

DRGANIA PRĘTÓW O LINIOWO ZMIENNEJ WYSOKOŚCI PRZEKROJU POPZRZECZNEGO

EDWARD J. KRYNICKI

*Department of Civil Engineering
University of Manitoba*

STANISŁAW MATYSIAK

*Uniwersytet Warszawski
czasowo
Department of Civil Engineering
University of Manitoba*

1. Wstęp

W projektowaniu konstrukcji inżynierskich spotykamy się z ustrojami złożonymi z elementów o zmiennych przekrojach poprzecznych. Najczęściej jednak mamy do czynienia z konstrukcjami, których wymiary przekrojów poprzecznych elementów zmieniają się liniowo w płaszczyźnie rysunku, natomiast drugi wymiar jest stały. Celowe staje się więc opracowanie odpowiednich wzorów umożliwiających łatwe wykonanie obliczeń dynamicznych tych ustrojów. Wprawdzie współczesna technika komputerowa pozwala rozwiązywać geometrycznie skomplikowane elementy konstrukcyjne to jednak znajomość wzorów transformacyjnych ułatwia budowę kanonicznych układów równań.

Jedną z metod, która ma szerokie zastosowanie w rozwiązywaniu zagadnień dynamicznych ustrojów prętowych (belek ciągłych, ram, łuków, itp.) jest metoda przemieszczeń. Zastosowanie jej do rozwiązywania układów o stałych przekrojach poprzecznych jest znane, wystarczy wymienić obszerne monografie St. BŁASZKOWIAKA i Zb. KĄCZKOWSKIEGO [1] oraz W. NOWACKIEGO [2].

W przypadku prętów o zmiennych przekrojach poprzecznych znane jest rozwiązanie ściśle drgań klinowej belki wspornikowej podane przez E. CRANCHA i A. ADLERA [3], przy czym cała ogólna równania opisującego to zagadnienie wyrażona jest za pomocą funkcji Bessela.

Zagadnienie drgań belki swobodnie podpartej o liniowo zmiennej wysokości zbadane zostało w pracy [4] przez zastosowanie metody Ritza. W rozprawie tej uzyskano przy użyciu szeregów Fouriera formalnie rozwiązanie ściśle.

W pracach [5], [6] wyprowadzono wzory transformacyjne metody przemieszczeń, umożliwiające rozwiązania zagadnień drgań poprzecznych, podłużnych i skrętnych ustrojów sprężystych złożonych z prętów prostych pełnych, których wymiary przekrojów po-

przeznaczonych zmieniają się liniowo tylko w płaszczyźnie zginania natomiast grubość pręta jest stała. Wyprowadzone wzory w wymienionych wyżej pracach nie pozwalają jednak rozwiązywać ustrojów przestrzennych z braku odpowiednich wyrażeń na drgania poprzeczne pręta w kierunku prostopadłym do płaszczyzny zginania.

Praca [7] zawiera wzory transformacyjne dla pręta o liniowo zmiennych obu wymiarach przekroju. Interesujące wyniki zawiera praca [8] w której rozpatrzono drgania prętów o bardziej skomplikowanej geometrii.

W niniejszej pracy zajmujemy się zagadnieniami drgań poprzecznych pręta w kierunku osi stałego wymiaru pręta. Rozważania ograniczamy do drgań harmonicznym, które opisane są przez amplitudę spełniającą równanie różniczkowe zwyczajne liniowe o zmiennych współczynnikach. Rozwiązanie ogólne tego równania daje się przedstawić jedynie w postaci szeregów potęgowych, otrzymane więc w pracy wyniki stanowią formalnie dokładne a w praktyce przybliżone rozwiązanie analityczne stawianego problemu i pozwalają na łatwe otrzymanie rozwiązań dla przykładów liczbowych.

Wyprowadzone w tej pracy wzory wraz z wynikami podanymi w pracach [5], [6] mogą służyć do wyznaczenia drgań wymuszonych i własnych oraz sił przekrojowych belek ciągłych, ram płaskich i przestrzennych, rusztów, ram załamanych w planie, i.t.d. Podane rozwiązania mogą mieć również zastosowanie w przypadku ram fundamentowych ram podpierających stropy obciążone maszynami, konstrukcji wsporczych pod urządzenia wentylacyjne, silniki, itp., w konstrukcjach mostowych oraz w wielu innych konstrukcjach inżynierskich a szczególnie przemysłowych.

