MECHANIKA
TEORETYCZNA
I STOSOWANA
1/2, 20 (1982)

METODY OKREŚLANIA LICZBY BIOTA I WSPÓŁCZYNNIKA PRZEJMOWANIA CIEPŁA

KRZYSZTOF GRYSA (POZNAŃ)

Instytut Mechaniki Technicznej
Politechniki Poznańskiej

Spis oznaczeń

$A_0 f(t)$	— funkcja obliczona na podstawie funkcji $S_0\Theta$, $S_0 T$, itd.
$A_1 f(t)$	— funkcja obliczona na podstawie funkcji $S_1\Theta$, $S_1 T$, itd.
α	— współczynnik przejmowania ciepła
$\alpha_n = \pi n$	
α_t	— współczynnik rozszerzalności cieplnej
$\mathrm{Bi} = \frac{\alpha h}{\lambda}$	— liczba Biota
β	— parametr kształtu; $= +0.5, 0, -0.5$ dla warstwy, walca lub kuli
$c^2 = \frac{2Gh^2(1-\nu)}{\varrho\varkappa^2(1-2\nu)}$	
c_p	— ciepło właściwe przy stałym ciśnieniu.
Δ_T	— krok czasowy przy pomiarze temperatury medium grzejącego
Δ_Θ	— krok czasowy przy pomiarze WOT
Δ_u	— krok czasowy przy pomiarze WOP
$\varepsilon_{\xi\xi}(\xi, \tau)$	— odkształcenie
G	— moduł ścinania
h	— grubość warstwy
$\mathrm{I}_\nu(x)$	— zmodyfikowana funkcja Bessela I rodzaju, rzędu ν
$J_\nu(x)$	— funkcja Bessela I rodzaju, rzędu ν
$k = \frac{1+\nu}{1-\nu}\alpha_t h$	
$\varkappa = \frac{\lambda}{\varrho c_p}$	— współczynnik dyfuzyjności temperaturowej
λ	— współczynnik przewodnictwa cieplnego
$\lambda_n = \frac{\pi}{2}(2n-1)$	
μ_n	— kolejne pierwiastki równania $J_\beta(\mu) = 0$
ν	— liczba Poissona
$q(\xi, \tau)$	— strumień ciepła

ϱ	— gęstość
s	— parametr transformacji Laplace'a
$S_0 f(t)$	— przybliżenie funkcji $f(t)$ przez funkcję schodkową
$S_1 f(t)$	— przybliżenie funkcji $f(t)$ przez funkcję odcinkowo-liniową
$\sigma_{\xi\xi}(t)$	— naprężenie
t	— czas
$T_f(\tau)$	— temperatura medium grzejącego warstwę, obliczana względem temperatury odniesienia T_0
$T_p = T_f(p\Delta_T)$	— wynik pomiaru temperatury medium grzejącego w chwili czasu $p\Delta_T$, $p = 1, \ldots, P$
$\tau = \frac{\varkappa t}{h^2}$	— liczba Fouriera (bezwymiarowy czas)
$\Theta(\xi, \tau)$	— temperatura punktów warstwy, obliczana względem temperatury odniesienia T_0
$\Theta_k = \Theta(\xi^*, k\Delta_\Theta)$	— wynik pomiaru temperatury w punkcie wewnętrznym ciała w chwili czasu $k\Delta_\Theta$, $k = 1, \ldots, K$
$\bar{\Theta}, \bar{T}, \bar{u}, \ldots$	— transformaty Laplace'a funkcji $\Theta, T, u, \ldots$
$u(\xi, \tau)$	— przemieszczenia punktów warstwy
$u_r = u(\xi^*, r\Delta_u)$	— wynik pomiaru przemieszczenia w punkcie wewnętrznym ciała w chwili $r\Delta_u$, $r = 1, \ldots, R$
WOP	— wewnętrzna odpowiedź przemieszczeniowa
WOT	— wewnętrzna odpowiedź temperaturowa
$Y_\nu(x)$	— funkcja Bessela II rodzaju rzędu ν
$\eta(x)$	— funkcja Heaviside'a
x	— współrzędna przestrzenna
$\xi = x/h$	— przestrzenna współrzędna bezwymiarowa
ξ^*	— punkt, w którym znana jest WOP lub WOT; $\xi^* \in [0, 1]$
$*$	— mnożenie splotowe

Wstęp

W wielu przypadkach w technice znajomość współczynnika przejmowania ciepła odgrywa istotną rolę. Wyznaczanie tego współczynnika jest bardzo trudne z uwagi na to, iż umieszczanie czujników (termopar czy innych) na powierzchni elementu maszyny zakłóca warunki nagrzewania. Często umieszczenie czujnika na ogrzewanej powierzchni jest bardzo utrudnione (ścianki silników odrzutowych czy spalinowych, łopatki turbin itp.) lub nawet niemożliwe (np. na powierzchniach współpracujących). Trudności związane z wyznaczaniem liczba Biota i współczynnika przejmowania ciepła są znane (por. [1], a także [2, 3] i in.), a kolejne metody ich wyznaczania, proponowane w literaturze dają — przy tym samym zestawie danych wyjściowych — często znacznie różniące się od siebie wyniki (por. [2] i [4]). Niektóre spośród proponowanych metod zawierają niedomówienia znacznie utrudniające ewentualne ich wykorzystanie (np. [5]); inne prace oferują metody bardzo złożone, dla których brak jakiejkolwiek weryfikacji eksperymentalnej czy numerycznej (por. [3]).

