

O STOSOWANIU NIEPROSTOKĄTNYCH ELEMENTÓW CZASOPRZESTRZENNYCH

ZBIGNIEW KĄCZKOWSKI

Warszawa

*Praca napisana na jubileusz XXV-lecia Polskiego Towarzystwa Mechaniki Teoretycznej
i Stosowanej*

1. Wstęp

W dotychczasowych pracach poświęconych metodzie Skończonych Elementów Czasoprzestrzennych (SKECZ) przyjmowano, że podział konstrukcji na elementy w przestrzeni trójwymiarowej jest ustalony, a każdy z elementów czasoprzestrzennych obejmuje wycinek czasoprzestrzeni rozpięty na obszarze odpowiedniego elementu przestrzennego i ograniczony dwiema kolejnymi chwilami. Założenie to doprowadziło do algorytmów (por. KĄCZKOWSKI [1 - 3]) podobnych do tych, do jakich dochodzi się przy stosowaniu innych metod bezpośredniego całkowania numerycznego równań ruchu (por. BATHE, WILSON [4]).

Jednakże stosowanie w metodzie SKECZ wyłącznie takich, szczególnego typu elementów, które skrótowo nazywać będziemy elementami prostokątnymi, jest istotnym ograniczeniem możliwości kryjących się w obmyślonej przez nas metodzie. Stąd zarówno praca autora, [3], o „ogólnym sformułowaniu” metody SKECZ jak i praca KĄCZKOWSKIEGO i LANGERA, [5], o „syntezie metody” odnoszą się de facto do szczególnej odmiany metody SKECZ, bazującej na czasoprzestrzennych elementach prostokątnych.

W pracy niniejszej wskażemy podstawowe zalety stosowania nieprostokątnych elementów czasoprzestrzennych. Ponieważ zaś rozpatrywane tu zadania będą się odnosiły do ustrojów prętowych, przeto ich elementy czasoprzestrzenne będą miały formę trójkątów. Uogólnienie rozważań na ustroje powierzchniowe wymagałoby wprowadzenia elementów czasoprzestrzennych o formie ostrosłupa, a w przypadku rozpatrywania ciał trójwymiarowych trzeba będzie budować hiperostrosłupy czterowymiarowe.

2. Drgania poprzeczne struny wywołane przesuającą się siłą

W pracy [1] zajmowaliśmy się nietłumionymi drganiami struny, której ruch można opisać następującym układem równań macierzowych:

$$(2.1) \quad \mathbf{s} = \partial w, \quad \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{E}\mathbf{s}, \quad \partial^T \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{p} = 0,$$

w których jest¹⁾

$$(2.2) \quad \varepsilon = \{\varphi_x, \varphi_t\}, \quad \sigma = \{Q_x, Q_t\}, \quad \partial = \left\{ \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t} \right\},$$

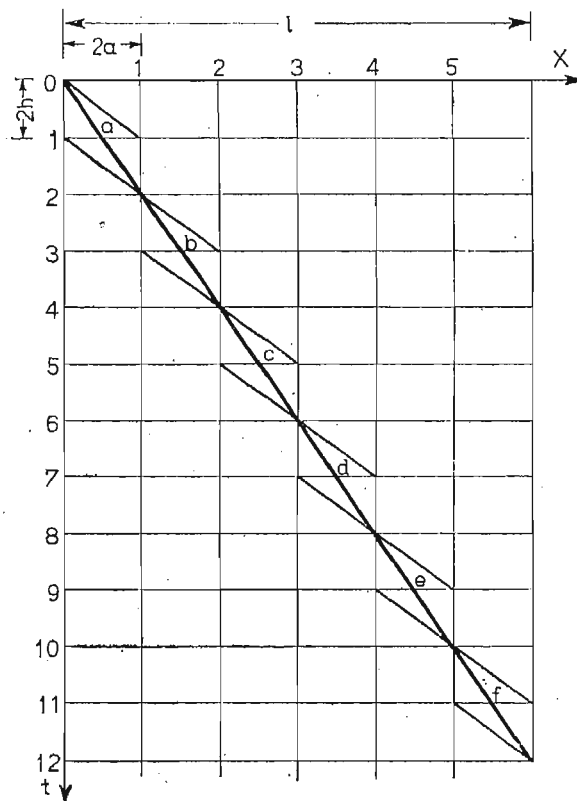
$$(2.3) \quad E = [N_x, -\mu].$$

We wzorach tych oznaczają: φ_x — kąt nachylenia struny odkształconej do osi poziomej x , φ_t — prędkość przemieszczeń pionowych, μ — masę przypadającą na jednostkę długości struny, N_x i Q_x — składowe poziomą i pionową siły naciągu struny, Q_t — pęd masy μ ze znakiem ujemnym, $p = p(x, t)$ — obciążenie poprzeczne struny.