2. Drgania poprzeczne pręta

Rozważmy pręt prosty o stałej szerokości przekroju poprzecznego q oraz o wysokości $h(\xi)$ zmiennej liniowo wzdłuż osi pręta (rys. 1) opisanej wzorem:

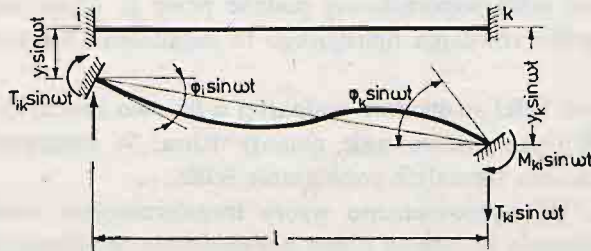
$$h(\xi) = h_s(\mu_l \xi' + \mu_k \xi), \quad (2.1)$$

gdzie:

$$h_s = \sqrt{h_l h_k}, \quad \mu_l = \frac{h_l}{h_s} = \sqrt{\frac{h_l}{h_k}},$$

$$\mu_k = \frac{h_k}{h_s} = \sqrt{\frac{h_k}{h_l}}, \quad \mu_l \mu_k = 1, \quad (2.2)$$

$$\xi = \frac{x}{l}, \quad \xi' = 1 - \xi.$$



Rys. 1

Symbolami h_i, h_k oznaczono tu wysokości przekrojów podporowych. Zmiennosc pola $A(\xi)$ przekroju poprzecznego pręta wyraża się następująco:

$$A(\xi) = A_s(\mu_i \xi' + \mu_k \xi), \quad (2.3)$$

gdzie:

$$A_s = \sqrt{A_i A_k}. \quad (2.4)$$

Zmiennosc momentu bezwładności $I(\xi)$ przekroju poprzecznego pręta przy drganiach poprzecznych w kierunku osi y (rys. 1), tj. prostopadle do rysunku ma postać:

$$I(\xi) = I_s(\mu_i \xi' + \mu_k \xi), \quad (2.5)$$

gdzie:

$$I_s = \sqrt{I_i I_k}. \quad (2.6)$$

Stałe μ_i, μ_k występujące we wzorach (2.3), (2.5) mają postać (2.2) lub, co jest równoważne

$$\mu_i = \sqrt{\frac{I_i}{I_k}}, \quad \mu_k = \sqrt{\frac{I_k}{I_i}}. \quad (2.7)$$

Symbolle A_i, A_k, I_i, I_k oznaczają pola oraz momenty bezwładności przekrojów podporowych

$$A_i = h_i q, \quad A_k = h_k q, \quad I_i = \frac{h_i q^3}{12}, \quad I_k = \frac{h_k q^3}{12}. \quad (2.8)$$

Równanie różniczkowe opisujące drgania własne poprzeczne pręta o zmiennej sztywności zginania ma postać:

$$\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \left[EI(\xi) \frac{\partial^2 y(\xi, t)}{\partial \xi^2} \right] + \rho A(\xi) l^4 \frac{\partial^2 y(\xi, t)}{\partial t^2} = 0, \quad (2.9)$$

gdzie $EI(\xi)$ oznacza sztywnosc zginania pręta, $\rho A(\xi)$ oznacza masę pręta na jednostkę długości.

Uwzględniając wzory (2.3) i (2.5), równanie (2.9) możemy zapisać w postaci

$$\frac{EI_s}{(\mu_i - \mu_k)^2} \frac{\partial^4 y(\xi, t)}{\partial \xi^4} - \frac{2EI_s}{(\mu_i - \mu_k)(\mu_i \xi' + \mu_k \xi)} \frac{\partial^3 y(\xi, t)}{\partial \xi^3} + \frac{\rho A_s l^4}{(\mu_i - \mu_k)^2} \frac{\partial^2 y(\xi, t)}{\partial t^2} = 0. \quad (2.10)$$

Dalej rozważania nasze ograniczymy do drgań harmonicznycch. Po rozdzieleniu zmiennych otrzymujemy następujące równanie różniczkowe opisujące amplitudę

$$\frac{1}{(\mu_i - \mu_k)^2} y^{IV}(\xi) - \frac{2}{(\mu_i - \mu_k)(\mu_i \xi' + \mu_k \xi)} y^{III}(\xi) - \left(\frac{\lambda}{2} \right)^4 y(\xi) = 0, \quad (2.11)$$

gdzie

$$\lambda^4 = \frac{16 \rho A_s l^4 \omega^2}{(\mu_i - \mu_k)^2 EI_s} \quad (2.12)$$

zaś ω oznacza kątową częstosc drgań.