W niniejszej pracy rozważa się pole temperatury w warstwie o grubości h w przypadku, gdy jedna z jej powierzchni ograniczających jest cieplnie izolowana, zaś na drugiej powierzchni mamy do czynienia ze swobodną wymianą ciepła pomiędzy nośnikami ciepła, a rozważaną warstwą. Zakłada się, że temperatura poszczególnych punktów warstwy zależy tylko od odległości od powierzchni izolowanej oraz od czasu. Tak więc rozważane jest zagadnienie jednowymiarowe. Wzory, określające liczbę Biota, wyprowadzono przy wykorzystaniu transformacji Laplace'a.

Zagadnienie wyznaczania współczynnika przejmowania ciepła nazywane jest czasami zagadnieniem odwrotnym przewodnictwa ciepła (por. [2, 6] i in.). W niniejszej pracy zagadnienie to potraktowane jest nie tylko inaczej niż w pracach [2, 3, 4] czy [5], lecz także szerzej. Proponowane poniżej dwie metody określania liczby Biota i współczynnika przejmowania ciepła bazują: pierwsza — na odwrotnym zagadnieniu przewodnictwa ciepła, zaś druga — na odwrotnym zagadnieniu teorii naprężeń cieplnych. W pracy podano także możliwości uogólnienia metody na przypadek ciał o innej geometrii (kula, walec, ew. warstwa sferyczna i rura), jak również przedyskutowano inne możliwe podejścia do rozważanego problemu. Otrzymane wyniki zilustrowano przykładem numerycznym.

1. Zagadnienie odwrotne przewodnictwa cieplnego

Rozważmy jednowymiarowe zagadnienie przewodnictwa ciepła w cieplnie izotropowej warstwie o grubości h. Przyjmijmy, że oś Ox skierowana jest od dolnej powierzchni warstwy, będącej powierzchnią o równaniu $x = 0$, w górę. Ponadto założymy, że dolny brzeg warstwy jest cieplnie izolowany, zaś na brzegu górnym mamy do czynienia ze swobodną wymianą ciepła. Warunki początkowe dla temperatury przyjmiemy jednorodne. Wprowadzając bezwymiarowe współrzędne $\xi = x/h$ oraz $\tau = \varkappa t/h^2$ można sformułować następujące zagadnienie brzegowo-początkowe:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial\xi^2} - \frac{\partial}{\partial\tau}\right)\Theta(\xi, \tau) = 0, \tag{1.1}$$

$$\Theta(\xi, 0) = 0, \tag{1.2}$$

$$\left.\frac{\partial\Theta}{\partial\xi}\right|_{\xi=0} = 0, \tag{1.3}$$

$$\left.\frac{\partial\Theta}{\partial\xi}\right|_{\xi=1} = -\mathrm{Bi}[\Theta(1, \tau) - T_f(\tau)]. \tag{1.4}$$

W dalszym ciągu rozważań płaszczyznę o równaniu $\xi = \mathrm{const}$ będziemy identyfikować — z uwagi na jednowymiarowość zagadnienia — z punktem o współrzędnej ξ.

Aby wyznaczyć liczbę Biota Bi przyjmujemy, iż temperatura $T_f(\tau)$ medium grzejącego warstwę jest znaną funkcją czasu oraz że znana jest zmienność w czasie temperatury w punkcie o współrzędnej ξ^* (tzw. wewnętrzna odpowiedź temperaturowa, w skrócie *WOT*); $\xi^* \in [0, 1]$. Zarówno *WOT* jak i $T_f(\tau)$ może być przy tym dana w postaci zbioru danych dyskretnych, pochodzących z pomiarów.

