MECHANIKA
TEORETYCZNA
I STOSOWANA
1/2, 20 (1982)

ZAGADNIENIA TERMOSPRĘŻYSTOŚCI

WITOLD NOWACKI

PAN

Mechanika ciała stałego odkształcalnego XIX wieku, to głównie teoria sprężystości, traktowana jako dział fizyki matematycznej.

Równolegle z teorią sprężystości rozwijały się jej zastosowania techniczne w ramach tzw. nauki o wytrzymałości materiałów, teorii płyt i powłok oraz mechaniki konstrukcji.

W okresie powojennym zaczęły się rozwijać nowe działy mechaniki ciała odkształcalnego, mianowicie teoria plastyczności, lepkosprężystość i reologia. Jednocześnie nastąpił renesans klasycznej teorii sprężystości. Z powodzeniem rozwijano jej wariant nieliniowy. W liniowej teorii sprężystości na plan pierwszy wysunęły się zagadnienia szczelin, znaczną rolę odgrywające w fizyce pękania materiału.

Jednocześnie obserwujemy burzliwy rozwój teorii pól sprzężonych ciał sprężystych. Pod tym mianem rozumiemy wiązanie co najmniej dwu działów fizyki fenomenologicznej, dotąd oddzielnie rozwijanych. Typowym przykładem takiego wiązania pól jest termosprężystość. Wiążemy tu klasyczną teorię sprężystości i teorię przewodnictwa ciepła w ciałach stałych w jedną, syntetyczną dziedzinę. Badamy wpływ zmiany temperatury na odkształcenie ciała jak i wpływ odkształcenia na zmianę temperatury.

Impuls do badania pól sprzężonych przyszedł od techniki; w związku z rozwojem konstrukcji lotniczych i maszynowych a przede wszystkim z rozwojem inżynierii chemicznej (zwłaszcza jądrowej). Coraz częściej elementy konstrukcyjne narażone są na podwyższone temperatury, wyższe ciśnienie; pracują w warunkach radiacji, dyfuzji oraz w silnym polu magnetycznym.

W niniejszym referacie ograniczymy się do przedstawienia jednego tylko pola sprzężonego — termosprężystości. W tej bowiem dziedzinie mechanika polska ma szczególne osiągnięcia.

Wiadomo, że w klasycznej teorii sprężystości stosuje się odmienne założenia termodynamiczne w elastostatyce i elastodynamice. Jeszcze inne założenia stoją u podstaw teorii naprężeń cieplnych.

W elastostatyce przyjmuje się, że w czasie powolnego narastania obciążeń, a co za tym idzie i odkształceń, występuje pełna wymiana ciepła z otoczeniem. Zakłada się, że w całym ciele panuje stała temperatura T_0, temperatura stanu naturalnego. Wiadomo, że wektor przemieszczenia $\boldsymbol{u}$, którego pochodne opisują deformację ciała, spełnia równania różniczkowe

$$\mu\nabla^2\boldsymbol{u}+(\lambda+\mu)\operatorname{grad}\operatorname{div}\boldsymbol{u}+\boldsymbol{X} = 0, \tag{1}$$

gdzie

$$\mu > 0, \quad 3\lambda + 2\mu > 0. \tag{2}$$

Tutaj $\boldsymbol{u}$ jest wektorem sił masowych, a μ, λ stałymi materiałowymi Lame'go dla stanu izotermicznego. Nierówności (2) wynikają ze stwierdzenia, że energia odkształcenia jest formą kwadratową, dodatnio zdefiniowaną.

Natomiast w klasycznej elastodynamice zakłada się, że wymiana ciepła, odbywająca się za pośrednictwem przewodnictwa cieplnego następuje w sposób bardzo powolny, oraz że w ciele brak jest źródeł ciepła.

Powyższe założenie odpowiada warunkom procesu adiabatycznego. Przemieszczenie $\boldsymbol{u}$ spełnia tu równanie ruchu

$$\mu \nabla^2 \boldsymbol{u} + (\lambda + \mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} \boldsymbol{u} + \boldsymbol{X} = \varrho \ddot{\boldsymbol{u}}. \tag{3}$$

Tutaj ϱ oznacza gęstość a $\varrho\ddot{\boldsymbol{u}}$ jest siłą bezwładności. Stałe Lame'go μ, λ występujące w równaniu (3) odnoszą się do stanu adiabatycznego. Również i one spełniają nierówności

$$\mu > 0, \quad 3\lambda + 2\mu > 0.$$

Innego typu założenia przyjmuje się w teorii naprężeń cieplnych. Uwzględnia się działanie źródeł ciepła oraz ogrzanie powierzchni ciała, ale pomija się wpływ odkształcenia ciała na zmianę pola temperatury.

Odkształcenie całkowite ε_{ij} składamy z dwu części, z dystorsji termicznej $\varepsilon_{ij} = \alpha_t \Theta \delta_{ij}$ oraz z odkształcenia sprężystego ε_{ij}. W rezultacie otrzymamy

$$\varepsilon_{ij} = \alpha_t \Theta \delta_{ij} + 2\mu' \sigma_{ij} + \lambda' \delta_{ij} \sigma_{kk}, \tag{4}$$

gdzie

$$2\mu' = \frac{1}{2\mu} \quad \lambda' = -\frac{\lambda}{2\mu(3\lambda + 2\mu)}.$$

Zależność $\varepsilon^0_{ij} = \alpha_t \Theta \delta_{ij}$ opisuje znane zjawisko fizyczne: proporcjonalność dystorsji termicznej do wzrostu temperatury $\Theta = T - T_0$, gdzie T jest temperaturą bezwzględną a T_0 stałą temperaturą stanu naturalnego. Przez α_t oznaczono współczynnik liniowej rozszerzalności termicznej. Ze związków (4) otrzymamy tzw. związki Duhamela-Neumanna.

$$\sigma_{ij} = 2\mu\varepsilon_{ij} + (\lambda\varepsilon_{kk} - \gamma\Theta)\delta_{ij}. \tag{5}$$

Wstawiając powyższe do równań ruchu, dochodzimy do równań przemieszczeniowych teorii naprężeń cieplnych

$$\begin{gathered} \mu \nabla^2 \boldsymbol{u} + (\lambda + \mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} \boldsymbol{u} + \boldsymbol{X} = \varrho \ddot{\boldsymbol{u}} + \gamma \operatorname{grad} \Theta, \\ \mu > 0, \quad (3\lambda + 2\mu) > 0, \quad \gamma = (3\lambda + 2\mu)\alpha_t > 0, \quad \alpha_t > 0. \end{gathered} \tag{6}$$

Pole temperatury opisane jest tu klasycznym równaniem przewodnictwa cieplnego

$$(k\nabla^2 - c\varrho\,\partial_t)\Theta = -\varrho h, \quad k > 0, \quad c > 0. \tag{7}$$

W równaniu tym h jest ilością generowanego ciepła, odniesionego do jednostki masy, c jest ciepłem właściwym, odniesionym do jednostki masy (przy ustalonym odkształceniu), wreszcie k jest współczynnikiem przewodzenia ciepła.