Wprowadzając oznaczenia

$$\mu_i = a, \quad \mu_i - \mu_k = b, \quad (2.13)$$

równanie (2.11) można zapisać w następującej postaci

$$\frac{1}{b^2} y^{IV}(\xi) - \frac{2}{b(a-b\xi)} y^{III}(\xi) - \left(\frac{\lambda}{2}\right)^4 y(\xi) = 0. \quad (2.14)$$

3. Rozwiązanie równania (2.14)

Równanie (2.14) jest równaniem różniczkowym zwyczajnym liniowym jednorodnym rzędu czwartego o zmiennych współczynnikach, przy czym (ponieważ $a > b > 0$), współczynniki te są funkcjami ciągłymi dla $\xi \in \langle 0, 1 \rangle$. Podstawiając do równania (2.14) zmienną η daną wzorem

$$\eta = a - b\xi, \quad (3.1)$$

oraz przyjmując

$$\tilde{y}(\eta) \equiv y(\xi) \quad (3.2)$$

dostajemy

$$\tilde{y}^{IV}(\eta) + \frac{2}{\eta} \tilde{y}^{III}(\eta) - \left(\frac{\lambda}{2}\right)^4 \frac{1}{b^2} \tilde{y}(\eta) = 0. \quad (3.3)$$

Równanie (3.3) zostało rozpatrzone w pracy [9], gdzie autor zastosował metodę zmiennej zespolonej dla otrzymania rozwiązania przybliżonego. Wykorzystamy teraz bardziej klasyczną metodę, mianowicie poszukiwać będziemy rozwiązań szczególnych równania (3.3) w postaci szeregu potęgowego [10]:

$$\tilde{y}(\eta) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \eta^{r+k}, \quad (3.4)$$

gdzie r jest nieznanym parametrem, który trzeba określić wraz ze współczynnikami c_k podstawiając (3.4) do równania (3.3). Prowadzi to do następującego równania algebraicznego

$$\begin{aligned} & c_0 r(r-1)^2(r-2)\eta^{r-4} + c_1(r+1)r^2(r-1)\eta^{r-3} + \\ & + c_2(r+2)(r+1)^2r\eta^{r-2} + c_3(r+3)(r+2)^2(r+1)\eta^{r-1} + \\ & + \sum_{k=0}^{\infty} \{c_{k+4}(r+4+k)(r+3+k)^2(r+2+k) - Bc_k\} \eta^{r+k} = 0, \end{aligned} \quad (3.5)$$

gdzie

$$B = \left(\frac{\lambda}{2}\right)^4 \frac{1}{b^2}. \quad (3.6)$$

Równanie (3.5) powinno być spełnione tożsamościowo a zatem współczynniki przy dowolnej potęgze η powinny być równe zero. Przyjmujemy, że

$$c_1 = c_2 = c_3 = 0 \quad (3.7)$$

oraz

$$r(r-1)^2(r-2) = 0, \quad (3.8)$$

co daje $r = 0$, $r = 1$, $r = 2$.

Z równania (3.5) wynika ponadto, że jeśli spełnione są (3.7) i (3.8) to

$$c_{k+4}(r+4+k)(r+3+k)^2(r+2+k) - Bc_k = 0. \quad (3.9)$$

Podstawiając $r = 0$ do (3.4) i (3.9) otrzymujemy jedno z rozwiązań szczególnych równania (3.3) w postaci:

$$Y_1(\eta) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_{4n} \eta^{4n}, \quad (3.10)$$

gdzie dla $n \in N$ mamy

$$a_{4n} = \prod_{i=1}^n \frac{B^i}{[4(n-i)+4][4(n-i)+3]^2[4(n-i)+2]}, \quad (3.11)$$

$$a_0 = 1, \quad a_{4n+1} = a_{4n+2} = a_{4n+3} = 0.$$

Dwa następne rozwiązania szczególne otrzymujemy podstawiając $r = 1$ oraz $r = 2$ do (3.4) i (3.9). Dają się one zapisać następująco:

$$Y_2(\eta) = \eta \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} b_{4n} \eta^{4n} \right), \quad (3.12)$$

gdzie:

$$b_{4n} = \prod_{i=1}^n \frac{B^i}{[4(n-i)+5][4(n-i)+4]^2[4(n-i)+3]}, \quad (3.13)$$

$$b_0 = 1, \quad b_{4n+1} = b_{4n+2} = b_{4n+3} = 0, \quad n \in N,$$

oraz

$$Y_3(\eta) = \eta^2 \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} c_{4n} \eta^{4n} \right), \quad (3.14)$$

gdzie

$$c_{4n} = \prod_{i=1}^n \frac{B^i}{[4(n-i)+6][4(n-i)+5]^2[4(n-i)+4]}, \quad (3.15)$$

$$c_0 = 1, \quad c_{4n+1} = c_{4n+2} = c_{4n+3} = 1, \quad n \in N.$$

Ponieważ $r = 1$ jest pierwiastkiem podwójnym równania (3.8), czwartego rozwiązania

szczególnego poszukujemy w postaci [10]:

$$Y_4(\eta) = Y_2(\eta) \ln \eta + \sum_{n=0}^{\infty} d_n \eta^{n+1}, \quad (3.16)$$