Aby wyznaczyć liczbę Biota na podstawie *WOT* i T_f, należy rozwiązać zagadnienie (1.1) - (1.4). Po prostych obliczeniach otrzymujemy następującą postać transformaty Laplace'a temperatury

$$\bar{\Theta}(\xi, s) = \bar{T}_f(s) \frac{\mathrm{Bi} \cosh \xi \sqrt{s}}{\sqrt{s} \sinh \sqrt{s} + \mathrm{Bi} \cosh \sqrt{s}}. \tag{1.5}$$

Przekształcając wzór (1.5) otrzymujemy związek

$$\bar{T}_f(s) \frac{\cosh \xi \sqrt{s}}{s \cosh \sqrt{s}} = \frac{1}{s} \bar{\Theta}(\xi, s) + \frac{1}{\mathrm{Bi}} \bar{\Theta}(\xi, s) \frac{\sinh \sqrt{s}}{\sqrt{s} \cosh \sqrt{s}} \tag{1.6}$$

Odwrócenie transformat po lewej i prawej stronie związku (1.6) nie nastręcza trudności. Otrzymujemy równanie

$$T_f(\tau) * \left[1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\lambda_n} \cos(\xi \lambda_n) e^{-\lambda_n^2 \tau}\right] = \eta(\tau) * \Theta(\xi, \tau) + \frac{2}{\mathrm{Bi}} \Theta(\xi, \tau) * \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n^2 \tau},$$

skąd

$$\mathrm{Bi} = \frac{2\Theta(\xi, \tau) * \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n^2 \tau}}{T_f(\tau) * \left[1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\lambda_n} \cos(\xi \lambda_n) e^{-\lambda_n^2 \tau}\right] - \eta(\tau) * \Theta(\xi, \tau)}. \tag{1.7}$$

Załóżmy teraz, iż zarówno *WOT* jak i T_f znane są w postaci zbiorów danych dyskretnych, pochodzących z pomiarów. Przyjmijmy, że obie serie pomiarów zostały rozpoczęte w tej samej chwili czasu, która jest jednocześnie chwilą początkującą proces nagrzewania. Założymy, że kroki czasowe w obu seriach pomiarów są stałe i wynoszą, odpowiednio, Δ_Θ i Δ_T. Wówczas mamy do czynienia ze zbiorami $\{\Theta_k\}_{k=1,\ldots,K}$ oraz $\{T_p\}_{p=1,\ldots,P}$ opisującymi zmienność funkcji $\Theta(\xi^*, \tau)$ i $T_f(\tau)$ w chwilach czasu równych odpowiednio $k\Delta_\Theta$ i $p\Delta_T$. Przyjmujemy przy tym, że chwile $K\Delta_\Theta$ i $P\Delta_T$ nie są zbyt od siebie odległe; liczbę Biota będziemy bowiem określać w przedziale czasu $[0, \min(K\Delta_\Theta, P\Delta_T)]$. Mając oba wspomniane zbiory danych łatwo można skonstruować funkcje, opisujące w przybliżeniu zmienność $\Theta(\xi^*, \tau)$ i $T_f(\tau)$ w czasie. Najprostszymi tego typu funkcjami ciągłymi są splajny [7]; najbardziej „zgrubne" przybliżenie obu funkcji można uzyskać aproksymując je funkcjami schodkowymi.

I tak — aproksymacja *WOT* oraz T_f przy pomocy funkcji schodkowych prowadzi do wzorów

$$\begin{aligned} T_f(\tau) &\approx S_0 T_f(\tau) = \sum_{p=1}^{P} (T_p - T_{p-1}) \eta(\tau - p\Delta_T), \\ \Theta(\xi^*, \tau) &\approx S_0 \Theta(\xi^*, \tau) = \sum_{k=1}^{K} (\Theta_k - \Theta_{k-1}) \eta(\tau - k\Delta_\Theta), \end{aligned} \tag{1.8}$$

gdzie $T_0 = \Theta_0 = 0$. Otrzymujemy wówczas

$$\mathrm{Bi} \approx A_0 \mathrm{Bi}(\tau) = L_0(\tau)/M_0(\tau), \tag{1.9}$$

gdzie

$$L_0(\tau) = \sum_{k=1}^{K} \left\{ (\Theta_k - \Theta_{k-1}) \left[1 - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^2} e^{-\lambda_n^2(\tau - k\Delta_\Theta)} \right] \eta(\tau - k\Delta_\Theta) \right\} \quad (1.10)$$

$$M_0(\tau) = \sum_{p=1}^{P} \left\{ (T_p - T_{p-1}) \left[\tau - p\Delta_T - \frac{1-\xi^{*2}}{2} - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\lambda_n^3} \cos(\xi^* \lambda_n) \times \right.\right.$$
$$\left.\left. \times e^{-\lambda_n^2(\tau - p\Delta_T)} \right] \eta(\tau - p\Delta_T) \right\} - \sum_{k=1}^{K} \{ (\Theta_k - \Theta_{k-1})(\tau - k\Delta_\Theta) \eta(\tau - k\Delta_\Theta) \}. \quad (1.11)$$