Równanie przewodnictwa cieplnego (7) nie uwzględnia wpływu odkształcenia ciała na zmianę temperatury. W tym stanie rzeczy wyznaczamy temperaturę z równania przewodnictwa cieplnego i wstawiamy do prawej strony równania ruchu (6). Możemy zatem z rozwiązania równania ruchu wyznaczyć pole przemieszczenia wywołane ogrzaniem (czy oziębieniem) ciała. Nie możemy jednak rozwiązać zagadnienia odwrotnego, wyznaczenia zmiany temperatury wywołanej odkształceniem ciała.

W rozpatrywanych tu przypadkach otrzymaliśmy trzy różne równania przemieszczeniowe, uwzględniające różne założenia termodynamiczne. Dążenie do uzyskania jednego układu równań różniczkowych opisujących wszelkie procesy termodynamiczne stoi u podstaw sprzężonej termosprężystości.

Sprzężenie pola deformacji i temperatury postulował już J. M. C. DUHAMEL [1]. Dołączył on do klasycznego równania przewodnictwa cieplnego człon dylatacyjny. Tak rozszerzone równanie przewodnictwa cieplnego miała postać

$$D\Theta = \xi \operatorname{div} \dot{u} = -\varrho h, \qquad D = k\nabla^2 - c\varrho\partial_t, \tag{8}$$

nie zostało jednak uzasadnione termodynamicznie. Zanotujmy dalsze usiłowania uzasadnienia termodynamicznego równania (8) podjęte przez W. VOIGTA [2] i H. JEFFREYS'A [3]. Jednak dopiero w 1956 r. M. A. BIOT [4] opierając się na termodynamice procesów nieodwracalnych, podał pełne uzasadnienie termodynamiczne równania [8].

Podstawą dalszych rozważań są: bilans energii oraz nierówność Clausius'a-Duhema

$$\varrho\dot{\varepsilon} = \sigma_{kl} v_{l,k} - q_{k,k} + \varrho h, \tag{9}$$

$$\varrho\dot{\eta} + \left(\frac{q_k}{T}\right)_{,k} - \frac{\varrho h}{T} \geqslant 0 \tag{10}$$

Tutaj ε jest energią wewnętrzną, odniesioną do jednostki masy, η jest entropią odniesioną do jednostki masy. Kropka na η i ε oznacza materialną pochodną czasową. Wreszcie q jest wektorem przepływu ciepła. **Człon $\sigma_{kl} v_{l,k}$ jest przyrostem energii odkształcenia, pominiętym przy wyprowadzaniu klasycznego równania przewodnictwa cieplnego.**

Z bilansu energii wewnętrznej uzyskuje się równania konstytutywne, związki między naprężeniami i entropią a odkształceniami i przyrostem temperatury

$$\sigma_{ij} = 2\mu\varepsilon_{ij} - (\lambda\varepsilon_{kk} - \gamma\Theta)\delta_{ij}, \tag{11}$$

$$S = \gamma\varepsilon_{ij} + \frac{c_\varepsilon}{T_0}\Theta. \tag{12}$$

Nierówność Clausiusa-Duhema prowadzi nas do prawa Fouriera przewodnictwa cieplnego

$$q_i = -k\Theta_{,i}. \tag{13}$$

Z bilansu entropii oraz z równania ruchu otrzymuje się równanie przewodnictwa cieplnego oraz równanie przemieszczeniowe

$$\nabla^2\Theta - \frac{1}{\varkappa}\dot{\Theta} - \xi \operatorname{div} \dot{u} = -\frac{Q}{\varkappa}, \tag{14}$$

$$\mu\nabla^2 u + (\lambda + \mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} u + X = \varrho\ddot{u} + \gamma \operatorname{grad}\Theta. \tag{15}$$

Powyższe równania stanowią komplet równań termosprężystości. Równania te są ze sobą sprzężone. Równanie (15) jest dla $\gamma = 0$ równaniem hiperbolicznym, równanie (14) dla $\xi = 0$ równaniem parabolicznym. Układ równań (14) (15) jest złożonym układem równań hiperboliczno-parabolicznym.

Przyczynami wywołującymi odkształcenie ciała i zmianę temperatury są tu siły masowe i źródła ciepła, zadane warunki brzegowe oraz warunki początkowe.

Termosprężystość staje się uogólnieniem i syntezą dwu dotąd oddzielnie rozwijających się dziedzin, przewodnictwa cieplnego w ciałach stałych oraz teorii sprężystości. Termosprężystość ma fundamentalne znaczenie tam, gdzie głównym celem badań jest określenie energii dysypacji. Znaczenie termosprężystości polega przede wszystkim na jej walorach poznawczych; pozwala ona głębiej wniknąć w mechanizm procesu odkształcenia, powiązanego z efektami termicznymi w ciele stałym.

Równania (14) (15) zawierają cały szereg przypadków szczególnych. Jeżeli przyczyny wywołujące odkształcenie i zmianę temperatury zmieniają się bardzo wolno w czasie, to można pominąć w równaniu (15) człon inercyjny $\varrho\ddot{u}$. Równania (14) (15) pozostają nadal sprzężone. Rozprzężenie równań termosprężystości następuje jedynie w przypadku procesu stacjonarnego. W tym przypadku równanie przewodnictwa cieplnego staje się równaniem Poissona; równanie przemieszczeniowe jest równaniem typu eliptycznego.