gdzie $Y_2(\eta)$ dane jest wzorem (3.12). Podstawiając (3.16) do równania (3.3) otrzymujemy wzory określające współczynniki d_n

$$d_{4n} = \prod_{i=2}^n \frac{B^{n-1} d_4}{(4i)^2(4i+1)(4i-1)} - \frac{32n^2-1}{2n(4n+1)(4n-1)} b_{4n} \quad (3.17)$$

dla $n > 1$ oraz

$$d_4 = -\frac{11}{10} b_4, \quad d_{4n+1} = d_{4n+2} = d_{4n+3} = 0.$$

Z (3.17) i (3.16) wynika, że

$$Y_4(\eta) = Y_2(\eta) \ln \eta + \sum_{n=1}^{\infty} d_{4n} \eta^{4n+1}, \quad (3.18)$$

gdzie d_{4n} są określone wzorem (3.17).

Podsumowując, otrzymaliśmy cztery rozwiązania szczególne $Y_i(\eta)$ równania (3.3). Można sprawdzić, że są one liniowo niezależne, zatem rozwiązanie ogólne równania (3.3) możemy przedstawić w postaci

$$\hat{y}(\eta) = \sum_{i=1}^4 C_i Y_i(\eta), \quad (3.19)$$

gdzie C_i , $i = 1, 2, 3, 4$ są dowolnymi stałymi zaś Y_i dane są wzorami (3.10), (3.12), (3.14) oraz (3.18). Stałe C_i można wyznaczyć z warunków brzegowych. Rozwiązanie ogólne równania (2.14) dostajemy podstawiając do (3.19) zmienną η daną we wzorze (3.1) i uwzględniając (3.2).

4. Warunki brzegowe i wzory transformacyjne

Rozpatrzmy następujące warunki brzegowe

$$\begin{aligned} y(0) &= y_l, & y'(0) &= l\varphi_l, \\ y(1) &= y_k, & y'(1) &= l\varphi_k, \end{aligned} \quad (4.1)$$

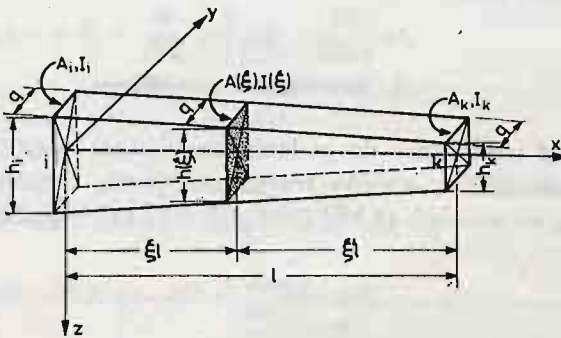
gdzie y_l , y_k , $l\varphi_l$, $l\varphi_k$ są stałymi oznaczającymi amplitudy przemieszczeń liniowych i kątowych. Ponieważ wygodniej jest operować funkcją $\tilde{y}(\eta)$ więc wykorzystując oznaczenia (3.1) i (3.2) możemy warunki brzegowe (4.1) zapisać w postaci

$$\begin{aligned} \tilde{y}(a) &= y_l, & \left. \frac{d\tilde{y}}{d\eta} \right|_{\eta=a} &= -\frac{l}{b} \varphi_l, \\ \tilde{y}(a-b) &= y_k, & \left. \frac{d\tilde{y}}{d\eta} \right|_{\eta=a-b} &= -\frac{l}{b} \varphi_k. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Podstawiając rozwiązanie ogólne (3.19) do warunków brzegowych (4.2) otrzymujemy układ czterech równań algebraicznych liniowych określających nieznanne stałe C_i , $i = 1, 2, 3, 4$:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^4 C_i Y_i(a) &= y_1, \\ \sum_{i=1}^4 C_i Y_i(a-b) &= y_k, \\ \sum_{i=1}^4 C_i \frac{dY_i}{d\eta} \Big|_{\eta=a} &= -\frac{l}{b} \varphi_1, \\ \sum_{i=1}^4 C_i \frac{dY_i}{d\eta} \Big|_{\eta=a-b} &= -\frac{l}{b} \varphi_k. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Znając stałe C_i mamy na podstawie wzoru (3.19) funkcję $\tilde{y}(\eta)$ a uwzględniając (3.1) i (3.2) otrzymujemy $y(\xi)$. Warunki brzegowe (4.1) mają charakter ogólny, pozwalają również znaleźć rozwiązanie zagadnienia gdy dane są na końcach pręta momenty zginające lub siły poprzeczne poprzez rozwiązanie odpowiedniego układu równań algebraicznych. Momenty zginające i siły poprzeczne w końcach pręta wyrażają się wzorami [5] (rys. 2):