W przypadku, gdy $T_f(\tau) = T_f = \text{const}$, mianownik ułamka określającego liczbę Biota, M_0, przyjmuje szczególnie prostą postać, a mianowicie

$$M_0(\tau)|_{T_f = \text{const}} = T_f \left[\tau - \frac{1-\xi^{*2}}{2} - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\lambda_n^3} \cos(\xi^* \lambda_n) \times \right.$$
$$\left. \times e^{-\lambda_n^2 \tau} - \sum_{k=1}^{K} \{ (\Theta_k - \Theta_{k-1})(\tau - k\Delta_\Theta) \eta(\tau - k\Delta_\Theta) \} \right. . \quad (1.12)$$

Aproksymacja WOT i T_f przy pomocy najprostszego splajnu, jakim jest funkcja ciągła, odcinkowo-liniowa (łamana) prowadzi do wzorów

$$\Theta(\xi^*, \tau) \approx S_1 \Theta(\xi^*, \tau) = \frac{1}{\Delta_\Theta} \sum_{k=1}^{K} \{ (\Theta_{k+1} - 2\Theta_k + \Theta_{k-1})(\tau - k\Delta_\Theta) \eta(\tau - k\Delta_\Theta) \}, \quad (1.13)$$

$$T_f(\tau) \approx S_1 T_f(\tau) = \frac{1}{\Delta_T} \sum_{p=1}^{P} \{ (T_{p+1} - 2T_p + T_{p-1})(\tau - p\Delta_T) \eta(\tau - p\Delta_T) \}. \quad (1.14)$$

Wówczas

$$\mathrm{Bi} \approx A_1 \mathrm{Bi}(\tau) = L_1(\tau)/M_1(\tau), \quad (1.15)$$

gdzie

$$L_1'(\tau) = \frac{1}{\Delta_\Theta} \sum_{k=1}^{K} \left\{ (\Theta_{k+1} - 2\Theta_k + \Theta_{k-1}) \left[\tau - k\Delta_\Theta - \frac{1}{3} + \right.\right.$$
$$\left.\left. + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^4} e^{-\lambda_n^2(\tau - k\Delta_\Theta)} \right] \eta(\tau - k\Delta_\Theta) \right\}, \quad (1.16)$$

$$M_1(\tau) = \frac{1}{\Delta_T} \sum_{p=1}^{P} \left\{ (T_{p+1} - 2T_p + T_{p-1}) \left[\frac{1}{2} (\tau - p\Delta_T)^2 - \right.\right.$$

$$
-\frac{1}{2}(\tau-p\Delta_T)(1-\xi^{*2})-2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\lambda_n^5}\cos(\xi^*\lambda_n)\times \tag{1.17}
$$

$$
\times\left(1-e^{-\lambda_n^2(\tau-p\Delta_\Theta)}\right)\Big]\eta(\tau-p\Delta_T)\Big\}-\frac{1}{2\Delta_\Theta}\sum_{k=1}^{K}\{(\Theta_{k+1}-
$$

$$
-2\Theta_k+\Theta_{k-1})(\tau-k\Delta_\Theta)^2\eta(\tau-k\Delta_\Theta)\}.
$$

W przypadku, gdy $T_f(\tau) = T_f = \text{const}$, funkcja $M_1(\tau)$ przyjmuje szczególnie prostą postać, a mianowicie

$$
M_1(\tau)|_{T_f=\text{const}} = T_f\left[\tau-\frac{1}{2}(1-\xi^{*2})-2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\lambda_n^3}\cos(\xi^*\lambda_n)e^{-\lambda_n^2\tau}\right]-
$$

$$
-\frac{1}{2\Delta_\Theta}\sum_{k=1}^{K}\{(\Theta_{k+1}-2\Theta_k+\Theta_{k-1})(\tau-k\Delta_\Theta)^2\eta(\tau-k\Delta_\Theta)\}. \tag{1.18}
$$

Przy wyprowadzaniu wzorów (1.9) - (1.18) wykorzystano wzory 0.234 z tablic [8] oraz wzór (4.13) z pracy [9] dla przypadku $H = 0$ i $a \to 0$.

Ze wzorów (1.16) i (1.17) widoczne jest, iż określanie liczby Biota przy pomocy *WOT* i $T_f(\tau)$ przybliżonych funkcjami łamanymi wymaga znajomości „przyszłych" wartości *WOT* i $T_f(\tau)$ w stosunku do chwili czasu, dla której określana jest funkcja $A_1\text{Bi}(\tau)$. Wykorzystanie „przyszłych" wartości *WOT* i T_f polepsza dokładność otrzymanych wyników — jednakże przedstawianie *WOT* i T_f w postaci splajnów wyższych rzędów znacznie komplikuje wzory. Z tego też względu nie będziemy przedstawiać związków opisujących $A_n\text{Bi}(\tau)$ dla $n > 1$.