Jeśli przyjąć, że $\dot{S} = 0$, co pociąga za sobą $q = 0$, $h = 0$ oraz

$$\Theta = -\frac{\xi}{c\varrho}\operatorname{div}\mathbf{u}; \tag{16}$$

to równania (14) (15) przechodzą na równania klasycznej elastodynamiki (3). Jeśli mamy do czynienia z zagadnieniem statycznym, to przy $\Theta = 0$, $T = T_0$ oraz $h = 0$, otrzymamy równania (1). Wreszcie pominięcie członu dylatacyjnego $\eta\operatorname{div}\mathbf{u}$ w równaniu (14) prowadzi do równań teorii naprężeń termicznych.

Równania termosprężystości są bardzo złożone i trudne do rozwiązania. Rozseparowanie równań termosprężystości polega na zastosowaniu dekompozycji wektora przemieszczenia sił masowych na część potencjalną i solenoidalną.

$$\begin{gathered} \mathbf{u} = \operatorname{grad}\Phi + \operatorname{rot}\Psi \qquad X = \varrho(\operatorname{grad}\vartheta + \operatorname{rot}\chi) \\ \Box_1^2\Phi = m\Theta - \frac{1}{c_1^2}\vartheta \qquad D\Theta - \eta\nabla^2\dot{\Phi} = \frac{Q}{\varkappa}, \qquad \Box_2^2\Psi = -\frac{1}{c_2^2}\chi. \end{gathered} \tag{17}$$

W ten sposób równanie termosprężystości zastąpimy układem równań (H. DERESIEWICZ, H. ZORSKI [5] [6]):

$$(\Box_1 D - \eta\gamma\partial_t\nabla^2)\Phi = -\varrho D\vartheta - \gamma\varrho h, \tag{18}$$

$$\Box_2\Psi = -\varrho\chi, \tag{19}$$

gdzie

$$\Box_1 = (\lambda+2\mu)\nabla^2\varrho\partial_t^2 \qquad \Box_2 = \mu\nabla^2 - \varrho\partial_t^2, \qquad D = k\nabla^2 - c_\varrho\partial_t.$$

Równanie (19) opisuje falę poprzeczną. W nieskończonej przestrzeni termosprężystej fala podłużna jest generowana przez część potencjalną sił masowych i przez pole temperatury: fala poprzeczna przez część solenoidalną sił masowych. Fala poprzeczna jest niezaburzona przez pole temperatury.

Zauważmy, że funkcja Θ spełnia równanie

$$(20)\qquad (\square_1 D-\eta\gamma\partial_t\nabla^2)\Theta = -\frac{1}{\varkappa}\square_1^2 Q-\frac{1}{c_1^2}\eta\partial_t\nabla^2\vartheta \quad c_1^2 = \frac{\lambda+2\mu}{\varrho}.$$

Budowa tego równania jest identyczna z równaniem (18); różnica polega na prawych stronach tego równania.

Równanie jednorodne fali podłużnej (18) daje się przedstawić jak to wykazali L. BRUN [7] i J. IGNACZAK [8] w sposób analogiczny do rozwiązania T. BOGGIO [9] w elastodynamice klasycznej.

Wróćmy do równań termosprężystości. Przedstawmy jednorodne równanie przewodnictwa cieplnego (14) w ten sposób, aby człon zawierający pochodną czasową dylatacji znalazł się po prawej stronie tego równania. Funkcję $\eta \operatorname{div}\dot{u}$ potraktujemy jako źródło ciepła w klasycznym równaniu przewodnictwa cieplnego. Rozwiązanie tego równania w nieskończonej przestrzeni termosprężystej przedstawimy w następującej postaci

$$(21)\qquad \Theta(x,t) = \int_0^t dt \int_V G(x',x,t-\tau)\frac{\partial}{\partial\tau}\operatorname{div}u(x',\tau)dV(x'),$$

gdzie

$$G(x,x',t) = -\frac{\eta}{8c_\varrho(\pi\varkappa)^{\frac{1}{2}}}\exp\left(-\frac{R^2}{4\varkappa t}\right),$$

$$R = |x'-x|,\quad \varkappa = \frac{c_\varrho}{k}.$$

Wstawienie funkcji Θ ze wzoru (21) do równania przemieszczeniowego (15) prowadzi do układu równań różniczkowo-całkowych w przemieszczeniach (H. ZORSKI [10]).

Analogon do rozwiązania Cauchy-Kowalewskiej-Somigliano został w termosprężystości podany niezależnie od siebie przez S. KALISKIEGO [11], J. PODSTRIGACZA [12] i D. RÜDIGERA [13].

Wprowadzając funkcję wektorową φ i skalarną τ przyjmujemy następującą reprezentację przemieszczenia u i wzrostu temperatury Θ

$$(22)\qquad u = \Omega\varphi-\operatorname{grad}\operatorname{div}(\Gamma\varphi)+\gamma\operatorname{grad}\tau,$$

$$(23)\qquad \Theta = \gamma\eta\operatorname{div}\square_2\dot{\varphi}+\square_1\tau,$$

gdzie

$$\Omega = \square_1 D-\eta\gamma\partial_t\nabla^2,\quad \Gamma = (\lambda+\mu)D-\gamma\eta\partial_t.$$

Wstawienie powyższe reprezentacji do równań termosprężystości (14) (15) prowadzi do równań falowych

$$(24)\qquad \square_2\Omega\varphi+X = 0,$$

$$(25)\qquad \Omega\tau+\varrho h = 0.$$

Powyższe równania są bardzo wygodne do wyznaczenia funkcji Greena w nieskończonej przestrzeni termosprężystej.

Obecnie termosprężystość stanowi już rozwiniętą teorię polowa. Sformułowane zostały metody rozwiązania układu równań (14) (15) oraz niektóre podstawowe ogólne twierdzenia.