W cytowanej pracy [1] znaleźliśmy metodą SKECZ rozwiązanie następującego zadania. Wzdłuż struny ze stałą prędkością, równą połowie prędkości c rozchodzenia się fali poprzecznej,

$$(2.4) \quad c = \sqrt{N_x/\mu},$$

przesuwała się stała, bezmasowa siła P . Uzyskane rozwiązanie było obarczone błędem, wynikającym z zastosowania wyłącznie prostokątnych elementów czasoprzestrzennych. Funkcja kształtu elementu czasoprzestrzennego nie mogła bowiem uwzględnić załamania linii ugięcia struny, występującego w miejscu przyłożenia siły skupionej.



Rys. 1. Podział obszaru czasoprzestrzennego na elementy w przypadku przesuwającej się siły

¹⁾ W klamry $\{ \}$, $[\]$ ujmujemy macierze odpowiednio: jednokolumnowe i diagonalne.

Nic nie stoi jednak na przeszkodzie takiemu podzieleniu obszaru czasoprzestrzennego, aby punkt przyłożenia siły znajdował się stale na linii oddzielającej od siebie dwa elementy czasoprzestrzenne (rys. 1).

W sąsiedztwie siły pojawiają się więc elementy trójkątne trojakięgo rodzaju, pokazane na rys. 2. Ich macierze sztywności znajdujemy w sposób typowy, opisany m.in. w monografii ZIENKIEWICZA [6]. Macierze kształtu przyjęliśmy w postaci:

$$(2.5) \quad \begin{aligned} N_a &= \left[1 - \frac{x}{2a} - \frac{t}{2h}, \frac{x}{2a}, \frac{t}{2h} \right], \\ N_b &= \left[1 - \frac{x}{a} - \frac{t}{2h}, \frac{x}{a}, \frac{t}{2h} \right], \\ N_c &= \left[1 - \frac{x}{a} + \frac{t}{2h}, \frac{x}{a} - \frac{t}{h}, \frac{t}{2h} \right]. \end{aligned}$$

Po wykonaniu na tych macierzach operacji

$$(2.6) \quad B_e = \partial N_e, \quad e = a, b, c,$$

otrzymujemy:

$$(2.7) \quad B_a = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2a} & \frac{1}{2a} & 0 \\ -\frac{1}{2h} & 0 & \frac{1}{2h} \end{bmatrix}, \quad B_b = \begin{bmatrix} -\frac{1}{a} & \frac{1}{a} & 0 \\ -\frac{1}{2h} & 0 & \frac{1}{2h} \end{bmatrix}, \quad B_c = \begin{bmatrix} -\frac{1}{a} & \frac{1}{a} & 0 \\ \frac{1}{2h} & -\frac{1}{h} & \frac{1}{2h} \end{bmatrix}$$

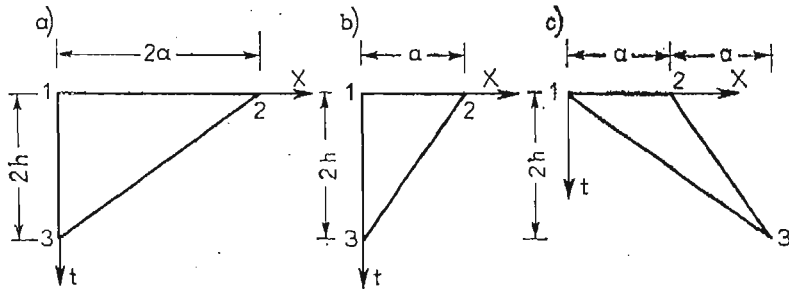
Macierze sztywności znajdujemy na podstawie ogólnego wzoru

$$(2.8) \quad K_e = \int_{\Omega} B^T E B d\Omega.$$

otrzymując dla

$$(2.9) \quad \lambda = \frac{a}{hc} = 1,$$

kolejno:



Rys. 3. Element czasoprzestrzenny masy skupionej

$$\begin{aligned}
 (2.10) \quad K_a &= \frac{N_x h}{2a} \begin{bmatrix} 1 - \lambda^2 & -1 & \lambda^2 \\ -1 & 1 & 0 \\ \lambda^2 & 0 & -\lambda^2 \end{bmatrix} = \frac{N_x}{2c} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \\
 K_b &= \frac{N_x h}{4a} \begin{bmatrix} 4 - \lambda^2 & -4 & \lambda^2 \\ -4 & 4 & 0 \\ \lambda^2 & 0 & -\lambda^2 \end{bmatrix} = \frac{N_x}{4c} \begin{bmatrix} 3 & -4 & 1 \\ -4 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \\
 K_c &= \frac{N_x h}{4a} \begin{bmatrix} 4 - \lambda^2 & -4 + 2\lambda^2 & -\lambda^2 \\ -4 + 2\lambda^2 & 4 - 4\lambda^2 & 2\lambda^2 \\ -\lambda^2 & 2\lambda^2 & -\lambda^2 \end{bmatrix} = \frac{N_x}{4c} \begin{bmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

Macierz sztywności elementu prostokątnego wyprowadziliśmy w pracy [1]:

$$\begin{aligned}
 (2.11) \quad K_e &= \frac{N_x h}{6a} \begin{bmatrix} 2 - 2\lambda^2 & -2 - \lambda^2 & 1 + 2\lambda^2 & -1 + \lambda^2 \\ -2 - \lambda^2 & 2 - 2\lambda^2 & -1 + \lambda^2 & 1 + 2\lambda^2 \\ 1 + 2\lambda^2 & -1 + \lambda^2 & 2 - 2\lambda^2 & -2 - \lambda^2 \\ -1 + \lambda^2 & 1 + 2\lambda^2 & -2 - \lambda^2 & 2 - 2\lambda^2 \end{bmatrix} = \\
 &= \frac{N_x}{2c} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

Globalny układ równań metody SKECZ zapiszemy w postaci:

$$(2.12) \quad \begin{bmatrix} K^{00} & K^{01} & & & & \\ K^{10} & K^{11} & K^{12} & & & \\ & & & & & \\ & & K^{21} & K^{22} & K^{23} & \\ & & & K^{32} & K^{33} & K^{34} \\ & & & & & \dots \\ & & & & & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w^0 \\ w^1 \\ w^2 \\ w^3 \\ \dots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F^0 \\ F^1 \\ F^2 \\ F^3 \\ \dots \end{bmatrix}.$$

Na podwektory w^s (F^s) składają się wszystkie przemieszczenia (impulsy) występujące w chwili s . Podwektory o numerach parzystych ($s = 0, 2, 4, \dots$) zawierają więc po pięć składowych $w_i^s(F_i^s)$, ($i = 1, 2, 3, 4, 5$), a podwektory o numerach nieparzystych — po sześć składowych. Np.:

$$\begin{aligned}
 (2.13) \quad w^1 &= \{w_a^1, w_1^1, w_2^1, w_3^1, w_4^1, w_5^1\}, \\
 w^3 &= \{w_1^3, w_b^3, w_2^3, w_3^3, w_4^3, w_5^3\}, \dots
 \end{aligned}$$

W związku z tym podukłady równań o numerach parzystych ($s = 0, 2, 4, \dots$) składają się z pięciu równań o sześciu nowych niewiadomych w chwilach $s+1 = 1, 3, 5, \dots$, a podukłady równań o nieparzystych numerach składają się z sześciu równań zawierających po pięć nowych niewiadomych, składowych wektorów w^s ($s = 2, 4, 6 \dots$).

