

DWOISTOŚĆ RÓWNOWAGI W STANACH CZYSTEGO ZGINANIA

TOMASZ SADOWSKI (LUBLIN)

1. Wstęp

Istotnym zagadnieniem z punktu widzenia analizy konstrukcji jest określenie możliwości utraty pożądanego kształtu przez element konstrukcji poddany działaniu obciążeń zewnętrznych. Ta zmiana kształtu może być rozumiana w sensie dosłownym (np. wypukłość powłok, wybaczanie prętów ściskanych itp.), jak również i jako przewężenia powstające w prętach i płaskich próbkach ze stali poddanych rozciąganiu.

Zagadnienie to rozwiązywane jest na gruncie teorii bifurkacji, której podstawy sformułował Hill w końcu lat 1950-tych, a w pracy [1] dokonał syntezy dotychczas uzyskanych wyników.

Wiele prac dotyczy analizy elementów konstrukcyjnych znajdujących się w płaskich stanach naprężeń lub odkształceń. Autorzy pracy [2] rozważają zjawisko bifurkacji powstające w płaskich próbach rozciągania w materiałach sprężystych i sprężysto-plastycznych. W zależności od parametrów charakteryzujących materiał rozdwojenie może wystąpić w dwóch postaciach: 1) w postaci geometrycznej (diffuse mode), gdy punkt bifurkacji wystąpi dla naprężeń niższych od wywołujących maksymalne obciążenie próbki; 2) w postaci zlokalizowanego przewężenia (localized shear mode), gdy materiał próbki traci stateczność. Uzupełnieniem [2] jest opracowanie [3] dotyczące płaskich prób ściskania, gdzie bifurkacja objawia się wygięciem próbki (diffuse mode).

Problemem rozdwojenia w przypadku dwuosiowego stanu rozciągania cienkich próbek metalowych wykonanych z materiału sztywno-plastycznego ze wzmocnieniem zajmowano się w pracy [4]. Autorzy uogólnili deformacyjną teorię plastyczności na zakres dużych odkształceń przy uwzględnieniu hipotezy, że w procesie aktywnego obciążenia na powierzchni płynięcia pojawiają się naroża [5]. Dla przyjętego materiału z potęgowym wzmocnieniem zbudowali oni model hypoelastyczny, przy wykorzystaniu którego określili stan obciążenia charakteryzujący powstanie zlokalizowanego przewężenia w próbce.

W zakresie zagadnień czystego zginania w pracy [6] rozważono możliwość wystąpienia rozdwojenia w oparciu o dwa modele konstytutywne: hypoelastyczny [4] i hyperelastyczny wynikający ze związków nieliniowej sprężystości. Zginana płyta wykonana jest z materiału sprężysto-plastycznego scharakteryzowanego powyżej granicy plastyczności krzywą potęgową. Dla tak przyjętego prawa autor analizuje zjawisko bifurkacji zaznaczając, że już przy niewielkich krzywiznach zgięcia w pewnych obszarach konstrukcji następuje odciążenie, tzn. proces obciążenia konstrukcji nie jest procesem aktywnym.

W niniejszej pracy w odróżnieniu od [6] przyjęto, że materiał sprężysto-plastyczny scharakteryzowany jest liniowym wzmocnieniem, spełniając w ten sposób wymagania aktywnego obciążenia konstrukcji. Rozważania przeprowadzono dla modelu hypoelastycznego, dla którego autorzy [4] dopuszczają alternatywną możliwość wprowadzenia innego prawa wzmocnienia niż potęgowe. Dla tak poczynionych założeń wyznaczono krzywizny krytyczne odpowiadające pojawieniu się pierwszych punktów bifurkacji w zależności od parametrów definiujących przyjęty materiał: modułu Younga, granicy plastyczności i współczynnika liniowego wzmocnienia. W rozważanym przypadku zginania pasma najpierw pojawiają się krótkofalowe powierzchnie rozdwojenia w postaci zamarszczenia się strefy ściskanej. Podobnie do schematu wprowadzonego w [2] podzielono obszar rozważanej konstrukcji na podobszary w zależności od tego, czy równanie podstawowe ma rozwiązanie w zakresie eliptycznym, czy parabolicznym. W przypadku gdy współlistnieją różne podobszary, wykreślono linie charakterystyczne. Uzyskane rezultaty porównano z wynikami pracy [6].

2. Sformułowanie problemu

2.1. Kryterium dwolistości. Załóżmy, że położenie punktu materialnego ciała jest określone przez współrzędne konwekcyjnego układu odniesienia. W konfiguracji początkowej ciało ma objętość V_0 i powierzchnię F_0 , a współrzędne układu konwekcyjnego oznaczmy X^K , jego zaś kontrawariantne tensory metryczne G^{KL} . W konfiguracji aktualnej, w chwili t , współrzędne tegoż układu oznaczmy x^i , tensor metryczny c^{ij} , a objętość i powierzchnię ciała odpowiednio przez V i F .

Zakładamy, że proces deformacji ciała opisany jest parametrem prostego obciążenia lub przemieszczenia λ , którego wartość w szczególnym przypadku zależy od czasu. W chwili przyjętej za początkową na części ciała $F_0^{(T)}$ działają martwe siły powierzchniowe $\bar{T}^L(X, \lambda_0) = \lambda_0 \bar{T}_{(s)}^L(X)$, a na części $F_0^{(U)}$ dane jest pole przemieszczeń $\bar{U}_K(X, \lambda_0) = \lambda_0 \bar{U}_K^{(s)}(X)$. λ_0 oznacza tu początkową wartość prostego parametru obciążenia $\bar{T}_{(s)}^L(X)$ lub przemieszczenia $\bar{U}_K^{(s)}(X)$. Zadane obciążenia i przemieszczenia zewnętrzne na F_0 wywołują w rozważanym ciele stan naprężenia, który w opisie Lagrange'a określamy I lub II tensorem naprężenia Pioli-Kirchhoffa odpowiednio $T^{iK}(\lambda)$, $S^{KL}(\lambda)$, a stan odkształcenia tensorem Greena $E_{KL}(\lambda)$. Przyjmujemy, że w trakcie wzrostu parametru λ od wartości 0 do λ_0 rozwiązanie w naprężeniach i odkształceniach jest jednoznaczne. Oznaczmy je symbolami $\hat{T}^{iK}(\lambda)$, $\hat{S}^{KL}(\lambda)$, $\hat{E}_{KL}(\lambda)$ i nazwiemy rozwiązaniem fundamentalnym.

W zagadnieniu bifurkacji interesuje nas, czy wzrost deformacji jest opisany jednoznacznie. Założymy więc, że parametr λ wzrasta od wartości λ_0 do $\lambda_0 + \lambda dt$. Pociąga to za sobą wzrost rozwiązania fundamentalnego o wielkości $\overset{\circ}{v}_K$, $(\overset{\circ}{T}^L)$, $(\overset{\circ}{S}^{KL})$ i $(\overset{\circ}{E}_{KL})$. Przyjmujemy, że dla rozważanego stanu deformacji i poziomu naprężeń możliwe jest wystąpienie również innego rozwiązania przyrostowego, które nazwiemy bifurkacyjnym i oznaczmy $\hat{\overset{\circ}{v}}_K$, $(\hat{\overset{\circ}{T}}^L)$, $(\hat{\overset{\circ}{S}}^{KL})$ i $(\hat{\overset{\circ}{E}}_{KL})$. Wówczas różnice pomiędzy tymi rozwiązaniami wyrażą się związkami:

$$\begin{cases} \Delta \bar{v}_K = \hat{\bar{v}}_K - \overset{\circ}{\bar{v}}_K \\ \Delta \dot{\bar{T}}^L = (\hat{\bar{T}}^L)^\cdot - (\overset{\circ}{\bar{T}}^L)^\cdot \\ \Delta \dot{\bar{S}}^{KL} = (\hat{\bar{S}}^{KL})^\cdot - (\overset{\circ}{\bar{S}}^{KL})^\cdot \\ \Delta \dot{\bar{E}}_{KL} = (\hat{\bar{E}}_{KL})^\cdot - (\overset{\circ}{\bar{E}}_{KL})^\cdot \end{cases} \quad (2.1)$$