Z tych ogólnych twierdzeń na plan pierwszy wysuwa się zasada prac wirtualnych, sformułowana przez M. A. BIOTA [14]. Zasada ta stanowi kombinację zasady prac wirtualnych Lagrange'a dla teorii sprężystości (z członem termicznym) z zasadą wariacyjną dla zjawiska przewodnictwa cieplnego. M. A. Biot w sformułowanej przez siebie zasadzie wprowadza funkcję wektorową H, związaną z entropią oraz z wektorem przepływu ciepła następującymi zależnościami

$$S = -\operatorname{div} H, \quad q = T_0 \dot{H}. \tag{26}$$

Zasada prac wirtualnych termosprężystości ma postać (przy $h = 0$)

$$\delta(\mathscr{W}+\mathscr{P}+\mathscr{D}) = \int_V (X_i-\varrho\ddot{u}_i)\,\delta u_i dV + \int_A p_i du_i dA - \int_A \Theta n_i \delta H_i dA. \tag{27}$$

Tutaj $\mathscr{W}$ jest pracą odkształcenia, $\mathscr{P}$ potencjałem cieplnym, a $\mathscr{D}$ funkcją charakteryzującą dysypację energii.

Znane są jeszcze inne sformułowania zasad wariacyjnych. Zwrócić należy uwagę na twierdzenie wariacyjne G. HERMANNA [15], D. IEŞANA [16], R. E. NIKELL'A i J. L. SACKMANN'A [17] oraz P. RAFALSKIEGO [18]. Są to uogólnienia znanych z elastodynamiki klasycznej twierdzeń wariacyjnych. Twierdzenie wariacyjne dla kwazistatycznych zagadnień termosprężystych podali V. IONESCU-CAZIMIR [19] oraz H. BEN-AMOZ [20].

Wróćmy do zasady prac wirtualnych M. A. Biota (27) i załóżmy, że przyrosty δu_i, $\delta\varepsilon_{ij}$, δH_i pokrywają się z przyrostami rzeczywistymi występującymi przy przejściu od chwili t do $t+dt$. W tym przypadku otrzymamy z zasady prac wirtualnych twierdzenie energetyczne

$$\frac{d}{dt}(\mathscr{K}+\mathscr{P}+\mathscr{W})+\chi_T = \int_V X_i v_i dV + \int_A p_i v_i dA + \frac{k}{T_0}\int_A \Theta\Theta_{,n} dA. \tag{28}$$

W powyższym wyrażeniu $\mathscr{K}$ przedstawia energię kinetyczną, $\mathscr{W}$ pracę odkształcenia a χ_T jest funkcją dysypacji

$$\chi_T = kT_0 \int_V \left(\frac{\Theta_{,c}}{T_0}\right)^2 dV. \tag{29}$$

Równanie (28) przedstawia bilans energii w ujęciu globalnym (przy $h = 0$). Podstawowe twierdzenie energetyczne wykorzystał J. H. WEINER [21] do określenia jednoznaczności rozwiązań równań termosprężystości. Zagadnieniem tym zajmowali się jeszcze R. J. KNOPS i L. E. PAYNE [22] oraz L. BRUN [23].

Ważną rolę, tak przy rozwiązywaniu równań termosprężystości przy użyciu funkcji Greena jak i w twierdzeniu o istnieniu rozwiązania odgrywa twierdzenie o wzajemności prac. Zostało ono obmyślone przez V. IONESCU-CAZIMIR [24]. Twierdzenie to, w którym występują dwa niezależne od siebie układy przyczyn i skutków, ma następującą postać

$$\begin{aligned} \eta\varkappa\left\{\int_V (X_i\odot u_i'-X_i'\odot u_i)dV + \int_A (p_i\odot u_i'-p_i'\odot u_i)dA\right\} &= \\ = \gamma\int_V (Q*\Theta'-Q'*\Theta)dV + \gamma\varkappa\int_A (\vartheta'*\Theta_{,n}-\vartheta*\Theta'_{,n})dA. \end{aligned} \tag{30}$$

W równaniu tym wprowadziliśmy następujące oznaczenia splotowe

$$X_i \odot u_i' = \int_0^t X_i(x, t-\tau) \frac{\partial u_i'(x, \tau)}{\partial \tau} d\tau, \tag{31}$$

$$Q * \Theta' = \int_0^t Q(x, t-\tau) \Theta'(x, \tau) d\tau, \text{ i.t.d.} \tag{32}$$

Twierdzenie o wzajemności prac zawiera szereg przypadków szczególnych, między innymi twierdzenie O. GRAFFIEGO [25] dla elastodynamiki i twierdzenie o wzajemności prac dla klasycznego równania przewodnictwa cieplnego.

W. NOWACKI [26] wychodząc z twierdzenia o wzajemności prac podał uogólnione na termosprężystość twierdzenie Somigliana i Greena; podał wreszcie rozszerzone na termosprężystość twierdzenie Mayziela.

Zagadnienie mieszanych warunków dla termosprężystości zostało rozwiązane przez W. NOWACKIEGO [26] poprzez sprowadzenie zagadnienia do rozwiązania układu równań całkowo-różniczkowych. Zasługą W. NOWACKIEGO [27] jest wreszcie wykorzystanie rozwiązań teorii naprężeń cieplnych do rozwiązania zagadnień termosprężystości.

Ważnym zagadnieniem osobliwych równań całkowych termosprężystości zajęli się we wspólnej pracy J. IGNACZAK i W. NOWACKI [28]. Uzyskane równania całkowe są osobliwymi równaniami całkowymi Fredholma drugiego rodzaju. Przedstawiono proces budowania przybliżonych rozwiązań równań termosprężystości przez wykorzystanie tzw. kanonicznych, funkcjonalnych równań całkowych.

Ważnym zagadnieniem stało się przekształcenie falowych równań różniczkowych dla potencjałów sprężystych Φ, Ψ i temperatury Θ w postaci wyrażeń całkowych (rozszerzenie znanych z elastodynamiki twierdzeń Kirchhoffa, Webera, Poissona i Volterry). Uzyskanie tak uogólnionych twierdzeń było przedmiotem prac W. NOWACKIEGO [29, 30].

Podstawowe zagadnienie termosprężystości, dowód twierdzenia o istnieniu rozwiązań równań różniczkowych termosprężystości stał się przedmiotem kilku prac. I tak W. D. KUPRADZE i T. W. BURCZUŁADZE [31] przedstawili dowód istnienia rozwiązań dla przypadku drgań ustalonych i czterech podstawowych typów warunków brzegowych. Zagadnienia brzegowe zostały doprowadzone do osobliwych równań całkowych przy pomocy alternatywy Fredholma dowiedziono istnienie ich rozwiązań. Rozpatrzono zagadnienie wewnętrzne i zewnętrzne. Ostatnio, w znakomitej monografii autorów: W. D. KUPRADZE, T. G. GEGELIA, M. D. BASZELISZWILI i T. W. BURCZUŁADZE [32], poświęconej przestrzennym zagadnieniom teorii sprężystości i termosprężystości, ukazał się obszerny rozdział dotyczący dowodu istnienia dla zagadnień dynamicznych periodycznych i również aperiodycznych. Na uwagę zasługuje również praca C. M. DAFERMOSA [33] poświęcona dowodowi istnienia oraz asymptotycznej stabilności rozwiązań w odniesieniu do ciała anizotropowego i niejednorodnego.