Warto na zakończenie tej części pracy zaznaczyć, że zależność funkcji $A_n\text{Bi}(\tau)$ od czasu wynika tylko i wyłącznie z faktu przedstawienia *WOT* i $T_f(\tau)$ w sposób przybliżony. Jest to więc raczej zależność od $S_n\Theta(\xi^*, \tau)$ czy $S_nT_f(\tau)$ niż od czasu. Przy wzrastających wartościach τ funkcja $A_n\text{Bi}(\tau)$ zbliża się do pewnej wartości stałej będącej właśnie poszukiwaną liczbą Biota. Ilustruje to dobrze przykład liczbowy, zamieszczony w części piątej pracy.

2. Wyznaczanie liczby Biota na podstawie wewnętrznej odpowiedzi przemieszczeniowej

Do założeń sformułowanych na początku części pierwszej dołożymy założenia następujące:
— warstwa jest sprężysta, izotropowa
— dolna powierzchnia warstwy jest unieruchomiona
— górna powierzchnia warstwy jest wolna od obciążeń
— przemieszczenia odbywają się tylko w kierunku osi Ox
— przemieszczenia i prędkości początkowe punktów warstwy są równe zero.

Rozważany jest zatem jednoosiowy jednowymiarowy stan odkształcenia w warstwie sprężystej, wywołany ogrzewaniem górnej powierzchni warstwy w sposób, opisany związkiem (1.4). Zespół równań (1.1) - (1.4) należy uzupełnić równaniami i warunkami następującymi:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial\xi^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}\right) u(\xi, \tau) = k\frac{\partial\Theta}{\partial\xi}, \tag{2.1}$$

$$u(\xi, 0) = 0, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial\tau}\right|_{\tau=0} = 0, \tag{2.2}$$

$$u(0, \tau) = 0, \tag{2.3}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial\xi}\right|_{\xi=1} = k\Theta(1, \tau). \tag{2.4}$$

Warunek (2.4) wynika z założenia o braku obciążeń na górnej powierzchni warstwy (por. wzór (3.11) dla $\beta = 0.5$ i $p(\tau) = 0$). Aby wyznaczyć liczbę Biota Bi przyjmujemy tym razem, iż oprócz funkcji $T_f(\tau)$ znana jest zmienność w czasie przemieszczenia w punkcie o współrzędnej ξ^* (tzw. wewnętrzna odpowiedź przemieszczeniowa, w skrócie *WOP*). Zagadnienie brzegowo-początkowe składające się ze związków (1.1) - (1.4) i (2.1) - (2.4) rozwiązujemy przy zastosowaniu transformacji Laplace'a. Po prostych obliczeniach otrzymuje się następującą postać transformaty Laplace'a przemieszczenia:

$$\bar{u}(\xi, s) = \frac{\bar{T}_f(s) kc\mathrm{Bi}\left[s\cosh\sqrt{s}\sinh\left(\xi\frac{s}{c}\right) - c\sqrt{s}\sinh(\xi\sqrt{s})\cosh\frac{s}{c}\right]}{s(s-c)^2\cosh\frac{s}{c}\left[\sqrt{s}\sinh\sqrt{s} + \mathrm{Bi}\cosh\sqrt{s}\right]}. \tag{2.5}$$

Przekształcając wzór (2.5) otrzymujemy związek

$$\frac{1}{\mathrm{Bi}}\bar{u}(\xi, s) + \bar{u}(\xi, s)\frac{\cosh\sqrt{s}}{\sqrt{s}\sinh\sqrt{s}} = kc\bar{T}_f(s)\left[\frac{\cosh\sqrt{s}\sinh\left(\xi\frac{s}{c}\right)}{\sqrt{s}(s-c^2)\sinh\sqrt{s}\cosh\frac{s}{c}} - \frac{c\sinh(\xi\sqrt{s})}{s(s-c^2)\sinh\sqrt{s}}\right]. \tag{2.6}$$

Odwrócenie transformat po lewej i prawej stronie związku (2.6) nie nastręcza trudności. Otrzymujemy

$$\frac{1}{\mathrm{Bi}}u(\xi, \tau) + u(\xi, \tau) * \left(1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\alpha_n^2\tau}\right) = P(\tau) * 2kcT_f(\tau), \tag{2.7}$$

gdzie

$$P(\tau) = \sum_{n=1}^{\infty}\left\{\left[\frac{\sinh\left(\xi\frac{\alpha_n^2}{c}\right)}{\cosh\left(\frac{\alpha_n^2}{c}\right)} + \frac{c}{\alpha_n}(-1)^n\sin(\xi\alpha_n)\right]\frac{e^{-\alpha_n^2\tau}}{\alpha_n^2 + c^2}\right\} +$$

$$+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\sin(\xi\lambda_n)}{\sqrt{2c\lambda_n}\,(\lambda_n^2+c^2)\left(\cosh\sqrt{2c\lambda_n}-\cos\sqrt{2c\lambda_n}\right)}\times \tag{2.8}$$
$$\times\left\{\sinh\sqrt{2c\lambda_n}\left[\lambda_n\sin\left(c\lambda_n\tau-\frac{\pi}{4}\right)-c\cos\left(c\lambda_n\tau-\frac{\pi}{4}\right)\right]-\right.$$
$$\left.-\sin\sqrt{2c\lambda_n}\left[\lambda_n\cos\left(c\lambda_n\tau-\frac{\pi}{4}\right)+c\sin\left(c\lambda_n\tau-\frac{\pi}{4}\right)\right]\right\}.$$