Dla rozważanego przyrostowego problemu brzegowego możemy sformułować zasadę prac przygotowanych w poniższej postaci [1]:

$$\int_{F_0} \Delta \dot{\bar{T}}^L \Delta \bar{V}_L dF = \int_{V_0} (\Delta \dot{\bar{S}}^{KL} \Delta \dot{\bar{E}}_{KL} + \dot{\bar{S}}^{KL} \Delta \bar{V}_{M,K} \Delta \bar{V}_L^M) dV, \quad (2.2)$$

gdzie $\Delta \dot{\bar{E}}_{KL}$ wyraża się:

$$\Delta \dot{\bar{E}}_{KL} = \frac{1}{2} (\Delta \bar{V}_{K,L} + \Delta \bar{V}_{L,K}) + \frac{1}{2} (\bar{U}_{,K}^N \Delta \bar{V}_{N,L} + \bar{U}_{,L}^N \Delta \bar{V}_{N,K}). \quad (2.3)$$

Zasadę (2.2) możemy zapisać posługując się wielkościami odniesionymi do bazy konwekcyjnej w stanie zdeformowanego ciała o powierzchni bocznej F i objętości V . Otrzymujemy wówczas:

$$\int_F \Delta \dot{\bar{T}}^i \Delta v_i dF = \int_V (\Delta i^{ij} \Delta d_{ij} + i^{ij} \Delta v_{n,i} \Delta v_{,j}^n) dV. \quad (2.4)$$

$\dot{\bar{T}}^i$ oraz v_i są odpowiednio przyrostami sił powierzchniowych i prędkością przemieszczeń. i^{ij} jest tensorem naprężeń Kirchhoffa, którego składowe znajdujemy z zależności:

$$i^{ij} = x_{,K}^i x_{,L}^j \dot{\bar{S}}^{KL}, \quad (2.5)$$

ważnej dla ośrodków nieściśliwych. Pochodna konwekcyjna tensora Kirchhoffa związana jest z pochodną II tensora Pioli-Kirchhoffa wzorem:

$$\dot{i}^{ij} = x_{,K}^i x_{,L}^j \dot{\bar{S}}^{KL}, \quad (2.6)$$

a tensor prędkości deformacji d_{ij} z tensorem $\dot{\bar{E}}_{KL}$ zależnością:

$$d_{ij} = X_{,i}^K X_{,j}^L \dot{\bar{E}}_{KL}. \quad (2.7)$$

W związkach (2.5), (2.6) i (2.7) $x_{,K}^i$ oraz $X_{,i}^K$ oznaczają gradienty deformacji.

Jeżeli do (2.4) wprowadzimy związek konstytutywny o ogólnej postaci:

$$i^{ij} = B^{ijkl} d_{kl}, \quad (2.8)$$

gdzie B^{ijkl} charakteryzuje materiał w konfiguracji aktualnej, a

$$d_{ij} = \frac{1}{2} (v_{i,j} + v_{j,i}), \quad (2.9)$$

to otrzymamy funkcjonał:

$$\tilde{F}(\lambda, \Delta v_n) = \int_V (B^{ijkl} \Delta d_{ij} \Delta d_{kl} + i^{ij} \Delta v_{n,i} \Delta v_{,j}^n) dV. \quad (2.10)$$

Funkcjonał ten jest dodatnio określony dla jednoznacznego rozwiązania rozważanego.

przyrostowego problemu brzegowego. Jeśli dla pewnej wartości krytycznej λ_{kr} spełnione zostaną warunki zerowania się funkcjonau \tilde{F} oraz jego pierwszej wariacji:

$$\tilde{F}(\lambda_{kr}, \overline{\Delta v_n}) = 0, \quad (2.11)$$

$$\delta \tilde{F}(\lambda_{kr}, \overline{\Delta v_n}) = 0, \quad (2.12)$$

to rozpatrywane zagadnienie wzrostu deformacji traci jednoznaczność, a tym samym związki (2.11) i (2.12) określają punkt bifurkacji. $\overline{\Delta v_n}$ oznacza tu funkcję własną odpowiadającą λ_{kr} .

2.2. Charakterystyka materiału. Rozważania dotyczą konstrukcji wykonanych z nieściśliwych materiałów plastycznych scharakteryzowanych liniowym wzmocnieniem powyżej granicy plastyczności. Najogólniejsza postać równania konstytutywnego dla ośrodka ciągłego w konfiguracji odkształconej wyraża się związkiem dewiatorowym:

$$(t'^{ij})^{\nabla J} = A^{ijkl} d_{kl}, \quad (2.13)$$

gdzie $(t'^{ij})^{\nabla J}$ jest pochodną Jaumanna dewiatora naprężenia Kirchhoffa. A^{ijkl} jest tensorem charakteryzującym własności materiału w stanie deformacji, który przyjmujemy w następującej postaci [4]:

$$A^{ijkl} = \bar{h} \left[\frac{1}{2} (c^{ik} c^{jl} + c^{jk} c^{il}) - \frac{3}{2} \left(1 - \frac{h}{\bar{h}} \right) \frac{\sigma'^{ij} \sigma'^{kl}}{\sigma_e^2} \right], \quad (2.14)$$

gdzie $h = \frac{2}{3} E_s$, $\bar{h} = \frac{2}{3} E_t$, a σ'^{ij} są składowymi dewiatora naprężenia Cauchyego, natomiast E_s i E_t odpowiednio siecznym i stycznym modułem wzmocnienia, które otrzymujemy z krzywej naprężenie-odkształcenie dla jednoosiowego rozciągania w punkcie określonym zależnością:

$$\sigma_e^2 = \frac{3}{2} (\sigma'_i \sigma'_i), \quad (2.15)$$

gdzie σ'_i są wartościami głównymi dewiatora naprężeń Cauchyego.

Związek konstytutywny możemy przedstawić wzorem równoważnym ze wzorem (2.13), wprowadzając pochodną konwekcyjną tensora naprężeń Kirchhoffa:

$$t'^{ij} = B^{ijkl} d_{kl} + \dot{p} c^{ij}, \quad (2.16)$$

gdzie tensor B^{ijkl} charakteryzuje własności materiału [7]:

$$B^{ijkl} = A^{ijkl} - t'^{kj} c^{il} - t'^{ki} c^{jl}, \quad (2.17)$$

a \dot{p} jest prędkością zmian ciśnienia hydrostatycznego.

Po wprowadzeniu (2.16) do zasady prac przygotowanych (2.4) otrzymujemy funkcjonal o postaci (2.10) przy uwzględnieniu, że dla materiałów nieściśliwych zachodzi:

$$c^{ij} \Delta d_{ij} = \Delta v^i_{,i} = 0. \quad (2.18)$$

Analizowane elementy konstrukcyjne wykonane są z materiałów, które można było opisać jak w [4] uogólnioną na duże odkształcenia deformacyjną teorią plastyczności,

dla której przyjęto w stanie jednoosiowym naprężeń model sprężysto-plastyczny z liniowym wzmocnieniem:

$$\varepsilon_e = \begin{cases} \frac{\sigma_e}{2\mu} & \text{dla } \sigma_e \leq \sigma_y \\ \frac{1}{2\bar{\mu}} \left[\sigma_e - \left(1 - \frac{\bar{\mu}}{\mu} \right) \sigma_y \right] & \text{dla } \sigma_e > \sigma_y \end{cases}, \quad (2.19)$$

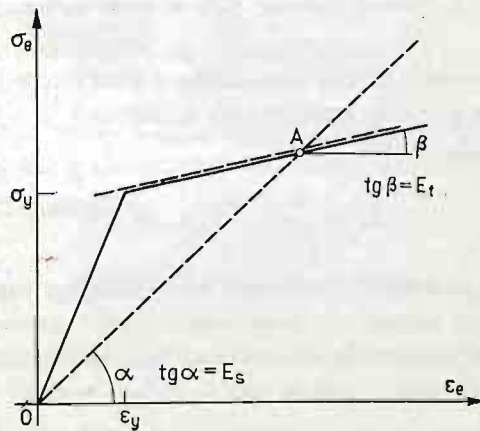
gdzie 2μ jest modułem Younga, $2\bar{\mu}$ modułem stycznym w strefie plastycznej, σ_y — granicą plastyczności. Stąd w prosty sposób otrzymujemy wyrażenia na E_s i E_t :

$$E_s = \begin{cases} 2\mu & \text{dla } \sigma_e \leq \sigma_y \\ 2\bar{\mu} \frac{\sigma_e}{\left[\sigma_e - \left(1 - \frac{\bar{\mu}}{\mu} \right) \sigma_y \right]} & \text{dla } \sigma_e > \sigma_y \end{cases} \quad (2.20)$$

oraz

$$E_t = \begin{cases} 2\mu & \text{dla } \sigma_e \leq \sigma_y \\ 2\bar{\mu} & \text{dla } \sigma_e > \sigma_y \end{cases} \quad (2.21)$$

Na rys. 1 pokazano sposób wyznaczania modułów E_s i E_t .