Liczne są prace dotyczące propagacji fal harmonicznych w nieograniczonym i ograniczonym obszarze sprężystym. Kluczowe znaczenie ma tu praca P. CHADWICKA i I. N. SNEDDONA [34]. W pracy tej autorzy zanalizowali w sposób bardzo szczegółowy wpływ powiązanych ze sobą zmian objętościowych i cieplnych na postać fal harmonicznych. Wykazali, że fale poprzeczne nie mają wpływu na efekty termiczne. Istnieją dwie odrębne fale podłużne, z których jedna w swej naturze jest podobna do czysto podłużnej fali rozpraszanej i pochłanianej przez ośrodek, druga zaś jest podobna do fali czysto termicznej.

Zagadnienie propagacji naprężeń termicznych w prętach metalowych, wywołanych bądź wzbudzeniem termicznym, bądź mechanicznym, zostało rozpatrzone przez I. N. SNEDDONA [35]. Analogiczne zagadnienie dla półprzestrzeni sprężystej i warstwy sprężystej zostało opracowane przez W. NOWACKIEGO [36]. Zagadnienie propagacji harmonicznych fal kulistych i walcowych w nieskończonej przestrzeni termosprężystej rozwiązane zostało przez W. NOWACKIEGO [37]. Ważne zagadnienie rozwiązań podstawowych (funkcje Greena) dla sił i źródeł ciepła zmieniających się w sposób harmoniczny w czasie, zostało opracowane przez W. NOWACKIEGO [38] oraz G. EASONA i I. N. SNEDDONA [39].

Zagadnieniem propagacji fal powierzchniowych Rayleigha w ośrodku termosprężystym przy swobodnej wymianie cieplnej w płaszczyźnie ograniczającej półprzestrzeń zajął się F. J. LOCKETT [40]. Zagadnienie propagacji fal termosprężystych harmonicznych w warstwie sprężystej przedyskutowali W. NOWACKI i M. SOKOŁOWSKI [41].

Fale harmoniczne podłużne rozprzestrzeniające się w pełnych i wydrążonych walcach stały się przedmiotem pracy F. J. LOCKETTA [42]. J. IGNACZAK i W. NOWACKI [43] rozwiązali zagadnienie drgań wymuszonych harmonicznych w walcach o przekroju prostokątnym, wywołanych ich rozgrzaniem oraz drganiami wymuszonymi płyt średniej grubości. J. IGNACZAK [44] podał odmienną drogę rozwiązania zagadnienia propagacji fal w pręcie półnieskończonym, dogodną w przypadku jednorodnych warunków brzegowych ale niejednorodnych warunków początkowych.

Zagadnienie osiowo-symetryczne, odnoszące się do koncentracji naprężeń, wywołanych płaskim przepływem ciepła (przepływ ten zmienia się w sposób harmoniczny w czasie) wokół pustki walcowej i kulistej, było przedmiotem pracy J. IGNACZAKA i W. NOWACKIEGO [45].

Zagadnienie propagacji naprężeń w półprzestrzeni termosprężystej, ogrzanej na powierzchni lub pobudzonej do drgań siłami mechanicznymi, ma już obszerną literaturę. Zagadnienie osiowo-symetryczne i płaskie Lamba, dla przyczyn harmonicznie zmiennych w czasie, zostało opracowane przez W. NOWACKIEGO [47]. Zagadnienie nierównomiernego ogrzania płaszczyzny ograniczającej półprzestrzeń sprężystą zostało opracowane przez G. EASONA i J. N. SNEDDONA [39] i W. NOWACKIEGO [40].

Dodać jednak należy, że uzyskane tu ogólne rozwiązania mają w dużej mierze charakter rozwiązań formalnych; na tym etapie nie udało się nawet dla najprostszych przypadków uzyskać wyników w postaci zamkniętej przy użyciu znanych funkcji przeważnie wyniki uzyskano w postaci całek niewłaściwych.

Zanotować należy tu kilka prac odnoszących się do przybliżonego rozwiązania tzn. problemu W. I. DANIŁOWSKIEJ [49]. Problem polega na nagłym przyłożeniu temperatury do powierzchni półprzestrzeni sprężystej. Został on rozwiązany przez W. I. Daniłowską w ramach teorii naprężeń cieplnych. Rozszerzenie tego problemu na termosprężystość jest owocem prac kilku uczonych (LESSEN [50], R. B. HETNARSKI [51], [52], MUKI i BRAUER [53]) którzy podali swe rozwiązania stosując metodę małych perturbacji oraz stosując transformację Laplace'a dla małych czasów.

Jak z powyższego przeglądu prac wynika, rozwiązane zostały dotąd zagadnienia najprostsze ale i najważniejsze. Tym niemniej mamy do czynienia już ze spójną syntezą pola temperatury i pola odkształceń.

Powyżej przedstawiona termosprężystość bazowała na klasycznym modelu teorii sprężystości. Podstawowymi funkcjami pola były przemieszczenia $\boldsymbol{u}$ i przyrost temperatury Θ. W latach 60-tych renesansu doznała mikropolarna teoria sprężystości, obmyślona na początku tego wieku przez braci Cosseratów (podstawowe ich dzieło „Theorie des corps deformables" pochodzi z 1909 roku). Materiały mikropolarne są z grubsza mówiąc materiałami klasycznymi z dodatkowymi niezależnymi stopniami swobody dla lokalnych obrotów. Materiały te przejmują działanie sił i momentów masowych: przez element kontaktowy przenoszą działanie naprężeń siłowych i naprężeń momentowych. Obok przemieszczenia $\boldsymbol{u}$ wystąpi niezależny wektor obrotu $\boldsymbol{\varphi}$.