Dlatego też, chcąc dojść do wzorów rekurencyjnych należy układ (2.12) podzielić na podukłady w sposób oznaczony liniami przerywanymi. Każdy z owych podukładów będzie zawierał po 11 równań z 11 niewiadomymi. Ogólna postać takiego podukładu będzie następująca:

$$(2.14) \quad J^{2r, 2r-1} W^{2r-1} + J^{2r, 2r+1} W^{2r+1} = G^{2r}, \quad r = 1, 2, 3, \dots$$

przy czym jest:

$$(2.15) \quad J^{2r, 2r-1} = \begin{bmatrix} K^{2r, 2r-1} & K^{2r, 2r} \\ 0 & K^{2r+1, 2r} \end{bmatrix},$$

$$J^{2r, 2r+1} = \begin{bmatrix} K^{2r, 2r+1} & 0 \\ K^{2r+1, 2r+1} & K^{2r+1, 2r+2} \end{bmatrix},$$

$$(2.16) \quad W^{2r-1} = \begin{bmatrix} w^{2r-1} \\ w^{2r} \end{bmatrix}, \quad W^{2r+1} = \begin{bmatrix} w^{2r+1} \\ w^{2r+2} \end{bmatrix}, \quad G^{2r} = \begin{bmatrix} F^{2r} \\ F^{2r+1} \end{bmatrix}.$$

Na podstawie równania (2.14) otrzymujemy następujący wzór rekurencyjny:

$$(2.17) \quad W^{2r+1} = (J^{2r, 2r+1})^{-1} (G^{2r} - J^{2r, 2r-1} W^{2r-1}),$$

obowiązujący również dla $r = 0$ przy podstawieniu

$$(2.17) \quad W^{-1} = \begin{bmatrix} 0 \\ w^0 \end{bmatrix}.$$

Co się tyczy obciążeń zewnętrznych, to występują one w postaci impulsów $2Ph$ w węzłach znajdujących się na linii działania siły. Mamy zatem:

$$(2.18) \quad F^0 = \{0, 0, 0, 0, 0\}, \quad F^1 = \{2Ph, 0, 0, 0, 0\},$$

$$F^2 = \{2Ph, 0, 0, 0, 0\}, \quad F^3 = \{0, 2Ph, 0, 0, 0\}, \text{ itd.}$$

W rezultacie prostych obliczeń otrzymujemy kolejno rzędne przemieszczeń zestawione w tablicy 1. Wszystkie zawarte w tej tablicy liczby należy pomnożyć przez wspólny czynnik

$$(2.19) \quad \gamma = \frac{2}{3} \frac{Pa}{N_x}.$$

Tablica 1. Przemieszczenia struny wywołane przesuwanem się siły bezmasowej

$$\text{Mnożnik: } \gamma = \frac{2}{3} \frac{Pa}{N_x}$$

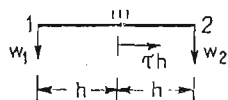
$s \backslash i$	a	1	b	2	c	3	d	4	e	5	f
0		0		0		0		0		0	
1	1	0		0		0		0		0	
2		2		0		0		0		0	
3		2	3	2		0		0		0	
4		2		4		2		0		0	
5		2		4	5	4		2		0	
6		2		4		6		4		2	
7		2		4		6	7	6		4	
8		2		4		6		8		4	
9		2		4		6		6	6	4	
10		2		4		4		4		4	
11		2		2		2		2		2	2
12		0		0		0		0		0	

Należy podkreślić, że zastosowanie trójkątnych elementów czasoprzestrzennych pozwoliło nam w tym przypadku uzyskać wynik ścisły, co przy stosowaniu elementów prostokątnych było niemożliwe.

Tok obliczeń nie uległby istotnym zmianom, gdybyśmy założyli, że siła $P = mg$ jest ciężarem masy m przesuwaną się wzdłuż struny. Na linii przesuwania się tej masy (rys. 1) należałoby tylko założyć istnienie dodatkowych jednowymiarowych elementów czasoprzestrzennych. W zagadnieniach statyki podobne elementy wprowadza się w miejscu występowania zębów usztywniających konstrukcję powierzchniową.