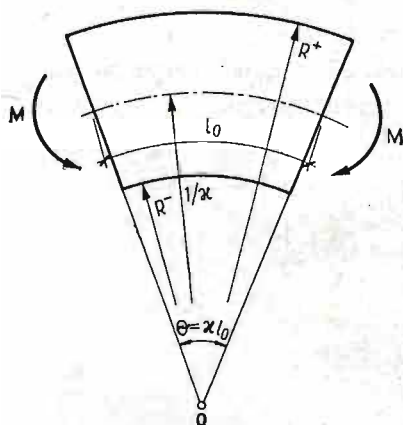
Rys. 1. Wykres naprężenie-odkształcenie pokazujący sposób wyznaczania modułu stycznego E_t i modułu siecznego E_s w punkcie A

3. Stan naprężenia pasma płytowego znajdującego się w warunkach czystego zginania

Możliwe są dwa podejścia do przeprowadzenia analizy stanu deformacji pasma. Pierwsze z nich określa plastyczne deformacje na bazie związków liniowej sprężystości przez wprowadzenie logarytmicznej miary odkształceń. Drugie podejście zaproponowane przez Sawczuka i Mielniczuka [8] oparte zostało na nieliniowej teorii sprężystości dużych deformacji przez uwzględnienie zmian konfiguracji odkształconego pasma. W pracy wykorzystaliśmy pierwszy ze sposobów, a uzyskane wyniki porównamy z otrzymanymi w [8].

Rozważmy w warunkach płaskiego stanu odkształcenia płytę o początkowej długości l_0 i wysokości h_0 wykonaną z materiału nieściśliwego, izotropowego, sprężysto-plastycznego,

poddaną stanowi czystego zginania jak na rys. 2. Deformację analizowanej konstrukcji opisujemy w układzie współrzędnych walcowych, który jest zbieżny w tym przypadku z kierunkami głównymi odkształceń i naprężeń. Wartości główne wzdłuż promienia r oznaczmy indeksem 1, a wzdłuż kierunku θ indeksem 2.



Rys. 2. Przekrój podłużny płyty w stanie deformacji

Niech κ oznacza krzywiznę włókna obojętnego o początkowej długości l_0 . Wówczas wydłużenia w dowolnym punkcie materialnym oddalonym o wielkość r od początku układu współrzędnych będą równe:

$$\lambda_1 = \frac{1}{r\kappa}, \quad \lambda_2 = r\kappa. \quad (3.1)$$

Główne wartości odkształceń wyznaczamy wprowadzając logarytmiczną miarę odkształceń, którą najczęściej stosuje się przy opisie prób i testów metalurgicznych [1], w trakcie których materiał deformuje się w ten sposób, że kierunki główne osadzone są w materiale i deformują się wraz z nim w trakcie całego procesu obciążania [4]:

$$\varepsilon_\alpha = \ln \lambda_\alpha, \quad \alpha = 1, 2. \quad (3.2)$$

Dla materiałów izotropowych nieściśliwych gęstość energii dopełniającej wyraża się zależnością:

$$W_c = \frac{3}{4E_s} \Pi_{\sigma'}, \quad (3.3)$$

gdzie $\Pi_{\sigma'}$ — drugi niezmiennik wartości głównych dewiatora naprężeń Cauchyego. Stąd uzyskujemy równanie konstytutywne:

$$\varepsilon_i = \frac{\partial W_c}{\partial \sigma_i} = \frac{\sigma'_i}{\frac{2}{3} E_s} \quad i = 1, 2, 3. \quad (3.4)$$

σ'_i jest tutaj wartością główną dewiatora naprężeń Cauchyego.

W płaskim stanie odkształcenia $\varepsilon_3 = 0$, stąd z (3.4) otrzymujemy, że:

$$\sigma_3 = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}. \quad (3.5)$$

i wówczas z (2.15) i (3.5) mamy równoważne wyrażenie na σ_e :

$$\sigma_e = \frac{\sqrt{3}}{2} |\sigma_1 - \sigma_2|. \quad (3.6)$$

Dowolny element płyty znajduje się w stanie równowagi, który sprowadza się do równania:

$$\frac{d\sigma_1}{\sigma r} - \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{r} = 0. \quad (3.7)$$

Wprowadzając (3.2), (3.4), (3.5) i (2.15) do (3.7) uzyskujemy:

$$\frac{d(\sigma_1/2\tau_y)}{d(\ln \kappa r)} = \frac{4\mu}{3\tau_y} \ln \kappa r \quad (3.8)$$

dla strefy sprężystej, oraz:

$$\frac{d(\sigma_1/2\tau_y)}{d(\ln \kappa r)} = \frac{4\bar{\mu}}{3\tau_y} \ln \kappa r \pm \left(1 - \frac{\bar{\mu}}{\mu}\right) \quad (3.9)$$

dla strefy plastycznej. Znak minus w (3.9) obowiązuje dla strefy ściskanej, znak plus zaś dla strefy rozciąganej. τ_y jest granicą plastyczności przy czystym ścinaniu.

Po scałkowaniu (3.8) dostajemy:

$$\frac{\sigma_1}{2\tau_y} = \frac{2\mu}{3\tau_y} (\ln \kappa r)^2 + c \quad \text{dla} \quad |\ln \kappa r| \leq \frac{3\tau_y}{4\mu} \quad (3.10)$$

dla obszaru sprężystego, natomiast po scałkowaniu (3.9) otrzymujemy:

$$\frac{\sigma_1}{2\tau_y} = \frac{2\bar{\mu}}{3\tau_y} (\ln \kappa r)^2 \pm \left(1 - \frac{\bar{\mu}}{\mu}\right) \ln \kappa r + d \quad \text{dla} \quad |\ln \kappa r| \geq \frac{3\tau_y}{4\mu} \quad (3.11)$$

Zależność (3.11) dotyczy plastycznego obszaru konstrukcji. Stałe całkowe c i d w powyższych wzorach znajdujemy z warunków brzegowych.

Oznaczmy promienie włókien zewnętrznych przez R^+ i R^- (rys. 2). Z warunku ciągłości naprężeń σ_1 oraz ich zanikania na powierzchniach nieobciążonych mamy:

$$\kappa R^+ = \frac{1}{\kappa R^-}. \quad (3.12)$$

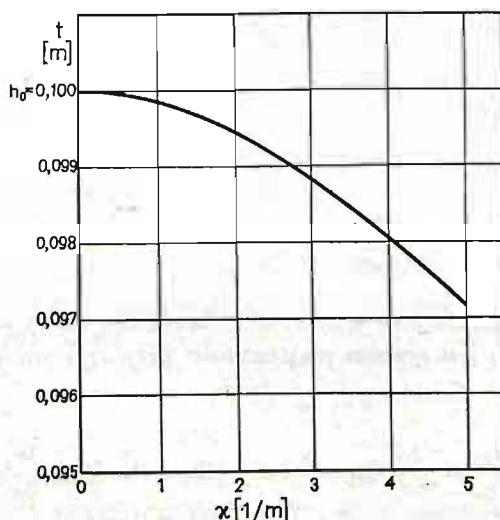
Z warunku nieściśliwości materiału uzyskujemy drugą zależność pomiędzy R^+ i R^- :

$$(R^+)^2 - (R^-)^2 = \frac{2h_0}{\kappa}. \quad (3.13)$$

Dwa równania (3.12) i (3.13) po rozwiązaniu dają wzory do wyznaczania promieni włókien zewnętrznych:

$$\begin{aligned} R^+ &= \frac{1}{\kappa} \{ \kappa h_0 + [(\kappa h_0)^2 + 1]^{1/2} \}^{1/2}, \\ R^- &= \frac{1}{\kappa} \{ [(\kappa h_0)^2 + 1]^{1/2} - \kappa h_0 \}^{1/2}. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Umożliwiają one sporządzenie wykresu zmian grubości w zależności od stanu deformacji (rys. 3). Przyjęto, że początkowa grubość płyty wynosi 10 cm. Podobne zagadnienie zginanego pasma płytowego wykonanego z tworzywa hipersprężysto-plastycznego, ale przy zastosowaniu drugiego sposobu podejścia rozważano w [8]. Autorzy uzyskali zbliżone zmiany grubości pasma.



