin 2\vartheta T.$$

Ostatecznie impuls całkowity będzie równy Π_{ξ} :

$$\Pi(M_0, T/2) = -1_{\xi} \frac{1}{8} S' mg A \sin 2\vartheta \cdot T. \quad (66)$$

Załóżmy, że tego samego impulsu udzielałyby stały moment $M_{sr} = -1_{\xi} M_{sr}$ (w tym samym czasie),

$$\Pi = -1_{\xi} M_{sr} \frac{T}{2} = -1_{\xi} \frac{1}{8} S' mg A \sin 2\vartheta \cdot T \Rightarrow M_{sr} = \frac{1}{4} S' mg A \sin 2\vartheta$$

dla niewielkich odchyłeń osi żyroskopu od pionu

$$M_{sr} = \frac{1}{2} S' mg A \vartheta.$$

Powracając do pierwszych oznaczeń (14) i (54) otrzymamy

$$\begin{aligned} M_{sr} &= \frac{1}{2} \left(S - \frac{d}{2} \right) mg \sqrt{\frac{12}{5}} \sqrt{\frac{S - \frac{d}{2}}{g} \frac{mg}{v}} \cdot \vartheta, \\ M_{sr} &= \sqrt{\frac{3}{5}} \left(S - \frac{d}{2} \right)^{3/2} g^{3/2} m^2 \frac{1}{v} \vartheta, \\ M_{sr} &= \sqrt{\frac{3}{5}} \frac{1}{36} \left(S - \frac{d}{2} \right)^{3/2} g^{3/2} \varrho^2 \pi^2 d^6 \frac{1}{v} \vartheta, \end{aligned} \quad (67)$$

gdzie ϱ — gęstość właściwa materiału kulki.

$$0 < \vartheta < \arcsin \frac{L'}{2S'A}.$$

Wzór (67) obowiązuje w zakresie kątów: j.w.

Dla kątów ϑ większych od $\arcsin \left(\frac{L'}{2S'A} \right)$, ze względu na ograniczoną długość prowadnicy, korektor pracuje nieliniowo — trajektoria kulki zbliża się do półokręgu o średnicy L' (rys. 10). Moment korekcyjny wyraża się wtedy wzorem (dla części obwodowej trajektorii)

$$\mathbf{M}_{0_n} = \mathbf{1}_o L' mg \cos \vartheta \quad (M_{0_n} \text{ — moment nasycenia}),$$

a po podstawieniu (8)

$$\mathbf{M}_{0_n} = \mathbf{1}_n \frac{1}{2} L' mg \cos \vartheta \cos \varphi - \mathbf{1}_{\xi} \frac{1}{2} L' mg \cos \nu \sin \varphi. \quad (68)$$

Impuls momentu za pół obrotu zabieraka wyniesie (przy pominięciu impulsu „wytwarzanego” na prostoliniowej części trajektorii):

$$\begin{aligned} \Pi_n &= \int_0^{T/2} \mathbf{M}_{0_n}(t) dt, \quad (\Pi_n \text{ — impuls nasycenia}) \\ \Pi_{\xi/\eta_n} &= \int_0^{T/2} \mathbf{M}_{\xi/\eta_n} dt, \end{aligned}$$

$$\Pi_n = \Pi_{\xi_n} + \Pi_{\eta_n},$$

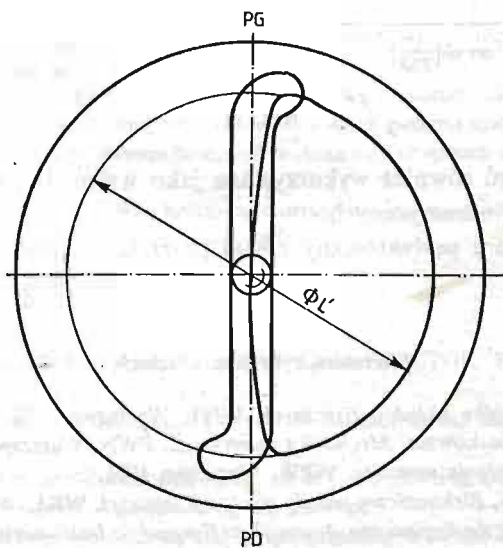
$$\Pi_{\eta_n} = 1_\eta \cdot \frac{1}{2} L' mg \cos \vartheta \int_0^{T/2} \cos(\omega_r t) dt = 0,$$