Rys. 2

$$\begin{aligned} M_{1k} &= -\frac{EI(\xi)}{l^2} \frac{d^2 y(\xi)}{d\xi^2} \Big|_{\xi=0}, \\ M_{k1} &= \frac{EI(\xi)}{l^2} \frac{d^2 y(\xi)}{d\xi^2} \Big|_{\xi=l}, \\ T_{1k} &= -\frac{d}{ld\xi} \left[\frac{EI(\xi)}{l^2} \frac{d^2 y(\xi)}{d\xi^2} \right] \Big|_{\xi=0}, \\ T_{k1} &= -\frac{d}{ld\xi} \left[\frac{EI(\xi)}{l^2} \frac{d^2 y(\xi)}{d\xi^2} \right] \Big|_{\xi=l}. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Zastępując ξ przez η zaś $y(\xi)$ przez $\tilde{y}(\eta)$ oraz uwzględniając (2.5), (2.2) oraz (2.13) to wzory (4.4) można zapisać następująco

$$\begin{aligned} M_{ik} &= -\frac{EI_s a}{l^2} b^2 \frac{d^2 y}{d\eta^2} \Big|_{\eta=a}, \\ M_{ki} &= \frac{EI_s (a-b)}{l^2} b^2 \frac{d^2 \tilde{y}}{d\eta^2} \Big|_{\eta=a-b}, \\ T_{ik} &= \frac{Eb^3 I_s}{l^3} \left[\frac{d^2 y}{d\eta^2} + \eta \frac{d^3 y}{d\eta^3} \right] \Big|_{\eta=a}, \\ T_{ki} &= \frac{Eb^3 I_s}{l^3} \left[\frac{d^2 \tilde{y}}{d\eta^2} + \eta \frac{d^3 \tilde{y}}{d\eta^3} \right] \Big|_{\eta=a-b}. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Jeśli dane warunki brzegowe wyrażają momenty zginające i siły poprzeczne lub są typu mieszanego to można otrzymać rozwiązanie stosując (3.19), gdzie C_i spełniają układ równań (4.3), przyjmując $y_i, y_k, l\varphi_i, l\varphi_k$ jako nieznanne, które trzeba wyznaczyć z zadanych warunków brzegowych i wzorów (4.5).

Z układu równań (4.3) wynika, że stałe C_i są w postaci kombinacji liniowych wartości przemieszczeń liniowych i kątowych danych na brzegu pręta, czyli

$$C_n = a_{n1} y_i + a_{n2} y_k + a_{n3} l\varphi_i + a_{n4} l\varphi_k,$$

gdzie $a_{nm}, n, m = 1, 2, 3, 4$ są stałymi. Z powyższego wniosku oraz na podstawie (3.19) i (4.5) wynika, że siły poprzeczne i momenty zginające są również kombinacjami liniowymi wartości $y_i, y_k, l\varphi_i$, oraz $l\varphi_k$.

5. Rozwiązanie przybliżone

Ograniczymy teraz rozważania do podania rozwiązania przybliżonego oraz, odpowiadającym temu rozwiązaniu, wzorów transformacyjnych. Współczynniki a_{4n}, b_{4n}, c_{4n} oraz d_{4n} występujące we wzorach (3.15), (3.11), (3.13) i (3.17) podaje następująca tabela

Tabela 1

n	1	2	3
a_{4n}	$\frac{B}{72}$	$\frac{B^2}{200064}$	$\frac{B^3}{50400 \cdot 200064}$
b_{4n}	$\frac{B}{240}$	$\frac{B^2}{967680}$	$\frac{B^3}{65280 \cdot 967680}$
c_{4n}	$\frac{B}{600}$	$\frac{B^2}{3888000}$	$\frac{B^3}{82232 \cdot 3888000}$
d_{4n}	$-\frac{11B}{2400}$	$-B^2 \frac{11}{9696800} + \frac{127}{252 \cdot 967680}$	$-\frac{11B^3}{20592 \cdot 2400} - \frac{287}{858} b_{12}$

Dalej, mając na celu zilustrowanie wyników podanych w rozdziale 4 pracy, ograniczamy się do następujących przybliżeń dla $Y_i(\eta)$ (wykorzystujemy wzory (3.10), (3.12), (3.14) i (3.18)):

$$Y_1(\eta) \approx 1 + a_4 \eta^4 = 1 + \frac{B}{72} \eta^4,$$

$$Y_2(\eta) \approx \eta + b_4 \eta^5 = \eta + \frac{B}{240} \eta^5,$$

$$Y_3(\eta) \approx \eta^2 + c_4 \eta^6 = \eta^2 + \frac{B}{600} \eta^6,$$

$$Y_4(\eta) \approx (\eta + b_4 \eta^5) \ln \eta + d_4 \eta^5 = \left(\eta + \frac{B}{240} \eta^5 \right) \ln \eta - \frac{11}{2400} \eta^5.$$

(5.1)

Dokładność rozwiązania przybliżonego można poprawić biorąc w rozwiązaniach szczególnych więcej wyrazów szeregów opisujących $Y_i(\eta)$. Współczynniki a_{4n} , b_{4n} , c_{4n} , d_{4n} dość szybko maleją do zera.