Rys. 3. Zmiany grubości pasma w ciągu procesu zginania

Znając wartości R^+ i R^- dla dowolnego κ możemy wyznaczyć stałe całkowe c i d , określając w ten sposób pole naprężeń występujące w stanie obciążenia konstrukcji. Zależy ono od zmiennej krzywizny κ , stałych charakteryzujących materiał konstrukcji, tzn. μ , $\bar{\mu}$, σ_y , oraz od początkowej wysokości h_0 :

$$\left\{ \begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{4\mu}{3} [\ln \kappa r]^2 - \frac{4\bar{\mu}}{3} [\ln \kappa R^+]^2 + \\ &\quad + 2\tau_y \left(1 - \frac{\bar{\mu}}{\mu} \right) \left(\frac{3\tau_y}{4\mu} - \ln \kappa R^+ \right), \\ \sigma_2 &= \frac{4\mu}{3} [\ln \kappa r]^2 - \frac{4\bar{\mu}}{3} [\ln \kappa R^+]^2 + \frac{8}{3} \mu \ln \kappa r + \\ &\quad + 2\tau_y \left(1 - \frac{\bar{\mu}}{\mu} \right) \left(\frac{3\tau_y}{4\mu} - \ln \kappa R^+ \right) \end{aligned} \right. \quad (3.15a)$$

dla

$$\frac{3\tau_y}{4\mu} \geq \ln \kappa r \geq 0 \quad \text{strefa rozciągana,}$$

$$0 \geq \ln \kappa r \geq -\frac{3\tau_y}{4\mu} \quad \text{strefa ściskana}$$

oraz

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_1 = \frac{4\bar{\mu}}{3} [(\ln \kappa r)^2 - (\ln \kappa R^+)^2] + \\ \quad + 2\tau_y \left(1 - \frac{\bar{\mu}}{\mu}\right) [\pm \ln \kappa r - \ln \kappa R^+], \\ \sigma_2 = \frac{4\bar{\mu}}{3} [(\ln \kappa r)^2 - (\ln \kappa R^-)^2] + \\ \quad + 2\tau_y \left\{ \left[\pm \left(1 - \frac{\bar{\mu}}{\mu}\right) + \frac{4}{3} \frac{\bar{\mu}}{\tau_y} \right] \ln \kappa r + \left(1 - \frac{\bar{\mu}}{\mu}\right) [\pm 1 - \ln \kappa R^+] \right\} \end{array} \right. \quad (3.15b)$$

dla

$$\ln \kappa R^+ \geq \ln \kappa r \geq \frac{3\tau_y}{4\mu} \quad \text{strefa rozciągana,}$$

$$-\frac{3\tau_y}{4\mu} \geq \ln \kappa r \geq \ln \kappa R^- \quad \text{strefa ściskana.}$$

Zależności (3.15a) odnoszą się do obszaru sprężystego, natomiast (3.15b) do obszaru plastycznego. Kilka przykładowych wykresów naprężeń sporządzono w pracy [9].

W uzyskanym rozwiązaniu warunków plastycznego obciążenia wyraża się wzorem:

$$\frac{\sqrt{3}}{2} |\sigma_1 - \sigma_2| = \frac{4\sqrt{3}\mu}{3} \|\ln \kappa r\| \geq \sigma_y, \quad (3.16)$$

bowiem rozważania obejmują materiał sprężysto-plastyczny. W monografii [10] podano ogólną teorię zginanego pasma płytowego wykonanego z materiału idealnie plastycznego. dla którego odpowiednikiem (3.16) jest:

$$\frac{\sqrt{3}}{2} |\sigma_1 - \sigma_2| = \sigma_y. \quad (3.17)$$

Stąd po uwzględnieniu (3.17) w warunku równowagi (3.7) uzyskano wyrażenia na σ_1 i σ_2 , które nie zależą od κ i są funkcjami $\ln r$ w pierwszej potędze.

Warto zwrócić uwagę na fakt, że w rozważanym zagadnieniu położenie osi obojętnej określamy jako średnią arytmetyczną promieni włókien skrajnych R^+ i R^- , natomiast w analizie Sawczuka i Mielniczuka [8] oś obojętnej nie pokrywa się z osią symetrii pasma, a przesunięta jest nieco ku środkowi krzywizny. Oprócz osi obojętnej możemy wyróżnić jeszcze jedno włókno scharakteryzowane zerowaniem się intensywności naprężeń σ_e . Jest ono poddane wszechstronnemu równomiernemu ściskaniu, a promień jego wyznaczamy z zależności $\rho = \sqrt{R^+ R^-}$. Włókno to w stosunku do osi obojętnej przesunięte jest nieco ku środkowi krzywizny.

4. Analiza bifurkacji

4.1. Sformułowanie podstawowych zależności. W interesującym nas zagadnieniu czystego zginania parametrem λ , wraz z którym narastają obciążenia będzie krzywizna włókna obojętnego κ . Wówczas dla płaskiego stanu odkształceń w krzywoliniowym układzie odniesienia funkcjonał (2.10) przyjmuje postać:

$$\tilde{F}(\kappa, \Delta v_i) \equiv \int_0^{\kappa_0} \int_{R^-}^{R^+} (B^{\alpha\beta\gamma\delta} \Delta d_{\alpha\beta} \Delta d_{\gamma\delta} + i^{\alpha\beta} \Delta v_{n,\alpha} \Delta v_{n,\beta}^n) r dr d\theta. \quad (4.1)$$

Występujące w (4.1) wielkości są składowymi fizycznymi tensorów. Składowe fizyczne $\Delta v_{i,j}$ we współrzędnych walcowych są następujące:

$$\begin{cases} \Delta v_{1,1} = \frac{\partial \Delta v_1}{\partial r}; & \Delta v_{1,2} = \frac{1}{r} \frac{\partial \Delta v_1}{\partial \theta} - \frac{\Delta v_2}{r}; \\ \Delta v_{2,1} = \frac{\partial \Delta v_2}{\partial r}; & \Delta v_{2,2} = \frac{1}{r} \frac{\partial \Delta v_2}{\partial \theta} + \frac{\Delta v_1}{r}. \end{cases} \quad (4.2)$$

Dla materiałów nieściśliwych spełniony jest warunek:

$$\frac{\partial}{\partial r} (r \Delta v_1) + \frac{\partial \Delta v_2}{\partial \theta} = 0. \quad (4.3)$$

Zakładamy, że istnieje potencjał, który określa prędkości na podstawie następujących zależności:

$$\Delta v_1 = -\frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial \theta}; \quad \Delta v_2 = \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial r}. \quad (4.4)$$

Przez wprowadzenie potencjału upraszczamy rozwiązanie zagadnienia, bowiem w funkcjonał (4.1) wystąpi jedna nieznaną funkcją $\tilde{\Phi}$.