Stąd

$$\mathrm{Bi}=\frac{u(\xi,\tau)}{2kcT_f(\tau)*P(\tau)-u(\xi,\tau)*\left(1+2\sum\limits_{n=1}^{\infty}\exp(-\alpha_n^2\tau)\right)}. \tag{2.9}$$

Przyjmując, podobnie jak w poprzedniej części pracy, iż tak *WOP* jak i $T_f(\tau)$ dane są w postaci zbiorów danych dyskretnych, pochodzących z pomiarów, można zbudować w analogiczny jak uprzednio sposób funkcję $A_n\mathrm{Bi}(\tau)$, opisującą liczbę Biota w sposób przybliżony. Jeśli zatem $\{u_r\}_{r=1,\dots,R}$ jest zbiorem danych dotyczących zmian przemieszczenia od chwili $\tau=\Delta_u$ do $\tau=R\Delta_u$, zaś $\{T_p\}_{p=1,\dots,P}$ — zbiorem danych dotyczących temperatury medium grzejącego, przy czym chwile $P\Delta_T$ i $R\Delta_u$ nie są od siebie zbyt odległe, to aproksymując *WOP* i $T_f(\tau)$ — przykładowo — funkcją schodkową, otrzymujemy

$$\mathrm{Bi}\approx A_0\mathrm{Bi}(\tau)=\frac{\sum\limits_{r=1}^{R}(u_r-u_{r-1})\eta(\tau-r\Delta_u)}{N_0(\tau)},\qquad u_0=0, \tag{2.10}$$

gdzie

$$N_0(\tau)=2kc\sum_{p=1}^{P}\left\{(T_p-T_{p-1})\left[\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\left[\frac{\sinh\left(\xi^*\frac{\alpha_n^2}{c}\right)}{\cosh\frac{\alpha_n^2}{c}}+\frac{c}{\alpha_n}(-1)^n\sin(\xi^*\alpha_n)\right]\times\right.\right.\right.$$
$$\left.\times\frac{1-\exp[-\alpha_n^2(\tau-p\Delta_T)]}{\alpha_n^2(\alpha_n^2+c^2)}\right\}+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\sin(\xi^*\lambda_n)}{\sqrt{2c\lambda_n}\,(\lambda_n^2+c^2)\left(\cosh\sqrt{2c\lambda_n}-\cos\sqrt{2c\lambda_n}\right)}\times$$
$$\times\left\{\sinh\sqrt{2c\lambda_n}\left[\frac{1}{c}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\cos\left[c\lambda_n(\tau-p\Delta_T)-\frac{\pi}{4}\right]\right)-\frac{1}{\lambda_n}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\right.\right.\right. \tag{2.11}$$
$$\left.\left.+\sin\left[c\lambda_n(\tau-p\Delta_T)-\frac{\pi}{4}\right]\right)\right]-\sin\sqrt{2c\lambda_n}\left[\frac{1}{c}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\sin\left[c\lambda_n(\tau-p\Delta_T)-\frac{\pi}{4}\right]\right)+\right.$$
$$\left.\left.\left.+\frac{1}{\lambda_n}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\cos\left[c\lambda_n(\tau-p\Delta_T)-\frac{\pi}{4}\right]\right)\right]\right\}\right]\eta(\tau-p\Delta_T)\right\}-$$
$$-\sum_{r=1}^{R}\left\{(u_r-u_{r-1})\left[\tau-r\Delta_u+\frac{1}{3}-2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\alpha_n^2}e^{-\alpha_n^2(\tau-r\Delta_u)}\right]\eta(\tau-r\Delta_u)\right\}.$$

Wzór (2.10) jest znacznie bardziej złożony, niż związki (1.9) czy (1.15). Jeszcze bardziej złożona będzie postać funkcji $A_n \mathrm{Bi}(\tau)$, zbudowanej na podstawie *WOP* i $T_f(\tau)$ przybliżonych splajnami rzędu *n*. Tym niemniej widoczne jest, że również na podstawie *WOP* można w — mimo wszystko — stosunkowo prosty sposób wyznaczyć liczbę Biota.