Wprowadzając oznaczenia

$$f_{11} = Y_1(a) \approx 1 + \frac{B}{72} a^4, \quad f_{12} = Y_2(a) \approx a + \frac{B}{240} a^5,$$

$$f_{13} = Y_3(a) \approx a^2 + \frac{B}{600} a^6,$$

$$f_{14} = Y_4(a) \approx \left(a + \frac{B}{240} a^5 \right) \ln a - \frac{11}{2400} a^5,$$

$$f_{21} = Y_1(a-b) \approx 1 + \frac{B}{72} (a-b)^4,$$

$$f_{22} = Y_2(a-b) \approx a-b + \frac{B}{240} (a-b)^5,$$

$$f_{23} = Y_3(a-b) \approx (a-b)^2 + \frac{B}{600} (a-b)^6,$$

$$f_{24} = Y_4(a-b) \approx \left[a-b + \frac{B}{240} (a-b)^5 \right] \ln(a-b) - \frac{11}{2400} (a-b)^5,$$

$$f_{31} = \left. \frac{dY_1}{d\eta} \right|_{\eta=a} \approx \frac{B}{18} a^3, \quad f_{32} = \left. \frac{dY_2}{d\eta} \right|_{\eta=a} \approx 1 + \frac{B}{48} a^4,$$

(5.2)

$$f_{33} = \left. \frac{dY_3}{d\eta} \right|_{\eta=a} \approx 2a + \frac{B}{100} a^5,$$

$$f_{34} = \left. \frac{dY_4}{d\eta} \right|_{\eta=a} \approx \left(1 + \frac{B}{48} a^4 \right) \ln a + 1 - \frac{3}{160} a^4,$$

$$f_{41} = \left. \frac{dY_1}{d\eta} \right|_{\eta=a-b} \approx \frac{B}{18} (a-b)^3,$$

$$\begin{aligned}
 f_{42} &= \left. \frac{dY_2}{d\eta} \right|_{\eta=a-b} \approx 1 + \frac{B}{48} (a-b)^4, \\
 f_{43} &= \left. \frac{dY_3}{d\eta} \right|_{\eta=a-b} \approx 2(a-b) + \frac{B}{100} (a-b)^5, \\
 f_{44} &= \left. \frac{dY_4}{d\eta} \right|_{\eta=a-b} \approx \left[1 + \frac{B}{48} (a-b)^4 \right] \ln(a-b) + 1 - \frac{3}{160} (a-b)^4,
 \end{aligned} \tag{5.2}$$

możemy układ równań (4.3) zapisać następująco

$$\sum_{m=1}^4 f_{jm} C_m = g_j, \quad j = 1, 2, 3, 4, \tag{5.3}$$

gdzie

$$g_1 = y_i, \quad g_2 = y_k, \quad g_3 = -\frac{l}{b} \varphi_i, \quad g_4 = -\frac{l}{b} \varphi_k. \tag{5.4}$$

Stosując rozwiązanie przybliżone (5.1) możemy wyrazić wzory transformacyjne (4.5) w postaci

$$\begin{aligned}
 M_{ik} &= -\frac{EI_s ab^2}{l^2} \left[C_1 \frac{B}{6} a^2 + C_2 \frac{B}{12} a^3 + C_3 \left(2 + \frac{B}{20} a^4 \right) + \right. \\
 &\quad \left. + C_4 \left(\frac{B}{12} a^3 \ln a + \frac{7}{240} a^3 \right) \right], \\
 M_{ki} &= \frac{EI_s b^2 (a-b)}{l^2} \left\{ C_1 \frac{B}{6} (a-b)^2 + C_2 \frac{B}{12} (a-b)^3 + C_3 \left[2 + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \frac{B}{20} (a-b)^4 \right] + C_4 \left[\frac{B}{12} (a-b)^3 \ln(a-b) + \frac{7}{240} (a-b)^3 \right] \right\}, \\
 T_{ik} &= -\frac{b}{la} M_{ik} + \frac{EI_s ab^3}{l^3} \left[C_1 \frac{B}{3} a + C_2 \frac{B}{4} a^2 + C_3 \frac{B}{5} a^3 + \right. \\
 &\quad \left. + C_4 \left(\frac{B}{4} a^2 \ln a - \frac{19}{240} a^2 \right) \right], \\
 T_{ki} &= \frac{b}{l(a-b)} M_{ki} + \frac{EI_s b^3 (a-b)}{l^3} \left\{ C_1 \frac{B}{3} (a-b) + C_2 \frac{B}{4} (a-b)^2 + \right. \\
 &\quad \left. + C_3 \frac{B}{5} (a-b)^3 + C_4 \left[\frac{B}{4} (a-b)^2 \ln(a-b) - \frac{19}{240} (a-b)^2 \right] \right\}.
 \end{aligned} \tag{5.5}$$