Założmy, że macierz kształtu elementu przedstawionego na rys. 3 wyraża się następująco:

$$(2.20) \quad N = \frac{1}{2}[1 - \tau, 1 + \tau].$$



Rys. 2. Czasoprzestrzenne elementy trójkątne

Dalej znajdujemy kolejno:

$$(2.21) \quad B = \frac{d}{dt} N = \frac{1}{2h} [-1, 1],$$

$$(2.22) \quad K_e = \int_{-1}^1 B^T (-m) B h d\tau = \frac{m}{2h} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Przy założeniu

$$(2.23) \quad m = 2\mu a,$$

i wykorzystaniu związków (2.4) i (2.9), otrzymujemy

$$(2.24) \quad K_e = \frac{N_x}{c} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Tablica 2. Przemieszczenia struny wywołane przesuwanem się masy skupionej

$$\text{Mnożnik: } \gamma = \frac{2}{3} \frac{mga}{N_x}$$

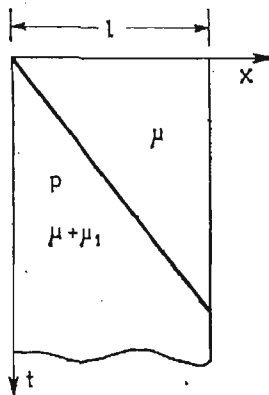
$s \backslash i$	a	1	b	2	c	3	d	4	e	5	f
0		0		0		0		0		0	
1	1	0		0		0		0		0	
2		2		0		0		0		0	
3		2	3	2		0		0		0	
4		2		4		2		0		0	
5		2		4	5	4		2		0	
6		2		4		6		4		2	
7		2		4		6	7	6		4	
8		2		4		6		8		4	
9		2		4		6		8	7	4	
10		2		4		6		4		6	
11		2		4		2		4		4	3
12		2		0		2		2		0	

Tabl. 2 zawiera zestawienie rzędnych ugięcia wywołanych opisanym obciążeniem inercyjnym. Zjawisko przebiega początkowo identycznie jak w przypadku przesuwania się siły bezmasowej. Dopiero od momentu spotkania się przesuwającej masy z falą odbitą, co następuje w chwili $s = 8$, przebieg drgań ulega zaburzeniu.

3. Drgania struny o zmiennej masie

W przypadku przesuwania się wzdłuż struny inercyjnego obciążenia ciągłego o masie μ_1 masa drgająca struny μ przed frontem obciążenia będzie mniejsza niż łączna masa $\mu + \mu_1$ przypadająca na jednostkę długości struny obciążonej (rys. 4). Ponadto w obszarze obciążonym działać będą równomiernie rozłożone siły $p = \mu_1 g$. Wobec zwiększenia się masy właściwej struny, w odpowiedniej jej części prędkość rozchodzenia się fal poprzecznych będzie odpowiednio mniejsza i wyniesie:

$$(3.1) \quad c_1 = \sqrt{\frac{N_x}{\mu + \mu_1}}$$



Rys. 4. Struna o zmieniającej się masie

Umożliwia to stosowne wydłużenie kroku całkowania po czasie, który to krok najlepiej przyjąć, podobnie jak w części nieobciążonej, na podstawie wzoru:

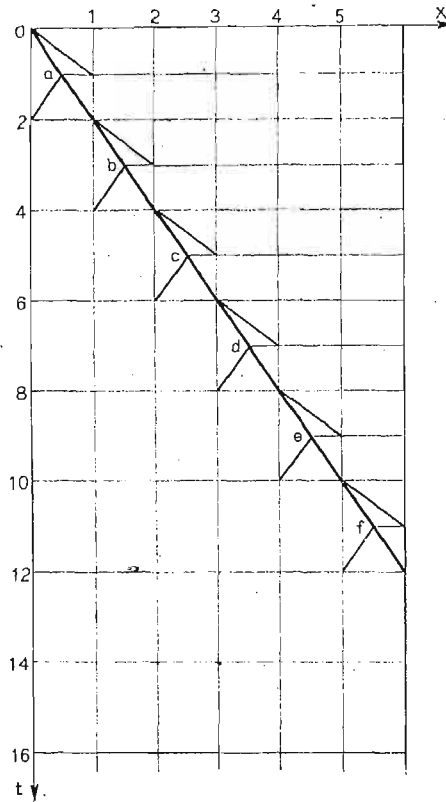
$$(3.2) \quad h_1 = a/c_1.$$

W strefie przejścia od struny obciążonej do nieobciążonej konieczne będzie zastosowanie czasoprzestrzennych elementów trójkątnych.