Składowe tensora $B^{\alpha\beta\gamma\delta}$ wyznaczmy posługując się (2.17), (2.14), (2.20) i (2.21):

$$\begin{cases} B^{1111} = \frac{\bar{h}}{2} \left(1 + \frac{h}{\bar{h}}\right) - 2\sigma_1; \\ B^{2222} = \frac{\bar{h}}{2} \left(1 + \frac{h}{\bar{h}}\right) - 2\sigma_2; \\ B^{1122} = B^{2211} = \frac{\bar{h}}{2} \left(1 - \frac{h}{\bar{h}}\right); \\ B^{1212} = B^{2112} = B^{1221} = B^{2121} = \frac{\bar{h}}{2} - \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}. \end{cases} \quad (4.5)$$

Po wprowadzeniu (4.2), (4.4), (4.5) do funkcjonału bifurkacji (4.1) otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \tilde{F}(\kappa, \tilde{\Phi}) = & \int_0^{\kappa_0} \int_{R^-}^{R^+} \left[(2h - \sigma_1 - \sigma_2) \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \tilde{\Phi}}{\partial r \partial \theta} \right)^2 + \right. \\ & + \frac{1}{2} (\bar{h} - \sigma_1 - \sigma_2) \left(-\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \tilde{\Phi}}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \tilde{\Phi}}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial r} \right)^2 + \\ & \left. + \sigma_1 \left(\frac{\partial^2 \tilde{\Phi}}{\partial r^2} \right)^2 + \sigma_2 \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \tilde{\Phi}}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial r} \right)^2 \right] r dr d\theta. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Zagadnienie pojawiania się bifurkacji rozwiążemy dla warunków brzegowych, gdy moment względem włókna obojętnego na obu końcach płyty kontrolowany jest w ciągu procesu deformacji. Odpowiada to następującym warunkom brzegowym:

$$\Delta \dot{T}^\alpha = 0 \quad \text{dla} \quad \theta = 0, \kappa l_0; \quad \alpha = 1, 2 \quad (4.7)$$

gdzie \dot{T}^α oznacza wzrost fizycznych składowych wektorów sił powierzchniowych. Ponadto, ponieważ pozostałe powierzchnie wyznaczone promieniami R^- i R^+ są wolne od obciążeń, zatem:

$$\Delta \dot{T}^\alpha = 0 \quad \text{dla} \quad r = R^-, R^+; \quad \alpha = 1, 2. \quad (4.8)$$

Dla wyróżnionych warunków brzegowych dowolny potencjał $\tilde{\Phi}$ można przedstawić w najogólniejszej postaci za pomocą rozwinięcia w szeregi trygonometryczne Fouriera, co umożliwi oddzielne rozpatrywanie powierzchni niestabilności scharakteryzowanych dowolną wartością n :

$$\tilde{\Phi}(r, \theta) = \Phi_{c0}(r) + \sum \left[\tilde{\Phi}_{cn}(r) \cos\left(\frac{2\pi n\theta}{\kappa l_0}\right) + \tilde{\Phi}_{sn}(r) \sin\left(\frac{2\pi n\theta}{\kappa l_0}\right) \right] \quad (4.9)$$

dla $n = 1, 2, 3 \dots$, a $\tilde{\Phi}_{cn}(r)$, $\tilde{\Phi}_{sn}(r)$ są ciągłymi różniczkowalnymi funkcjami r . Jeśli (4.9) wprowadzimy do funkcjonału (4.6) i scałkujemy względem θ , to $\tilde{F}(n, \Phi)$ możemy zapisać w postaci:

$$\tilde{F}(n, \tilde{\Phi}) = \tilde{F}_0(n, \Phi_{c0}) + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} [\tilde{F}_n(n, \Phi_{sn}) + \tilde{F}_n(n, \Phi_{cn})], \quad (4.10)$$

gdzie \tilde{F}_n dane jest zależnością:

$$\begin{aligned} \tilde{F}_n(n, \Phi) = & \int_{R^-}^{R^+} \left\{ (2h - \sigma_1 - \sigma_2) \left[\frac{2\pi n}{\kappa l_0} \frac{\Phi}{r^2} - \frac{2\pi n}{\kappa l_0} \frac{1}{r} \frac{d\Phi}{dr} \right]^2 + \right. \\ & + \frac{1}{2} (\bar{h} - \sigma_1 - \sigma_2) \left[\left(\frac{2\pi n}{\kappa l_0} \right)^2 \frac{\Phi}{r^2} + \frac{d^2\Phi}{dr^2} - \frac{1}{r} \frac{d\Phi}{dr} \right]^2 + \\ & \left. + \sigma_1 \left(\frac{d^2\Phi}{dr^2} \right)^2 + \sigma_2 \left[\left(\frac{2\pi n}{\kappa l_0} \right)^2 \frac{\Phi}{r^2} - \frac{1}{r} \frac{d\Phi}{dr} \right]^2 \right\} r dr \\ & n = 1, 2, 3 \dots \end{aligned} \quad (4.11)$$

Poszukiwana krzywizna krytyczna pierwszego punktu rozdwojenia dana jest przez najmniejszą wartość własną każdego z funkcjonałów \tilde{F}_n , dla wszystkich wartości n . Odpowiadająca moda własna wyrażona jest przez $\Phi(r) \cos(2\pi n\theta/\kappa l_0)$ lub $\Phi(r) \sin(2\pi n\theta/\kappa l_0)$.

4.2. Określenie obszarów rozwiązania równania różniczkowego. W podobny sposób jak w [2] przeprowadzimy klasyfikację obszarów rozwiązania równania bifurkacji, dla materiałów opisanych związkiem konstytutywnym (2.13). Rozdwojenie nastąpi, gdy zostaną spełnione dwa warunki:

$$\tilde{F}(\kappa_{kr}, \tilde{\Phi}) = 0, \quad (4.12)$$

$$\delta \tilde{F}(\kappa_{kr}, \tilde{\Phi}) = 0. \quad (4.13)$$

W przypadku niejednorodnego przedbifurkacyjnego pola naprężeń wykorzystanie warunku (4.13) przy uwzględnieniu (4.6) prowadzi do równania Eulera:

$$(\bar{h} + \sigma_1 - \sigma_2) \frac{\partial^4 \tilde{\Phi}}{\partial r^4} + 2(2h - \bar{h}) \frac{1}{r^2} \frac{\partial^4 \tilde{\Phi}}{\partial r^2 \partial \theta^2} + (\bar{h} - \sigma_1 + \sigma_2) \frac{1}{r^4} \frac{\partial^4 \tilde{\Phi}}{\partial \theta^4} + Q[\tilde{\Phi}] = 0 \quad (4.14)$$

(4.14) jest liniowym cząstkowym równaniem różniczkowym czwartego rzędu względem potencjału $\tilde{\Phi}(r, \theta)$. $Q[\tilde{\Phi}]$ stanowi tu operator różniczkowy trzeciego rzędu, którego nie będziemy wyszczególniali. Wprowadzając charakterystyki postaci $\varphi(r, \theta) = c$ możemy dla (4.14) napisać równanie charakterystyczne:

$$(\bar{h} + \sigma_1 - \sigma_2) \frac{\partial^4 \varphi}{\partial r^4} + 2(2h - \bar{h}) \frac{1}{r^2} \frac{\partial^4 \varphi}{\partial r^2 \partial \theta^2} + (\bar{h} - \sigma_1 + \sigma_2) \frac{1}{r^4} \frac{\partial^4 \varphi}{\partial \theta^4} = 0. \quad (4.15)$$

Jeśli przejdziemy z postaci uwikłanej charakterystyki $\varphi(r, \theta) = 0$ do postaci jawnej $\theta = f(r)$, to pochodną tej funkcji możemy wyrazić:

$$\theta' = -\frac{r d\theta}{dr}, \quad (4.16)$$

i wówczas otrzymujemy równanie charakterystyczne (4.15) w formie:

$$(\bar{h} + \sigma_1 - \sigma_2)(\theta')^4 + 2(2h - \bar{h})(\theta')^2 + (\bar{h} - \sigma_1 + \sigma_2) = 0. \quad (4.17)$$

Gdy (4.17) ma pierwiastki rzeczywiste, możemy zbudować potencjał $\tilde{\Phi}$, który spełnia (4.14) i ma ciągle pochodne drugiego rzędu wzdłuż charakterystyk. Klasyfikację obszarów rozwiązania równania różniczkowego (4.14) dokonamy wprowadzając określenia stosowane w analizie układów równań cząstkowych. Mianowicie punkt pasma płytowego znajduje się w obszarze eliptycznym, jeżeli (4.17) nie ma pierwiastków rzeczywistych. Jeżeli (4.17) ma dwa lub cztery pierwiastki rzeczywiste, to rozważany punkt znajduje się odpowiednio w obszarze parabolicznym lub hiperbolicznym.

W przypadku materiału sprężysto-plastycznego z liniowym wzmocnieniem występują tylko dwa obszary w płycie: eliptyczny i paraboliczny, podczas gdy dla materiału scharakteryzowanego krzywą potęgową wystąpił również i obszar hiperboliczny [6].