$$\Pi_{\xi_n} = -1_\xi \cdot \frac{1}{2} L' mg \cos \vartheta \int_0^{T/2} \sin(\omega_r t) dt = -1_\xi \cdot \frac{1}{2} L' mg \cos \vartheta \cdot \frac{T}{\pi},$$

$$\Pi_n = -1_\xi \cdot \frac{1}{2} L' mg \cos \vartheta \cdot \frac{T}{\pi},$$

$$M_{sr_n} = \frac{L'}{\pi} mg \cos \vartheta,$$

gdzie: M_{sr_n} — moment średni nasycenia.



Rys. 10

Ponieważ

$$m = \frac{1}{6} \rho \pi d^3,$$

otrzymamy:

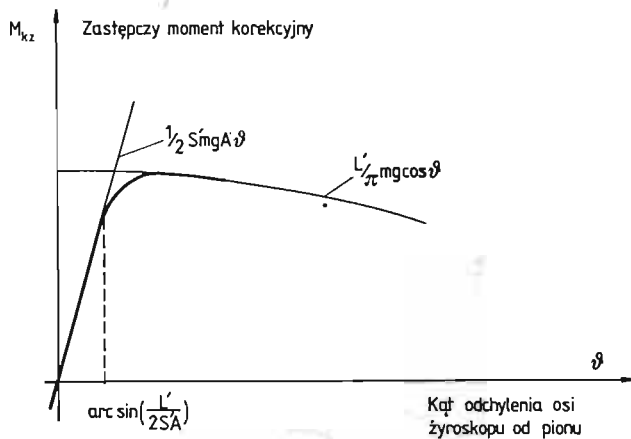
$$M_{sr_n} = \frac{1}{6} \frac{L'}{\pi} \rho \pi d^3 g \cos \vartheta. \quad (69)$$

Charakterystykę momentu średniego korekcyjnego przedstawia rys. 11.

4. Uwagi końcowe

Stworzony w niniejszej pracy model matematyczny korektora oraz jego analiza dająca szczegółowy opis zasady działania tego typu korektora, a nadto zbudowanie funkcji opi-

sującej moment korekcyjny „wytwarzany” przez korektor, w zależności od kąta odchylenia osi żyroskopu od kierunku pionowego i parametrów konstrukcyjnych, wzbogacone o pewne dane doświadczalne, powinny stanowić pomoc przy projektowaniu tego typu



Rys. 11

urządzeń. Mogą one być również wykorzystane jako wstęp do bardziej zaawansowanej analizy lub do obliczeń numerycznych.

Wybór typu korektora podyktowany został potrzebami przemysłu krajowego.

Literatura cytowana w tekście

1. R. H. CANNON, Jr *Dynamika układów fizycznych*, WNT, Warszawa 1973.
2. W. RUBINOWICZ, W. KRÓLIKOWSKI, *Mechanika teoretyczna*, PWN, Warszawa 1980.
3. A. STEFANOWICZ, *Wyposażenie samolotu*, WPW, Warszawa 1981.
4. M. KAYTON, W. R. FRIED, *Elektroniczne układy nawigacji lotniczej*, WKŁ, Warszawa 1976.
5. E. J. SIFF, C. L. EMMERICH, *An Engineering Approach to Gyroscopic Instruments*, Robert Speller and Sons, Publishers, Inc, New York 1960.
6. P. H. SAVET, *Gyroscopes: Theory and Design*, Mc Graw Hill, Bode Co, Inc, New York 1961.
7. J. B. SCARBOROUGH, *The Gyroscope: Theory and Applications* Interscience Publishers, Inc, New York 1958
- 8 P. DEVERGNE, *Horizons Gyroscopiques de conception française en production industrielle* W: Air Techniques, vol. 4, 1963.