Założmy dla przykładu, że prędkość nasuwania się obciążenia będzie — podobnie jak w przykładach poprzednich — równa połowie prędkości c rozchodzenia się fali w strunie nieobciążonej. Niech ponadto przesuwająca się masa μ_1 będzie trzy razy większa od masy struny μ . Mamy wówczas:

$$(3.3) \quad \mu + \mu_1 = 4\mu, \quad c_1 = 1/2c, \quad h_1 = 2h,$$

a obszar czasoprzestrzenny dzielimy na elementy w sposób przedstawiony na rys. 5.



Rys. 5. Podział obszaru czasoprzestrzennego na elementy w przypadku przesuwającego się ciągłego obciążenia inercyjnego

Macierze sztywności elementów o masie 4μ , pokazanych na rys. 6 znajdujemy w sposób opisany wyżej. Mają one postać:

$$(3.4) \quad K_a = \frac{N_x}{c} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad K_b = \frac{N_x}{c} \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$K_c = \frac{N_x}{c} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Globalny układ równań dzielimy na podukłady tak, aby w każdym z nich liczba równań odpowiadała liczbie niewiadomych. Podukłady te mają następującą budowę:

$$(3.5) \quad \begin{aligned} K^{00}w^0 + K^{01}w^1 &= F^0, \\ K^{s,s-1}w^{s-1} + K^{s,s}w^s + K^{s,s+1}w^{s+1} &= F^s. \end{aligned}$$

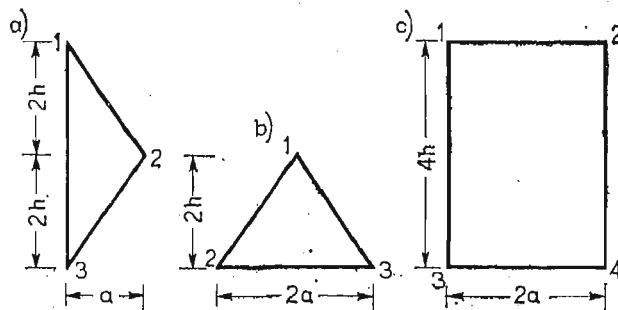
Występujące w nich podwektory mają składowe podane niżej:

$$(3.6) \quad \begin{aligned} w^s &= \{w_1^s, w_2^s, w_3^s, w_4^s, w_5^s\}, \quad s = 0, 1; \\ w^2 &= \{w_a^1, w_1^2, w_2^2, w_3^2, w_4^2, w_5^2\}, \\ w^3 &= \{w_2^3, w_3^3, w_4^3, w_5^3\}, \quad w^4 = \{w_1^4, w_b^3, w_2^4, w_3^4, w_4^4, w_5^4\}, \\ w^5 &= \{w_3^5, w_4^5, w_5^5\}, \quad w^6 = \{w_1^6, w_2^6, w_c^5, w_3^6, w_4^6, w_5^6\} \text{ itd.} \end{aligned}$$

Niewiadome te wyznaczamy z podukładów równań wyrażających warunki równowagi dynamicznej odpowiednich węzłów. I tak, chcąc uzyskać składowe podwektora w^1 korzystamy z warunków równowagi impulsów działających na węzły 1-5 w chwili $s = 0$, sześć składowych wektora w^2 wyznaczamy z sześciu równań równowagi węzłów w chwili $s = 1$, cztery składowe wektora w^3 — z czterech równań równowagi węzłów 2-5 w chwili $s = 2$, sześć składowych wektora w^4 — z sześciu równań odnoszących się do węzłów: 1 w chwili $s = 2$ oraz b i 2-5 w chwili $s = 3$ itd.