Teoria termosprężystości ośrodka mikropolarnego została opracowana przez W. NOWACKIEGO [54]. Dotyczy to nie tylko twierdzeń podstawowych (twierdzenie wariacyjne, twierdzenie energetyczne, twierdzenie o wzajemności prac, jednoznaczność rozwiązań itd.) ale i rozwiązań równań falowych (fale płaskie, kuliste i walcowe, rozwiązania podstawowe, zagadnienia brzegowe).

Wyniki prac W. Nowackiego zostały zebrane w IV-tym rozdziale monografii „Teoria niesymetrycznej sprężystości" PWN Warszawa, 1972.

W ostatnich latach rozwinięto termosprężystość liniową ciał bardziej złożonych niż ciało mikropolarne Cosseratów. Mam tu na myśl ośrodki hemitropowe mikropolarne (niecentrosymetryczne) oraz ośrodki mikromorficzne. Pełna teoria termosprężystości ośrodków mikropolarnych hemitropowych została obmyślona przez W. NOWACKIEGO [55], J. P. NOWACKIEGO [56], i J. LENTZA [57].

Omówmy pokrótce inne dziedziny o szerszym sprzężeniu. I tak w piezoelektryczności sprzęga się quasistatyczne pole elektryczne z polem odkształcenia i temperatury. Powstaje nowa dziedzina: piezo-termo-elektryczność. Teoria tej dziedziny została obmyślona przez R. D. MINDLINA [58] [59]; szereg twierdzeń i rozwiązań, rozszerzających tę dziedzinę podali K. MAJORKOWSKA-KNAP, L. MÜLLER, W. NOWACKI, J. P. NOWACKI, St. BRZEZIŃSKI.

Magneto-sprężystość rozwinięta przez S. KALISKIEGO i J. PETYKIEWICZA [60] rozszerzona została na magnetotermosprężystość przez W. NOWACKIEGO [61].

Obszerne omówienie wyników uzyskanych przez polskich uczonych w tej dziedzinie podane zostało przez G. MAUGINA w jego artykule przeglądowym w Int. J. Eng. Sci. [62], 1981.

Dodać należy, że termosprężystość, piezotermosprężystość oraz magneto-termosprężystość zostały obszernie omówione w monografii W. Nowackiego „Dynamic Problems of Thermoelasticity" 1966, pierwszej monografii w tej dziedzinie.

W ostatnich latach rozwinęła się dyskusja nad fizyczną zawartością klasycznego równania przewodnictwa cieplnego, które dopuszcza jedynie nieskończoną prędkość rozchodzenia się ciepła. Wielu badaczy podaje w wątpliwość to stwierdzenie i dąży do modyfikacji klasycznego równania przewodnictwa cieplnego.

W gronie osób zajmujących się tym problemem nie zabrakło badaczy polskich. Wymienić tu należy pracę S. KALISKIEGO [63].

Na uwagę wreszcie zasługują liczne prace Cz. WOŹNIAKA [64], odnoszące się do zagadnień termosprężystości ciał z więzami i ciał z mikrostrukturą.

O ile badania nasze w dziedzinie naprężeń cieplnych były liczne i skupiały wielu badaczy, w dziedzinie termosprężystości były mniej liczne i absorbowały mniejszą grupę badaczy. Były to badania na wyższym poziomie. Dotyczyły twierdzeń i metod. Co więcej podstawowe równania różniczkowe termosprężystości okazały się nowym typem równań różniczkowych fizyki matematycznej. Interesujące jest to, że typ równań hiperboliczno-parabolicznych termosprężystości występuje również w innych polach sprzężonych, w termodyfuzji ciał stałych, w magnetotermosprężystości. Tematyka badań stawała się zatem ciekawą zarówno dla mechaników jak i dla matematyków.

Interesująca była też konstrukcja syntezy dwu dziedzin fizyki fenomenologicznej. Otrzymano twierdzenie o większej ogólności. Degradacja sprzężeń prowadziła do znanych wyników.

Żałować należy, że badania w dziedzinie termosprężystości rozpoczęto o kilka lat później niż w innych ośrodkach naukowych świata, gdy część pola badań została już wyeksploatowana.

Planowanie badań było typowym planowaniem w obrębie dyscypliny.

Badania rozpoczynano od sformułowania twierdzeń podstawowych (twierdzenia wariacyjne, energetyczne, o wzajemności prac, o jednoznaczności rozwiązań i ich istnieniu). Następnie przechodzono do rozpatrzenia propagacji w ciele nieskończonym (fala płaska, walcowa i kulista) propagacji fal w ciałach ograniczonych (fale powierzchniowe) dalej funkcje Greena dla przemieszczeń i temperatury oraz zagadnienia brzegowe.

Problematykę termosprężystości rozwijano u nas intensywnie w latach 1957 - 1967. Okres 10-ciu lat okazał się wystarczający do spenetrowania i wyeksploatowania tej dziedziny. Oczywiście obowiązywał tu wymóg maksymalnej koncentracji badań.

Prace wykonywane były przez grono pracowników naukowych IPPT—PAN, Instytutu Mechaniki UW oraz Wojskowej Akademii Technicznej. Byli to głównie samodzielni pracownicy nauki (profesorowie i docenci) oraz doktoranci. Miejscem spotkań i dyskusji były seminaria prowadzone w wymienionych instytucjach oraz corocznie organizowane konferencje krajowe mechaniki. Własnymi siłami zorganizowaliśmy dwa międzynarodowe sympozja, sympozjum Euromech VIII w Jabłonnie w 1967 r. oraz sympozjum termomechaniki w CISM w Udine w 1973 roku.

Zorganizowano ponadto dwie szkoły letnie (krajowe), na których prezentowano te wyniki, które mogły znaleźć bezpośrednie zastosowanie.

Stymulatorem badań było również współzawodnictwo międzynarodowe. Nawiązaliśmy kontakty z centrami badań w Glasgow (prof. I. N. Sneddon) w Wiedniu (prof. H. Parkus) w Providence (prof. E. Sternberg) w Kijowie (akad. AN Kowalenko) i Tbilisi (prof. W. D. Kupradze). Istniała stała wymiana profesorów i stażystów jak i pełna informacja o pracach i wynikach naukowych.

Dążono do możliwie rychłej dokumentacji wyników. Większość prac ukazywała się w Biuletynie Zagranicznym PAN (seria nauk technicznych) a to ze względu na krótki okres (4 miesięcy) między oddaniem pracy do redakcji i jej opublikowaniem.