Rozwiązując teraz układ równań (5.3) możemy wyznaczyć C_k a następnie podstawiając je do (3.19) (gdzie Y_i są dane wzorami (5.1)) oraz do (5.5) otrzymamy poszukiwane rozwiązanie.

W przypadku drgań własnych, przyjmując, że pręt jest sztywno zamocowany, co oznacza przyjęcie na brzegach zerowych przemieszczeń liniowych $y_i = y_k = 0$ oraz zerowych przemieszczeń kątowych $l\varphi_i = l\varphi_k = 0$, układ równań (5.3) staje się układem równań

liniowych jednorodnych i posiada niezerowe rozwiązanie gdy

$$\det[f_{jm}] = 0 \quad (5.6)$$

Równanie (5.6) jest równaniem na częstość drgań własnych ω wchodzącą do niego poprzez wartość B (wzory (2.12) i (3.6)). Podstawiając przybliżone wartości f_{jm} dane wzorami (5.2) do (5.6) otrzymujemy równanie algebraiczne stopnia czwartego na niewiadomą B i można je rozwiązać numerycznie.

Zastosowanie podanych wyżej rozwiązań przybliżonych zilustrujemy na przykładach liczbowych.

Przykład 1: Znajdziemy częstość drgań własnych dla pręta o następujących danych

$$\begin{aligned} l &= 4,00 \text{ m}, & q &= 1,20 \text{ m}, & h_i &= 2,40 \text{ m}, & h_k &= 1,20 \text{ m}. \\ \rho &= 2400 \text{ kg/m}^3, & E &= 23 \cdot 10^3 \text{ MPa}. \end{aligned} \quad (5.7)$$

Stosując wzory (2.2), (2.7), (2.8), (2.13) i (5.7) otrzymujemy

$$a = 1,4142, \quad b = 0,7071 \quad (5.8)$$

następnie, podstawiając (5.8) do wzorów (5.2) i rozwiązując równanie (5.6) dostajemy

$$B = 19,5291 \quad (5.9)$$

co daje, na podstawie (3.6) i (2.12) częstość drgań własnych dla rozpatrywanego przypadku

$$\omega = 209,44 \text{ s}^{-1}. \quad (5.10)$$

Przykład 2: Rozpatrzmy teraz drgania wymuszone pręta o wymiarach podanych we wzorze (5.7) przyjmując częstość obciążeń wymuszających

$$\omega = 314,16 \text{ s}^{-1}, \quad (5.11)$$

co odpowiada 3000 drgań/min. Na podstawie wzorów (2.12) i (3.6) mamy dla tego przypadku

$$B = 43,94, \quad (5.12)$$

następnie, podstawiając (5.12) i (5.8) do wzorów (5.2) otrzymujemy liczbowe wartości współczynników f_{jm} dla układu równań (5.3). Podajemy je w postaci macierzy:

$$F = \begin{bmatrix} 3,4409 & 2,4498 & 2,5857 & 0,8231 \\ 1,1525 & 0,7394 & 0,5090 & -0,2571 \\ 6,9039 & 4,6614 & 5,3138 & 2,4955 \\ 0,8629 & 1,2288 & 1,4919 & 0,5691 \end{bmatrix} \quad (5.13)$$

gdzie

$$F = [f_{jm}] \quad (5.14)$$

Rozwiązanie układu równań (5.3) możemy zapisać w postaci

$$C_1 = 13,8822y_i - 9,7928y_k + 4,5955 \frac{l}{b} \varphi_i + 4,3511 \frac{l}{b} \varphi_k. \quad (5.15)$$

$$C_2 = -106,2118y_i + 76,6061y_k - 36,7801 \frac{l}{b} \varphi_i - 26,9438 \frac{l}{b} \varphi_k, \quad (5.15)$$

$$C_3 = 98,1271y_i - 70,2163y_k + 34,2566 \frac{l}{b} \varphi_i + 23,4296 \frac{l}{b} \varphi_k, \quad [\text{cd.}]$$

$$C_4 = -48,9577y_i + 33,5132y_k - 17,3563 \frac{l}{b} \varphi_i - 11,5984 \frac{l}{b} \varphi_k.$$