Obszar eliptyczny. Równanie (4.17) nie ma pierwiastków rzeczywistych, co równoważne jest warunkami:

$$-2(2h - \bar{h}) \pm \sqrt{\Delta} < 0 \quad (4.18)$$

lub w szczegółowej postaci:

$$\begin{aligned} & -\frac{\sqrt{3}}{2} |\sigma_1 - \sigma_2| + 2\sigma_y \left(1 - \frac{\bar{\mu}}{\mu}\right) \pm \\ & \pm \sqrt{\left[-\frac{\sqrt{3}}{2} |\sigma_1 - \sigma_2| + 2\sigma_y \left(1 - \frac{\bar{\mu}}{\mu}\right)\right]^2 - \frac{3}{4} (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + \frac{9}{4} \left[\frac{\sqrt{3}}{2} |\sigma_1 - \sigma_2| - \right.} \\ & \left. - \left(1 - \frac{\bar{\mu}}{\mu}\right) \sigma_y\right]^2 \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2\bar{\mu}}\right)^2} < 0. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Dla materiału o charakterystykach $\bar{\mu} = 0,1 \mu = 1,05 \cdot 10^4 \text{ MN/m}^2$ i $\sigma_y = 4,2 \cdot 10^2 \text{ MN/m}^2$ obszar eliptyczny zawiera się w granicach:

$$|\ln \kappa r| < 0,5. \quad (4.20)$$

Obszar paraboliczny. Równanie (4.17) ma dwa pierwiastki rzeczywiste gdy:

$$\begin{aligned}
 & -\frac{\sqrt{3}}{2}|\sigma_1 - \sigma_2| + 2\sigma_y \left(1 - \frac{\bar{\mu}}{\mu}\right) + \\
 & \pm \sqrt{\left[-\frac{\sqrt{3}}{2}|\sigma_1 - \sigma_2| + 2\sigma_y \left(1 - \frac{\bar{\mu}}{\mu}\right)\right]^2 - \frac{3}{4}(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + \frac{9}{4}\left[\frac{\sqrt{3}}{2}|\sigma_1 - \sigma_2| - \right.} \\
 & \left. - \left(1 - \frac{\bar{\mu}}{\mu}\right)\sigma_y\right]^2 \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2\bar{\mu}}\right)^2} = \begin{cases} > 0 & \text{strefa ściskana} \\ < 0 & \text{strefa rozciągana.} \end{cases}
 \end{aligned} \quad (4.21)$$

We wzorach (4.19) i (4.21) znak plus dotyczy strefy ściskanej, minus strefy rozciąganej.

Dla materiału o charakterystykach $\bar{\mu} = 0,1$, $\mu = 1,05 \cdot 10^4$ MN/m² i $\sigma_y = 4,2 \cdot 10^2$ MN/m² możemy określić obszar paraboliczny:

$$|\ln \kappa r| > 0,5. \quad (4.22)$$

4.3. Charakterystyki równania różniczkowego bifurkacji. Równania charakterystyk dla (4.17) są następujące:

$$\theta' = \pm \sqrt{\frac{\bar{h} - 2h \pm \sqrt{(\bar{h} - 2h)^2 - (\bar{h})^2 + (\sigma_2 - \sigma_1)^2}}{\bar{h} - (\sigma_2 - \sigma_1)}} \quad (4.23)$$

Stąd dla przyjętego materiału otrzymujemy:

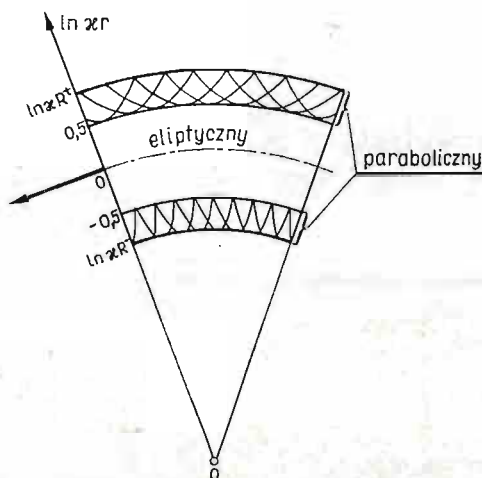
$$\begin{aligned}
 \theta = \pm \int \sqrt{\frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}|\sigma_1 - \sigma_2| + 2\sigma_y \left(1 - \frac{\bar{\mu}}{\mu}\right) \pm \sqrt{\left[-\frac{\sqrt{3}}{2}|\sigma_1 - \sigma_2| + 2\sigma_y \left(1 - \frac{\bar{\mu}}{\mu}\right)\right]^2 + \frac{9}{4}(\sigma_1 - \sigma_2)^2 - \frac{9}{4}\left[\frac{\sqrt{3}}{2}|\sigma_1 - \sigma_2| - \left(1 - \frac{\bar{\mu}}{\mu}\right)\sigma_y\right]^2 \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2\bar{\mu}}\right)^2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}|\sigma_1 - \sigma_2| - \frac{1}{2\bar{\mu}}\left[\frac{\sqrt{3}}{2}|\sigma_1 - \sigma_2| - \left(1 - \frac{\bar{\mu}}{\mu}\right)\sigma_y\right] \frac{3}{2}(\sigma_2 - \sigma_1)}}} \\
 - \frac{3}{4}(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + \frac{9}{4}\left[\frac{\sqrt{3}}{2}|\sigma_1 - \sigma_2| - \left(1 - \frac{\bar{\mu}}{\mu}\right)\sigma_y\right]^2 \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2\bar{\mu}}\right)^2} \quad \text{dln} \kappa r
 \end{aligned} \quad (4.24)$$

W przypadku materiału $\bar{\mu} = 0,1$, $\mu = 1,05 \cdot 10^4$ MN/m² i granicy plastyczności $\sigma_y = 4,2 \cdot 10^2$ MN/m² naszkicowano na rys. 4 kilka reprezentatywnych charakterystyk. Są one w strefie rozciąganej styczne do granicy $E-P$, natomiast w strefie ściskanej prostopadle.

W przykładzie podanym w pracy [6] płyta podzielona została na trzy podobszary, przy czym obszar hiperboliczny występuje między parabolicznym i eliptycznym. Charakterystyki w strefie rozciąganej są prostopadle do granicy $H-E$, natomiast w strefie ściskanej styczne.

Podstawową własnością charakterystyk w omawianym zagadnieniu jest ich występowanie po osiągnięciu pierwszego punktu bifurkacji. To stwierdzenie można wyrazić następująco: jeżeli w pewnym stanie deformacji określonym przez krzywiznę κ , część ciała znajduje się w obszarze parabolicznym, wtedy istnieje przynajmniej jeden punkt rozdwojenia dla $\kappa_{kr} \leq \kappa$. Zostało ono dowiedzione w [6]. Podobne stwierdzenie podano i udowodniono w pracy [11] dla przypadku jednorodnego przedbifurkacyjnego pola naprężeń.

Autorzy pracy [2] badając zjawisko rozdzielenia w płaskich próbach rozciągania użytkali w przypadku postaci geometrycznej (diffuse mode), podobnie jak w niniejszej pracy podział obszaru rozwiązania podstawowego równania bifurkacji na dwie części: eliptyczną i paraboliczną. W analizowanym przez nich przypadku bifurkacja jest możliwa, gdy przechodzimy z obszaru eliptycznego do parabolicznego, a granica między tymi obszarami jest miejscem akumulacji punktów wartości własnych.



Rys. 4. Krzywe charakterystyczne oraz obszary rozwiązania równania różniczkowego

4.4. Krótkofalowe powierzchnie niestabilności. Jak stwierdzono w paragrafie 4.1 moda własna wyrażona jest w formie $\Phi(r)\cos(2\pi n\theta/\kappa l_0)$ lub $\Phi(r)\sin(2\pi n\theta/\kappa l_0)$. Dla krótkich długości fal, tzn. $n \rightarrow \infty$, krzywiznę krytyczną κ_{kr} , jak również i asymptotyczną formę mody własnej można wyrazić analitycznie.