Szereg prac opublikowano w „Archive of Mechanics" oraz w „Proceedings of Vibrations Problems". Liczne prace ukazały się we wiodących czasopismach zagranicznych (np. Journal of Elasticity, Journal of Thermal Stresses.).

Dążono do możliwie rychłego podsumowania wyników w postaci monografii. W naszym szczególnym przypadku termosprężystości, termopiezoelektryczności i termomagnetosprężystości była to monografia W. Nowackiego p.t. „Dynamiczne zagadnienia termosprężystości" 1966 r., przełożona później na język rosyjski w 1970 r. oraz na język angielski w 1975 r.

Interesujący jest fakt, że nasze prace z termosprężystości nie figurowały w planie prac rządowych i węzłowych. Badania nie były dodatkowo finansowane.

Organem koordynującym badania naukowe i wytyczającym kierunki rozwoju mechaniki w Polsce jest Komitet Mechaniki PAN. Stanowi on krajową reprezentację naukową mechaniki, jest najbardziej autorytatywnym organem stymulującym jej rozwój. Ostatnie wytyczne dotyczące rozwoju mechaniki zostały podjęte przez Komitet w 1973 r., podczas Kongresu Nauki Polskiej.

Obecnie punkt ciężkości badań nad termosprężystością przesunął się na pola sprzężone, w których ważną rolę odgrywa pole temperatury. Atakowane są problemy magnetotermosprężystości, problemy oddziaływania pola temperatury w stałych dielektrykach i ferromagnetykach oraz zagadnienia termodyfuzji w ciałach stałych.

Dalszy rozwój termosprężystości (w związku z polami połączonymi) jest w naszej mechanice zapewniony. Została wypracowana interesująca tematyka, istnieje znakomite grono badaczy. Powstały ośrodki krajowe, specjalizujące się w różnych kierunkach termomechaniki. Wzrosło znaczenie mechaniki polskiej w skali międzynarodowej.

Jestem szczęśliwy, że w rozwoju termosprężystości danem mi było z Wami (kolegami i współpracownikami) uczestniczyć, a w pewnej mierze na rozwój ten oddziaływać.

Literatura cytowana w tekście

1. H. C. Duhamel, *Second memoire sur les phénomenes thermomecaniques.* J. de l'Ecole Polytechn. **15** (1837) 1.
2. W. Voigt, *Lehrbuch der Kristallphysik.* Teubner, (1910).
3. H. Jeffreys, *The thermodynamics of an elastic solid.* Proc. Camb. Phil Soc. **26** (1930) 101.
4. M. A. Biot, *Thermoelasticity and irreversible thermodynamics.* J. appl. Phys. **27**, (1956) 240.
5. H. Deresiewicz, *Solution of the equation of thermoelasticity*; in Proc. Third U.S. Nat. Congr. Appl. Mech. 1958.
6. H. Zorski, *Singular solutions for the thermoelastic media.* Bull. Acad. Pol. Sci. Ser. Sci. Techn. **6**, 1958, 331.
7. L. Brun, *L'onde simple thermoelastique lineaire.* Journal de Mecanique. **14**, 5 (1975), 863.
8. J. Ignaczak, *Thermoelastic counter part to Boggio's theorem of linear elastodynamics.* Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Sci. Techn. **24**, 3 (1976), 129.
9. T. Boggio, *Sull integrazione di alcuna equationi lineari alle derivate parziale.* Ann. Mat. ser. **III, 8** (1903), 181.
10. H. Zorski, *On a certain property of thermoelastic media.* Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Sci. Techn. **6, 6**, (1958).
11. S. Kaliski, *Some boundary value problems of the dynamical theory of elasticity.* Warszawa, W.A.T., 1957.

12. Y. S. PODSTRIHACZ, *General solution of the non-steady thermoelastic problem.* Prykład. Mekh. **6**, (1960), 215.
13. D. RÜDIGER, *Bemerkung zur Integration der thermo-elastischen Grundgleichungen.* Osterr. Ing. Arch. **18**, (1964), 1.
14. M. A. BIOT, *Thermoelasticity and irrevisible thermodynamics.* J. appl. Phys. **27**, (1956), 240.
15. G. HERMANN, *On variational principles in thermoelasticity and heat conduction.* Quart. Appl. Mech. **21**, 2, (1963).
16. D. IEŞAN, *Principles variationelles dans la theorie de la thermoelasticité couple.* An. Stiint. Univ. Iasi, Seca, **12**, 2, (1966), 439.
17. R. E. NICKELL, J. L. SACKMAN, *Variational principles for linear coupled thermoelasticity*, Quart. Appl. Math. **26**, 1 (1968).
18. V. IONESCU-CAZIMIR, *O theorema variationala pentru problema thermoelasticitatii cuplate.* An. Univ. Bucuresti. Ser. stiint. Natur. Mat.-mech. **15**, 2 (1966), 33.
19. P. RAFALSKI, *A variational principle for the coupled thermoelastic problem.* Intern. J. Engng. Sci. **6**, 8 (1968), 465.
20. M. BEN-AMOZ, *On a variational theorem in coupled thermoelasticity.* Trans. ASME E **32**, 4 (1965), 243.
21. J. H. WEINER, *A uniqueness theorem for the coupled thermoelastic problem.* Q. appl. Math. **15**, (1957), 102.
22. R. J. KNOPS, L. E. PAYNE, *On uniqueness and continuous dependence in dynamical problems of linear thermoelasticity.* Int. J. Solids Structs **6**, (1970).
23. L. BRUN, *Sur l'unicité et thermoelasticité dynamique et diverses expressions analogues a la formule de Clapeyron.* Compt. rend. Acad. Sci. Paris **261**, (1965), 2584.
24. V. IONESCU-CAZIMIR, *Problem of linear coupled thermoelasticity* -I. Bull. Acad. Pol. Sci., Ser. Sci. Tech. **12**, (1964), 473.
25. D. GRAFFI, *Sui teoremi di reciprocita nei fenomeni non stazionari.* Atti Acad. Sci. Bologna **10**, Ser. 11, (1963), 33.
26. W. NOWACKI, *Dynamiczne zagadnienia termosprężystości.* P.W.N. Warszawa, 1966.
27. W. NOWACKI, *Dynamic Problems of thermoelasticity.* P.W.N. — Nordhoff. Int. Publ. — Leyden, (1975).
28. J. IGNACZAK, W. NOWACKI, *Równania całkowe sprzężonej termosprężystości.* Rozprawy Inżynierskie, 4, 13, (1965).
29. W. NOWACKI, *A dynamical problem of Thermoelasticity.* Arch. Mech. Stos. **3**, 9, (1957).
30. W. NOWACKI, *Thermoelastic waves in unbounded medium.* Problems of Hydrodynamics and Continuum Mechanics. SIAM, Philadelphia, Pennsylvania, 1969.
1. W. D. KUPRADZE i T. W. BURCZUŁADZE, *Graniczne zadaczi termouprugosti*, Differencjalnyje uramienye. **5**, 1 (1969), 3.
32. W. D. KUPRADZE, T. G. GEGELIA, M. O. BASZELEISZWILI, T. W. BURCZUŁADZE, *Trechmiernyje zadaczi matematiczeskoj teorii uprugosti i termouprugosti.* Izd. „Nauka", Moskwa, (1976).
33. C. M. DAFERMOS, *On the existence and the asymptotic stability of solution in the equation of linear thermoelasticity.* Arch. Rational Mech. Anal. **29**, (1968), 241.
34. P. CHADWICK, I. N. SNEDDON, *Plane waves in elastic solid conducting heat.* J. Mech. Phys. of Solids. **6**, (1958), 223.
35. I. N. SNEDDON, *On the propagation of thermal stresses in the metalic rods.* Proc. Roy. Soc. Edinbourgh. Sec. A, **65**, 9, (1959).
36. W. NOWACKI, *Some dynamic problems in thermoelasticity.* Arch. Mech. Stos. **1**, 11, (1059).
37. W. NOWACKI, *Dynamiczne zagadnienia termosprężystości.* PWN Warszawa (1966). Rozdziały 2.3 i 2.4.
38. W. NOWACKI, *Green functions for the thermoelastic medium*, I, II. Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Sci. Techn. **12**, 6 (1964).
39. G. EASON, I. N. SNEDDON, *The dynamic stresses produced in elastic bodies, by uneven heating.* Proc. Roy. Sci. Edinbourgh **65**, Ser. A. (1959).