Patenty

- P1. Horyzot sztuczny, G01c 15/4 Nr 2425, Polska, 1935.
- P2. Aufrichtvorrichtung für Kreiselhorizonte, 42c 25/50 Nr 863 422, RFN, 1950.
- P3. Kugelaufrichter für Vertikalkreisel, 42 c 25/50 Nr 11466663, RFN, 1958.
- P4. Improvements in Erectors of Gyro-verticals, G61c 19/50 Nr 34086, Anglia, 1965.
- P5. Devices for Reducing the Action of Pendulous Erectors on Gyro-verticals, G01 c 19/54 Nr 34613, Anglia, 1965.
- P6. Aufrichtvorrichtung mit Pendelm für Vertikalkreisel, 42 c 25/50 Nr 1498027, RFN, 1965.
- P7. Gyro Erection System, G01c 19/30, 19/46. Nr 3, 498, 146, USA, 1966.
- P8. A. Device for Suppressing the Erection in Gyro Horizons for Aircraft, G01c 19/54.
- P9. Ustrojstvo korekcji girovertikali, G01 C 19/50, Nr 583372, ZSRR, 1974.

- P10. Dispositif de correction mécanique d'une centrale gyroscopique de verticale, G01 C 19/42.Nr76 26712, Francja, 1976.
- P11. Erecteur de gyroscope de verticale, G01 C 19/50. Nr 78 06250, Francja 1978.
- P12. Korektor gioskopu pionowego, G01 C 19/50. Nr 213824, Polska, 1979.
- P13. Einrichtung zum Aufrichten und Stützen eines Lotkreisels, G01 C 19/50 Nr 28 38 740, RFN, 1978.
- P14. Dispositif pour le redressement et le soutien d'un gyroscope gravitationnel, G01 C 19/50 Nr 79 06176, Francja, 1979.
- P15. Device for Erecting and Stabilizing a Gyro Vertical, G 01 C 19/50 Nr 4, 294, 128, USA, 1979.
- P16. Vorrichtung zum Aufrichten und Stützen eines Lotkreisels, G01 C 19/46 Nr 30 00 265, RFN, 1980.
- P17. Dispositif de redressement et de soutien d'un gyroscope gravitationnel, G01 C 19/46 Nr 8100109, Francja, 1981.

Резюме

ДИНАМИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ МЕХАНИЧЕСКОГО КОРРЕКТОРА ВЕРТИКАЛИ ПО АВИАГОРИЗОНТУ

В статье приводится динамический анализ механического корректора вертикали по авиаторизонту.

Описывается назначение корректора и выполненные им функции. Дана также классификация систем коррекции, предложенная авторами. Основная часть работы посвящена конструкции анализу и подробному рассмотрению математической модели одношарного корректора с прямолинейной направляющей.

Авторы приняли ряд положений, которые считают теоретической основой для разработки систем коррекции с учетом реальных условий работы.

Summary

DYNAMICAL ANALYSIS OF THE MECHANICAL ERECTOR FOR GYRO-VERTICAL

The subject of the paper is a dynamical analysis of the mechanical Erector for Gyro-Vertical (for Artificial Horizon).

The paper informs about application and functions of Gyro-Erecting Devices. It also includes classification of Gyro-Erecting Systems — proposed by the authors.

The main part — covers design, analysis and detailed discussion of the math, model of one ball type Gyro-Erector with straight-line guideway.

Authors have taken into account a number of principles treated as theories in working out solutions to real situations in the work of Erector for Gyro-Vertical.

Praca została złożona w Redakcji dnia 3 grudnia 1982 roku