Wariacyjna forma równania bifurkacji odpowiadająca parametrowi n jest postaci $\delta\tilde{F}_n = 0$, gdzie \tilde{F}_n dane jest przez (4.11). Stosując podstawienie $x = \ln \kappa r$ otrzymujemy następujące równanie Eulera:

$$\begin{aligned}
 & [n^4(\bar{h} - \sigma_1 + \sigma_2) + 0(n^2)]\Phi + 0(n^2)\frac{d\Phi}{dx} + [2n^2(\bar{h} - 2h) + \\
 & + 0(1)]\frac{d^2\Phi}{dx^2} + 0(1)\frac{d^3\Phi}{dx^3} + [\bar{h} + \sigma_1 - \sigma_2]\frac{d^4\Phi}{dx^4} = 0,
 \end{aligned} \tag{4.25}$$

wraz z warunkami brzegowymi:

$$\left\{ \begin{aligned}
 & [n^2(\bar{h} - \sigma_1 - \sigma_2)]\Phi + 0(1)\frac{d\Phi}{dx} + (\bar{h} + \sigma_1 - \sigma_2)\frac{d^2\Phi}{dx^2} = 0, \\
 & 0(n^2)\Phi + [n^2(-4h + \bar{h} + \sigma_1 + \sigma_2) + 0(1)]\frac{d\Phi}{dx} + \\
 & + 0(1)\frac{d^2\Phi}{dx^2} + [\bar{h} + \sigma_1 - \sigma_2]\frac{d^3\Phi}{dx^3} = 0,
 \end{aligned} \right. \tag{4.26}$$

dla $x = x^+ = \ln \kappa R^+$ i $x = x^- = \ln \kappa R^-$.

Dla dużych wartości n $\Phi(x)$ przyjmuje asymptotyczną reprezentację:

$$\Phi(x) = A \exp[n^j f_j(x) + \dots + n f_1(x) + f_0(x) + n^{-1} f_{-1}(x) + \dots]. \quad (4.27)$$

Z równania Eulera i warunków brzegowych grupując wyrażenia z tymi samymi potęgami n dochodzimy do wniosku, że dla $j > 1$ $f_j(x) = 0$, natomiast dla $j = 1$ $f_1(x)$ spełnia:

$$(\bar{h} - \sigma_1 + \sigma_2) + 2(\bar{h} - 2h) \left(\frac{df_1}{dx} \right)^2 + (\bar{h} + \sigma_1 - \sigma_2) \left(\frac{df_1}{dx} \right)^4 = 0. \quad (4.28)$$

Rozwiązanie równania (4.25) spełniające warunki brzegowe (4.26) można przedstawić dla dużych wartości n następująco:

$$\Phi(x) = A \exp[n f_{1a}(x)] + B \exp[n f_{1b}(x)], \quad (4.29)$$

gdzie $f_{1a}(x)$ i $f_{1b}(x)$ są dwoma rozwiązaniami (4.28). W rozważanym zagadnieniu funkcja $\Phi(x)$ musi być jednoznacznie ograniczona dla wszystkich wartości n . Pociąga to za sobą spełnienie warunku $\text{Re}[f_1(x)] < 0$. Gdy całe pasmo płytowe znajduje się w obszarze eliptycznym, nie mamy pierwiastków rzeczywistych i rozwiązania (4.28) czynią wówczas zadość:

$$\text{Re} \left[\frac{df_1}{dx} \right] < 0. \quad (4.30)$$

Do dalszych rozważań wprowadzimy skrócony zapis:

$$\frac{df_{1a}(x^-)}{dx} = \varrho_a; \quad \frac{df_{1b}(x^-)}{dx} = \varrho_b. \quad (4.31)$$

Z warunków brzegowych (4.26) dla $x = x^-$, uwzględniając (4.29) i (4.31), otrzymujemy:

$$(1 + \varrho_a^2)A + (1 + \varrho_b^2)B = 0, \quad (4.32)$$

$$[(\bar{h} - 4h + \sigma_2)\varrho_a + (\bar{h} - \sigma_2)\varrho_a^3]A + [(\bar{h} - 4h + \sigma_2)\varrho_b + (\bar{h} - \sigma_2)\varrho_b^3]B = 0.$$

Zerowanie się wyznacznika podstawowego układu (4.32) zapewnia istnienie rozwiązań niezerowych:

$$(\bar{h} - 4h + \sigma_2)(1 - \varrho_a \varrho_b) + (h - \sigma_2)(\varrho_a^2 + \varrho_b^2 + \varrho_a \varrho_b + \varrho_a^2 \varrho_b^2) = 0. \quad (4.33)$$

Z równania (4.28) przy oznaczeniach ϱ_a i ϱ_b dostajemy zależność:

$$\varrho_a \varrho_b = \sqrt{\frac{\bar{h} + \sigma_2}{h - \sigma_2}}, \quad \varrho_a^2 + \varrho_b^2 = \frac{2(2h - \bar{h})}{\bar{h} - \sigma_2}, \quad (4.34)$$

które w połączeniu z (4.33) umożliwia sformułowanie zależności:

$$\sqrt{\frac{\bar{h} - \sigma_2}{\bar{h} + \sigma_2}} = 1 - \frac{2h}{\sigma_2} \quad \text{dla} \quad r = R^- \quad (4.35)$$

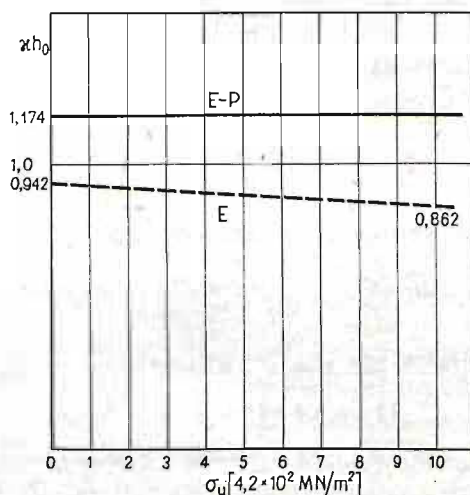
Warunki brzegowe (4.26) na końcu $x = x^+$ są również asymptotycznie spełnione, ponieważ $\text{Re}[f_1(x)] < 0$, a więc dla dużych wartości n $\Phi(x)$ i jego pochodne dążą do zera, zanikając w wąskiej strefie w pobliżu $x = x^-$.

Identyczne rozważania możemy przeprowadzić dla brzegu $x = x^+$.

Uwzględniając (2.20), (2.21), (3.15) w (4.35) otrzymujemy wzór do wyznaczenia krzywizny krytycznej odpowiadającej początkowemu punktowi bifurkacji:

$$\sqrt{\frac{1-2x}{1+2x}} = \frac{\frac{8}{3}\bar{\mu}(x-1) \pm \frac{2\sqrt{3}}{3}\sigma_y \left(1 - \frac{\bar{\mu}}{\mu}\right)}{\frac{8}{3}\bar{\mu}x \pm \frac{2\sqrt{3}}{3}\sigma_y \left(1 - \frac{\bar{\mu}}{\mu}\right)}, \quad (4.36)$$

gdzie znak plus dotyczy strefy rozciąganej, natomiast minus strefy ściskanej. Rozwiązując (4.36) znajdujemy pierwiastki odpowiadające niejednoznaczności procesu deformacji i możliwości pojawienia się powierzchni niestabilności. Zależności (4.36) pokazano na rys. 5, zależność zaś od parametru wzmocnienia materiału $\bar{\mu}$ przedstawiono na rys. 6.

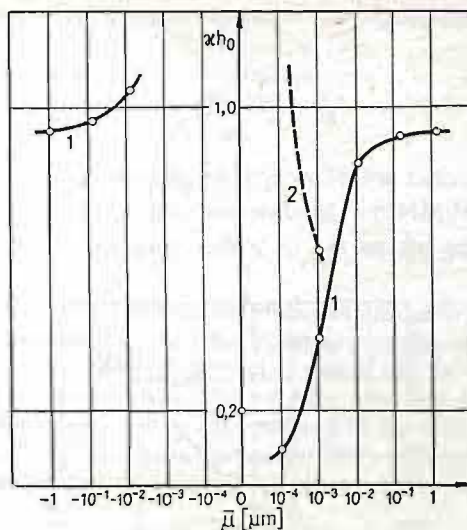


Rys. 5. Krzywizny krytyczne $\kappa_{kr} h_0$ odpowiadające pierwszym punktom bifurkacji dla materiału o charakterystykach $\bar{\mu} = 0,1$ $\mu = 1,05 \cdot 10^4$ MN/m²

Z rys. 6 widać, że jeśli w płycie pojawi się pierwsza krótkofalowa powierzchnia niestabilności, to zawsze będzie ona zlokalizowana w strefie ściskanej.