Równomiernie rozłożone obciążenie $p = 3\mu g$ zastępujemy impulsami skupionymi w węzłach elementów czasoprzestrzennych. W szczególności we wszystkich wierzchołkach elementów trójkątnych pokazanych na rys. 6a, b wystąpią impulsy wynoszące po $\frac{2}{3}pah$, a w węzłach elementu prostokątnego (rys. 6c) — impulsy $2pah$. Zatem podwektory F^s występujące w układzie (3.5) będą miały następujące składowe:

$$(3.7) \quad \begin{aligned} F^0 &= \{0, 0, 0, 0, 0\}, \quad F^1 = \{2, 0, 0, 0, 0\} \frac{2}{3} pah, \\ F^2 &= \{0, 0, 0, 0\}, \quad F^3 = \{5, 2, 0, 0, 0\} \frac{2}{3} pah, \\ F^4 &= \{0, 0, 0\}, \quad F^5 = \{11, 5, 2, 0, 0, 0\} \frac{2}{3} pah, \\ F^6 &= \{0, 0\}, \quad F^7 = \{12, 11, 5, 2, 0, 0\} \frac{2}{3} pah, \\ F^8 &= \{0\}, \quad F^9 = \{12, 12, 11, 5, 2, 0\} \frac{2}{3} pah, \\ F^{10} &= \{12, 12, 12, 11, 5, 2\} \frac{2}{3} pah \text{ itd.} \end{aligned}$$



Rys. 6. Elementy czasoprzestrzenne o masie 4μ

Tablica 3. Przesunięcia struny wywołane przesuwaniem się masy równomiernie rozłożonej

$$\text{Mnożnik: } \gamma = 2 \frac{\mu g a^2}{N_x}$$

$s \backslash i$	a	1	b	2	c	3	d	4	e	5	f
0		0		0		0		0		0	
1	2	0		0		0		0		0	
2		4		0		0		0		0	
3			6	4		0		0		0	
4		3,5		8		4		0		0	
5					10	8		4		0	
6		15		6,5		12		8		4	
7							14	12		8	
8		15		30		10		16		8	
9									6	8	
10		27		30,5		45		7,5		-4	
11											0
12		27,5		54		40		36		4	
14		39		49		57		48,5		51	
16		33,5		54		69,5		84		56,5	
18		27		66		93		89,5		45	
20		44,5		78		98		66		45	
22		63		88,5		63		65,5		33	
24		56		60		68		42		32,5	
26		8		47,5		51		47		21	
28		3,5		11		38,5		42		26,5	
30		15		6,5		14		30		33	
32		15		30		10		17		15,5	
34		27		30,5		45		7,5		-4	
36		27,5		54		40		36		4	

Wyniki obliczeń zestawiono w tabl. 3. Zauważmy, że w chwilach $s = 10$ i $s = 34$ rozpoczynają się identyczne cykle przesunięć. Wynika stąd, że podstawowy okres drgań struny o masie 4μ wynosi:

$$(3.8) \quad T = 24h_1 = 24 \frac{a}{c_1} = \frac{2l}{c_1},$$

a odpowiednia częstość kołowa:

$$(3.9) \quad \omega_1 = \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi}{l} \sqrt{\frac{N_x}{4\mu}}.$$

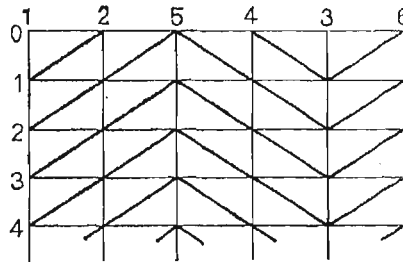
Jest to wynik ścisły.

4. Możliwości rozseparowania układu równań dynamiki

W znanych metodach bezpośredniego całkowania równań ruchu podstawową trudność stwarza konieczność wielokrotnego rozwiązywania dużych układów równań o liczbie niewiadomych równej liczbie stopni swobody całego układu. Jest to zwłaszcza kłopotliwe

wtedy, gdy wobec nieliniowości zagadnienia, macierze wymagające odwrócenia zmieniają się po każdym kroku całkowania i gdy trzeba stosować metodę iteracji. Jak dotąd, jedynie stosując metodę analizy modalnej można było problem całkowania cząstkowych równań różniczkowych ruchu sprowadzać do problemu rozwiązania układu niesprzężonych, zwyczajnych równań różniczkowych. Metoda ta wymaga jednak uprzedniego wyznaczenia wartości własnych i odpowiadających im — funkcji lub wektorów własnych.