Na podstawie wzorów (3.2), (3.1), (3.19), (5.1), (5.8) i (5.12) możemy przedstawić amplitudę drgań $y(\xi)$ w postaci

$$y(\xi) = C_1 [1 + 0,6103(1,4142 - 0,7071\xi)^4] + C_2 [1,4142 - 0,7071\xi + 0,1831(1,4142 - 0,7071\xi)^5] + C_3 [(1,4142 - 0,7071\xi)^2 + 0,0732(1,4142 - 0,7071\xi)^6] + C_4 \{ [1,4142 - 0,7071\xi + 0,1831(1,4142 - 0,7071\xi)^5] \ln(1,4142 - 0,7071\xi) - 0,0045(1,4142 - 0,7071\xi)^5 \}, \quad (5.16)$$

gdzie C_i są dane wzorami (5.15).

Podstawiając parametry charakteryzujące pręt (5.7) oraz wzory (5.15) do (5.5), otrzymujemy następującą postać wzorów transformacyjnych:

$$M_{ik} = -0,0216 E \left(-17,7047y_i + 15,4154y_k - 7,7320 \frac{l}{b} \varphi_i - 5,1135 \frac{l}{b} \varphi_k \right), \quad (\text{Nm}),$$

$$M_{ki} = 0,0108 E \left(183,8750y_i - 129,6104y_k + 63,7763 \frac{l}{b} \varphi_i + 45,6078 \frac{l}{b} \varphi_k \right), \quad (\text{Nm}),$$

$$T_{ik} = \frac{E}{l} \left(0,2269y_i - 0,0687y_k - 3,1495 \frac{l}{b} \varphi_i - 0,1443 \frac{l}{b} \varphi_k \right),$$

$$T_{ki} = \frac{E}{l} \left(1,6989y_i - 0,4542y_k + 0,5842 \frac{l}{b} \varphi_i + 0,4381 \frac{l}{b} \varphi_k \right), \quad (5.17)$$

gdzie $E = 23 \times 10^3$ MPa, $l = 4,00$ m, y_i, y_k są amplitudami przemieszczeń liniowych zaś $l\varphi_i, l\varphi_k$ są amplitudami przemieszczeń kątowych na końcach pręta.

Literatura cytowana w tekście

1. S. BŁASZKOWIAK, Z. KĄCZKOWSKI, *Metoda Crossa*, PWN, Warszawa, 1959.
2. W. NOWACKI, *Dynamika budowli*, Arkady, Warszawa, 1961.
3. E. CRANCH, A. ADLER, *Journ. Appl. Mech.*, ASME, 23, 1, 1956.
4. E. KRYNICKI, Z. MAZURKIEWICZ, *Journ. Appl. Mech.*, ASME, 29, 9, 1962.
5. E. KRYNICKI, *Arch. Inż. Łąd.*, 12, 1, 1966.
6. E. KRYNICKI, *Arch. Inż. Łąd.*, 12, 3, 1966.

7. J. GOLEC, Arch. Inż. Łąd., 26, 2, 1980.
8. D. O. BANKS, G. J. KUROWSKI, Journ. Appl. Mech., ASME, 44, 3, 1977.
9. D. E. NEVEL, *The general solution of a wedge on an elastic foundation*, CRREL Research Report 227, Nov., 1968.
10. M. COLOMB, M. SHANKS, *Elements of ordinary differential equations*, Mc Graw-Hill Company, 1965.

Р а з ю м е

КОЛЕБАНИЯ СТЕРЖНЕЙ С ЛИНЕЙНО ПЕРЕМЕННОЙ ВЫСОТОЙ ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ

В работе рассмотрено задачу колебаний прямых стержней с постоянной толщиной, которых размеры поперечных сечений изменяются линейно в плоскости изгиба. Рассмотрены гармонические поперечные колебания стержня в направлении постоянного размера поперечного сечения. Получено общее решение уравнения амплитуда в виде степенного ряда, а в дальнейшем приближенное решение для амплитуда и трансформационных формул. Полученные результаты иллюстрированы двумя численными примерами: в первом найдено частоту собственных колебаний, во втором рассмотрено вынужденные колебания.

S u m m a r y

VIBRATIONS BARS WITH LINEARLY VARIABLE CROSS-SECTIONAL HEIGHT

The paper deals with problems of vibrations of straight bars with constant width. The height varies linearly in the plane of bending. We consider harmonic transverse vibrations of the bar in the direction of the constant dimension. A general solution of the amplitude equation is obtained in the form of the power series. From this an approximate solution is determined for the amplitude and slope-deflection equations. The obtained results are illustrated by two examples. In the first the natural frequency is determined while in the second forced vibrations are obtained.

Praca została złożona w Redakcji dnia 25 maja 1982 roku