Dla rozważanego materiału sprężysto-plastycznego nie uzyskano początkowego punktu bifurkacji w przedziale $\langle -10^{-3}\mu; 0 \rangle$, tzn. gdy współczynnik liniowego wzmocnienia $\bar{\mu}$ bliski jest zeru i materiał może być traktowany jako idealnie plastyczny. Zagadnieniem jednoznaczności zginania zajmowano się również w pracy [12] dla przypadku idealnej plastyczności. Stwierdzono, że niejednoznaczność może wystąpić, gdy kąt zgięcia określony ilorazem R^+/R^- przekroczy wartość graniczną 1,25, co odpowiada stanowi zgięcia scharakteryzowanemu w niniejszej pracy przez $\kappa_{kr} = 2 \cdot 1/m$ lub $\kappa_{kr} h_0 = 0,2$.

Lewa strona rys. 6 dotyczy materiału niestabilnego w sensie Druckera, tzn. parametru wzmocnienia $\bar{\mu}$ ma ujemną wartość, co możemy interpretować jako fakt, że stan naprężenia w konstrukcji osiągnął wartość powodującą np. degradację materiału konstrukcji, i wówczas proces deformacji pasma następuje po drodze niestatecznej.



Rys. 6. Krzywizny krytyczne $\kappa_{kr} h_0$ odpowiadające pierwszym punktom bifurkacji dla materiału o granicy plastyczności $\sigma_y = 4,2 \cdot 10^2 \text{ MN/m}^2$ oraz $\mu = 1,05 \cdot 10^5 \text{ MN/m}^2$

5. Omówienie wyników i wnioski

Z przeprowadzonych rozważań wynika, że pierwsza powierzchnia niestabilności może pojawić się, gdy cała płyta znajduje się w obszarze eliptycznym rozwiązania podstawowego równania różniczkowego (4.14), podobnie jak w pracy [6]. Również w pracy [13] badając poddane ciśnieniu wydrążenie kuliste w nieskończonym ośrodku sprężysto-plastycznym stwierdzono, że krótkofalowa powierzchnia niestabilności jest pierwszym punktem bifurkacji pojawiającym się w ciągu procesu deformacji.

W rozważanym przypadku ciała wykonanego z materiału sprężysto-plastycznego z liniowym wzmocnieniem uzyskano zależność (4.36) określającą krzywiznę krytyczną odpowiadającą pierwszym punktom rozdzielenia jako funkcję cech fizycznych materiału σ_y , μ , $\bar{\mu}$ (rys. 5, rys. 6). Analiza wpływu σ_y na wartość krzywizny krytycznej wskazuje, że wraz ze wzmocnieniem się materiału, zależnym od historii obciążenia, występuje w przypadku czystego zginania zmniejszenie się κh_0 . Obniżenie się wartości krzywizny krytycznej następuje również wraz ze zmniejszeniem się współczynnika $\bar{\mu}$ z wyłączeniem przedziału $\langle -10^{-3}\mu; 0 \rangle$.

Odpowiadająca krzywiznie krytycznej pierwsza powierzchnia niestabilności zawsze pojawia się najpierw w obszarze ściskanim pasma, podobnie jak w pracy [6].

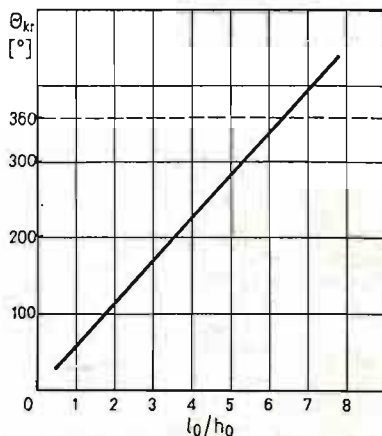
Uzyskane rozwiązanie ograniczone jest geometrią odkształcenia. Kąt zgięcia nie może przekraczać 360° . Graniczna krzywizna wynosi:

$$(\kappa h_0)_{gr} \frac{l_0}{h_0} \leq 2\pi. \quad (5.1)$$

Wartość kąta odpowiadającego dowolnej krzywiznie krytycznej możemy wyznaczyć ze wzoru:

$$\theta_{kr} = (\alpha_{kr} h_0) \frac{l_0}{h_0}, \quad (5.2)$$

gdzie l_0 i h_0 są długością oraz wysokością początkową pasma. Dla materiału o granicy plastyczności $\sigma_y = 4,2 \cdot 10^2 \text{ MN/m}^2$ i module wzmocnienia $\bar{\mu} = 0,1$ $\mu = 1,05 \cdot 10^4 \text{ MN/m}^2$ zależność (5.2) ma przebieg jak na rys. 7, z którego wynika, że jeżeli l_0/h_0 wynosi 2, to



Rys. 7. Kąt krytyczny θ_{kr} określający pierwszy punkt bifurkacji

krytyczny kąt zgięcia odpowiadający możliwości wystąpienia pierwszej powierzchni niestabilności jest równy 107° . Ponadto, gdy l_0/h_0 jest większe od 6,5, to pasmo możemy zgiąć do 360° bez obawy o utratę jednoznaczności procesu deformacji.

Literatura cytowana w tekście

1. R. HILL, *Aspect of Invariance in Solid Mechanics*, Advances in Applied Mechanics, 18, 1978.
2. R. HILL, J. W. HUTCHINSON, *Bifurcation Phenomena in the Plane Tension Test*, Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 4/5, 23, 1975.
3. N. J. B. YOUNG, *Bifurcation Phenomena in the Plane Compression Test*, Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 1, 24, 1976.
4. S. STÖREN, J. R. RICE, *Localized Necking in Thin Sheets*, Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 6, 23, 1975.
5. R. HILL, *The Essential Structure of Constitutive Laws for Metal Composites and Polycrystals*, Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 2, 15, 1967.
6. N. TRIANTAFYLIDIS, *Bifurcation Phenomena in Pure Bending*, Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 3/4, 28, 1980.
7. M. DUSZEK, *Problems of Geometrically Non-linear Theory of Plasticity*, Institut für Mechanik Ruhr-Universität Bochum, 21, 1980.
8. A. SAWCZUK, J. MIELNICZUK, *On Yielding of Hyperelastic Solids*, ZAMM, 1, 55, 1975.
9. T. SADOWSKI, *Dwoistość równowagi w stanach czystego zginania*, IFTR Reports, 2, 1982.
10. R. HILL, *The Mathematical Theory of Plasticity*, Oxford, 1950.

11. J. R. RICE, *The Localization of Plastic Deformation*, Proceedings of the 14th International Congress of Theoretical and Applied Mechanics, Delft, September 1976.
12. J. MIELNICZUK, *Praca doktorska*, IPPT PAN, Warszawa 1973.
13. J. L. BASSANI, D. DURBAN, J. W. HUTCHINSON, *Bifurcations at a Spherical Hole in an Infinite Elastoplastic Medium*, Math. Proc. Camb. Soc., 1980.

Резюме

БИФУРКАЦИОННОЕ РАВНОВЕСИЕ В СОСТОЯНИЯХ ЧИСТОГО ИЗГИБА

В работе исследована задача бифуркации несжимаемой пластины подверженной чистому изгибу. Анализ производим применив гипоупругий фундаментальный модель. Сохранение упруго-пластического материала в линейном напряженном состоянии описано законом с линейным упрочнением. Осуществлено классификацию пространства уравнения бифуркации. Проведено асимптотический анализ, чтобы установить критические условия деформации плитовой полосы для коротковолновой поверхностной неустойчивости. Рассматриваемая коротковолновая поверхность неустойчивости в зоне сжатия определяет первую бифуркационную точку в процессе деформации пластинки.

Summary

BIFURCATION EQUILIBRIUM IN PURE BENDING STATES

In the paper the bifurcation problem of an incompressible plate subjected to pure bending is studied. The analysis is carried out using a hypoelastic constitutive model. The elastic-plastic material behaviour in uniaxial states is described by the linear work-hardening law. A classification of regimes of the bifurcation equation is also performed. An asymptotic analysis has been carried out to establish the critical condition of the deformation plate strip for short wavelength surface instability. The considered short wavelength surface instability in the compressive zone defines the first bifurcation point in the deformation process of the plate.

Praca została złożona w Redakcji dnia 14 czerwca 1983 roku