3. Uogólnienie metody na przypadki kuli i walca

Wykorzystując tzw. parametr kształtu, [6, 10], można sformułować zagadnienie wyznaczania liczby Biota jednocześnie dla walca, kuli i warstwy, a także dla warstwy sferycznej i rury. Równanie przewodnictwa ciepła można bowiem zapisać w postaci [6]

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2}+\frac{1-2\beta}{\xi}\frac{\partial}{\partial \xi}-\frac{\partial}{\partial \tau}\right)\Theta(\xi, \tau) = 0, \tag{3.1}$$

gdzie parametr kształtu β przyjmuje wartości $+0.5$, 0, -0.5 odpowiednio dla warstwy, dla walca i dla kuli. Po prawej stronie równania (3.1) można — w razie potrzeby — umieścić człon odpowiedzialny za produkcję ciepła [10]. Uzupełniając równanie (3.1) warunkami (1.2), (1.3) i (1.4) otrzymujemy zagadnienie brzegowo-początkowe dotyczące bądź warstwy o grubości 1, bądź walca i kuli o promieniu 1 (jest to jedynka bezwymiarowa). Dla wyznaczenia liczby Biota niezbędna jest znajomość *WOT* oraz $T_f(\tau)$, przy czym mogą one być zadane w postaci zbiorów danych dyskretnych, pochodzących z pomiarów.

Transformata Laplace'a temperatury, $\bar{\Theta}(\xi, s)$, ma w tym wypadku postać

$$\bar{\Theta}(\xi, s) = \bar{T}_f(s)\frac{\mathrm{Bi}\,\xi^{\beta}\mathrm{I}_{-\beta}(\xi\sqrt{s})}{\sqrt{s}\,\mathrm{I}_{-\beta+1}(\sqrt{s})+\mathrm{Bi}\,\mathrm{I}_{-\beta}(\sqrt{s})}. \tag{3.2}$$

Stąd po przekształceniu otrzymujemy

$$\bar{T}_f(s)\frac{\xi^{\beta}\mathrm{I}_{-\beta}(\xi\sqrt{s})}{s\mathrm{I}_{-\beta}(\sqrt{s})} = \frac{1}{s}\bar{\Theta}(\xi, s)+\frac{1}{\mathrm{Bi}}\bar{\Theta}(\xi, s)\frac{\mathrm{I}_{-\beta+1}(\sqrt{s})}{\sqrt{s}\,\mathrm{I}_{-\beta}(\sqrt{s})}. \tag{3.3}$$

Odwrócenie transformacji prowadzi do następującego równania:

$$\begin{aligned} T_f(\tau)*\left(1-2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\xi^{\beta}\mathrm{J}_{-\beta}(\mu_n\xi)}{\mu_n\mathrm{J}_{-\beta+1}(\mu_n)}\,e^{-\mu_n^2\tau}\right) &= \\ = \eta(\tau)*\Theta(\xi, \tau)+\frac{2}{\mathrm{Bi}}\Theta(\xi, \tau)*\sum_{n=1}^{\infty}e^{-\mu_n^2\tau}&, \end{aligned} \tag{3.4}$$

gdzie μ_n są pierwiastkami równania $\mathrm{J}_{-\beta}(\mu) = 0$. Stąd otrzymujemy wzór

$$\mathrm{Bi} = \frac{2\Theta(\xi, \tau)*\sum_{n=1}^{\infty}e^{-\mu_n^2\tau}}{T_f(\tau)*\left(1-2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\xi^{\beta}\mathrm{J}_{-\beta}(\mu_n\xi)}{\mu_n\mathrm{J}_{-\beta+1}(\mu_n)}\,e^{-\mu_n^2\tau}\right)-\eta(\tau)*\Theta(\xi, \tau)}, \tag{3.5}$$

którego szczególnym przypadkiem jest związek (1.7). Dla $\beta = +0.5$ mamy bowiem $\mu_n = \lambda_n$ oraz

$$J_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin x, \quad J_{-\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos x.$$

Dalszy tok postępowania przy wyznaczaniu liczby Biota jest analogiczny jak w części pierwszej pracy. Otrzymuje się wzory o postaci zbliżonej do (1.9) czy (1.15); występujące w tych wzorach niektóre szeregi nieskończone można zastąpić ich sumami, wykorzystując wzory (22) i (17) z pracy [12], przy czym we wzorze (17) należy dokonać przejścia granicznego z parametrem a do zera; oba te wzory należy wykorzystać dla $n = -\beta$. Dla $\beta = -0.5$ i $+0.5$ funkcje Bessela przechodzą w funkcje trygonometryczne — tak więc wówczas, tzn. dla przypadku warstwy i kuli, otrzymane wzory mają postać szczególnie przydatną do obliczeń numerycznych. Wzorów tych nie przytaczamy z uwagi na prostotę ich wyprowadzenia.