Okazuje się że podobny efekt można uzyskać metodą SKECZ bez potrzeby przeprowadzania wprzód kłopotliwej rachunkowo analizy modalnej. Wystarczy każdy z czasoprzestrzennych elementów prostokątnych stosowanych w przypadku stacjonarnego podziału konstrukcji prętowej na elementy podzielić przekątną na dwa elementy trójkątne.



Rys. 7. Podział obszaru czasoprzestrzennego prowadzący do rozseparowania układu równań

Na rys. 7 przedstawiliśmy przykładowy podział obszaru czasoprzestrzennego na elementy trójkątne oraz ponumerowaliśmy węzły zgodnie z kolejnością, w jakiej należy wykonywać obliczenia. Numeracja ta została ustalona w taki sposób, aby w kolejnych równaniach pojawiała się zawsze tylko jedna niewiadoma. Pod pojęciem „niewiadoma” rozumiemy tu wektor o wymiarze odpowiadającym liczbie k stopni swobody jednego węzła. Łatwo spostrzec, że rozpatrując równowagę kolejnych węzłów w chwili s mamy za każdym razem układ k równań na k nieznanach składowych wektora przemieszczeń odpowiedniego węzła w chwili $s+1$, niezależnie od liczby stopni swobody całego układu.

W niniejszej pracy poprzestaniemy na zasygnalizowaniu jedynie opisanej możliwości rozseparowania układu równań, zapowiadając jednocześnie zamieszczenie odpowiednich przykładów w następnych pracach.

5. Uwagi końcowe

Jak widać z rozwiązanych wyżej przykładów, stosowanie obok czasoprzestrzennych elementów prostokątnych również elementów trójkątnych stwarza możliwość nie tylko dostosowywania podziału obszaru czasoprzestrzennego do przebiegu obciążenia, ale także rozwiązywania takich zadań nieliniowych, w których drgania ustroju spełniają różne równania różniczkowe w zmieniających się w czasie przedziałach. Warto podkreślić, że — wobec warunkowej stabilności rozwiązań uzyskiwanych metodą SKECZ — może być pożyteczne stosowanie różnej długości kroków całkowania po czasie w różnych częściach konstrukcji. W strefie pośredniej potrzebne będzie stosowanie w tym przypadku elementów nieprostokątnych.

Przykłady liczbowe zamieszczone w niniejszej pracy dotyczyły wyłącznie struny, ale opisany sposób postępowania można bez istotnych zmian stosować i do innych, bardziej złożonych ustrojów konstrukcyjnych, zarówno sprężystych jak i lepkosprężystych.

Szczególnie nęcąca wydaje się możliwość rozseparowywania układów równań dynamiki w wyniku stosowania elementów trójkątnych, o czym była mowa w p. 4. Sprawa ta wymaga jednak bardziej szczegółowej analizy.

Ostatnio autor natknął się na pracę J. T. Odena: *A general theory of finite elements*, International Journal of Numerical Methods in Engineering, 1, (1969), 205 - 221, 247 - 259, w której zasygnalizowano możliwość stosowania elementów czasoprzestrzennych oraz zwrócono uwagę na niektóre korzyści, jakie mogą płynąć ze stosowania elementów trójkątnych. (Uwaga dopisana przy korekcie).

Literatura cytowana w tekście

1. Z. KĄCZKOWSKI, *The method of finite space-time elements in dynamics of structures*, Journal of Technical Physics, 1, 16, (1975), 69 - 84.
2. Z. KĄCZKOWSKI, *Metoda czasoprzestrzennych elementów skończonych*, Archiwum Inżynierii Lądowej, 3, 22, (1976), 365 - 378.
3. Z. KĄCZKOWSKI, *General formulation of the stiffness matrix for the space-time finite elements*, Archiwum Inżynierii Lądowej, 3, 25, (1979), 351 - 357.
4. K. BATHE, E. WILSON, *Numerical methods in finite element analysis*, Prentice-Hall, New Jersey, 1976.
5. Z. KĄCZKOWSKI, J. LANGER, *Synthesis of the space-time finite element method*, Archiwum Inżynierii Lądowej, 1, 26, (1980), 11 - 17.
6. O. C. ZIENKIEWICZ, *Metoda elementów skończonych*, Arkady, Warszawa, 1972.

Praca została złożona w Redakcji dnia 20 czerwca 1983 roku.