40. F. J. LOCKETT, *Effect of thermal properties of a solid on the velocity of Rayleigh waves*. J. Mech. Phys., **7**, (1958).
41. W. NOWACKI, M. SOKOŁOWSKI, *Propagation of thermoelastic waves in plates*. Arch. Mech. Stos. **9**, 6 (1959).
42. F. J. LOCKETT, *Longitudinal elastic waves in cylinders and tubes including thermoelastic effects*. Proc. Edinbourgh Math. Soc., part **3**, 11 (1959).
43. J. IGNACZAK, W. NOWACKI, *The plane dynamic problem of thermoelasticity*. Proc. Vibr. Probl. **4**, 2 (1961).
44. J. IGNACZAK, *Note on the propagation of thermal stresses in a long metalic rod*. Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Sci. Tech. **7**, 5 (1959).
45. J. IGNACZAK, W. NOWACKI, *The problem of concentration of periodic thermal stresses at cylindrical and spherical cavities in uniform plane heat flow*. Arch. Mech. Stos. **6**, 13 (1961).
47. W. NOWACKI, *Dynamiczne zagadnienia termosprężystości*. PWN — Warszawa (1966). Rozdział 2.9 i 2.10.
48. W. NOWACKI, *Dynamiczne zagadnienia termosprężystości*. PWN — Warszawa (1966). Rozdział 2.11.
49. W. DANIŁOWSKAJA, *Tiemperaturnyje napriażenija w uprugom poluprostranstwie woznikajuszczyje wsledstwie wniezapnogo nagriewa granicy*. Prikł. Mat. Mech. **14**, 3 (1950).
50. M. LESSEN, *The motion of a thermoelastic solid*. Quart. Appl. Math. **15**, (1957).
51. R. B. HETNARSKI, *Coupled thermoelastic problem for the half-space*. Bull. Acad. Polon. Sci. Sèr. Sci. Techn. **12**, 1 (1964).
52. R. B. HETNARSKI, *Solution of the coupled thermoelastic problem in the form of series of functions*. Arch. Mech. Stos. 6, 4 (1964).
53. R. MUKI, S. BRAUER, *Coupling effects in transient thermoelastic problems*. Österr. Ing. Archiv., **16**, (1962).
54. W. NOWACKI, *Couple stresses in the theory of thermoelasticity* (III). Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Sci. Techn. **14**, 8, (1966).
55. W. NOWACKI, *Some theorems of assymetric thermoelasticity*. J. Math. Phys. Sciences, **2**, 2 (1968).
56. J. P. NOWACKI, W. NOWACKI, *Some problems of hemitropic micropolar continuum*. Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Sci. Tech. **25**, 4 (1977).
57. J. LENTZ, *Das von einer punktformigen Warmequelle erzeugte Verschiebungs und Drehvektor in Cosserat-Kontinuum*. Acta Mech. **24** (1976), 25.
58. R. D. MINDLIN, *On the equations of motion of piezoelectric crystals*. In Problems of Continuum Mechanics. SIAM. Philadelphia, Pennsylvania (1961).
59. R. D. MINDLIN, *Elasticity piezoelectricity and lattice dynamics*. J. of Elasticity **2**, 4, (1972), 217.
60. S. KALISKI, PETRYKIEWICZ, *Equations of motion coupled with the field of temperature in an magnetic field, involving mechanical and electromagnetic relaxation for anisotropic bodies*. Proc. Vibr. Problems, **1**, 4 (1959).
61. W. NOWACKI, *The problems of linear coupled magnetothermoelasticity*. I, II. Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Sci. Techn. **13**, 4, (1965) oraz **13**, 6, (1965).
62. G. MAUGIN, *Wave motion in magnetizable solids*. Int. J. Engng. Sci. **19**, (1981), 321.
63. S. KALISKI, *Wave equation of heat conduction*. Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Sci. Techn. **13**, (1965), 211.
64. Cz. WOŹNIAK, *Thermoelasticity of bodies with microstructure*. Arch. Mech. Stos. **19**, 3, (1967), 335.