Jak widać ze związku (3.5), wartość liczby Biota jest powiązana z kształtem próbki, dla której znana jest *WOT*. Związek ten staje się jeszcze bardziej widoczny, jeśli zamiast warunku (1.3) przyjąć warunek

$$\lambda \left.\frac{\partial \Theta}{\partial \xi}\right|_{\xi=\xi_0} = q_w(\tau), \quad \text{lub np.} \tag{3.6}$$

$$\Theta(\xi_0, \tau) = T_w(\tau), \tag{3.7}$$

tzn. gdy mamy do czynienia z warstwą o grubości $h(1-\xi_0)$, warstwą sferyczną czy też rurą, o takich samych grubościach ścianek. Tutaj $q_w(\tau)$ i $T_w(\tau)$ są funkcjami opisującymi — odpowiednio — strumień ciepła i temperaturę na ściance $\xi = \xi_0$. Powiązanie liczby Biota z kształtem ciała jest wówczas o tyle bardziej złożone, że oprócz funkcji $J_{-\beta}(x)$ pojawia się we wzorze opisującym liczbę Biota także funkcja $Y_{-\beta}(x)$.

Jeśli równanie (3.1) z warunkami (1.2), (1.3) i (1.4) uzupełnić równaniem

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{1-2\beta}{\xi}\frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{1-2\beta}{\xi^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial \tau^2}\right) u(\xi, \tau) = k\frac{\partial \Theta(\xi, \tau)}{\partial \xi} \tag{3.8}$$

i warunkami (2.2), (2.3) oraz

$$\left[\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{(1-2\beta)\nu}{1-\nu}\frac{u}{\xi}\right]_{\xi=1} = k\Theta(1, \tau), \tag{3.9}$$

to otrzymuje się uogólnienie metody przedstawionej w części drugiej pracy. Jednakże wzory, określające w tym wypadku liczbę Biota są bardziej złożone od (2.9) i (2.10). Warto tu może zwrócić uwagę na fakt, że przyjęcie w miejsce warunku (2.3) warunku

$$u(\xi_0, \tau) = U(\tau), \tag{3.10}$$

lub w miejsce (3.9) warunku

$$\sigma_{\xi\xi}(1, \tau) = \frac{2G(1-\nu)}{h(1-2\nu)}\left[\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{(1-2\beta)\nu}{1-\nu}\frac{u}{\xi} - k\Theta\right]_{\xi=1} = -p(\tau), \tag{3.11}$$

gdzie $U(\tau)$ i $p(\tau)$ opisują — odpowiednio — przemieszczenie brzegu $\xi = \xi_0$ lub obciążenie brzegu $\xi = 1$, prowadzi do wzorów, z których wynika, że wartość liczby Biota wyznaczana na podstawie *WOP* i $T_f(\tau)$ zależy od warunków natury mechanicznej, w jakich próbka się znajduje. Jest to wniosek dosyć oczywisty zważywszy na to, iż do określenia liczby Biota ma być w tym przypadku wykorzystana wielkość, na którą tego typu warunki mają istotny wpływ.

4. Inne możliwości wyznaczania liczby Biota

Liczbę Biotą można wyznaczać nie tylko na podstawie znajomości *WOT* czy *WOP*. Można w tym celu wykorzystać np. strumień ciepła $q(\xi^*, \tau)$ (o ile uda się go w punkcie wewnętrznym czy brzegowym w jakiś sposób zmierzyć), odkształcenie $\varepsilon_{\xi\xi}(\xi^*, \tau) = \frac{\partial}{\partial\xi} u(\xi, \tau)|_{\xi=\xi^*}$ czy naprężenie $\sigma_{\xi\xi}(\xi^*, \tau)$, określone wzorem (3.11) (oczywiście dla $\xi = \xi^*$), gdzie $\xi^* \in [0, 1]$. Wystarczy w tym celu dokonać odpowiednich operacji na wzorach (1.5) i (2.5), czy też odpowiadających im wzorach, opisujących temperaturę i przemieszczenie przy wykorzystaniu parametru kształtu β. Np. różniczkując wzór (1.5) po ξ, mnożąc obustronnie przez współczynnik przewodnictwa cieplnego λ oraz zastępując wyrażenie $\lambda\frac{\partial\overline{\Theta}(\xi, s)}{\partial\xi}$ przez $-\overline{q}(\xi^*, s)$ można, przekształcając tak otrzymany wzór na transformatę strumienia ciepła, otrzymać związek

$$\mathrm{Bi} = \frac{2q(\xi, \tau) * \sum\limits_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n^2\tau}}{2\lambda T_f(\tau) * \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin(\xi\lambda_n) e^{-\lambda_n^2\tau} - \eta(\tau) * q(\xi, \tau)}. \tag{4.1}$$

5. Przykład liczbowy

Wykorzystując wzory (1.9) oraz (1.15) wyznaczymy liczbę Biota na podstawie danych eksperymentalnych, dotyczących pomiarów temperatury na zewnętrznej ściance rozbieżnej dyszy silnika rakietowego, dokonanych podczas testowania tegoż silnika, [4]. Dane te wielokrotnie służyły do wyznaczania liczby Biota i współczynnika przejmowania ciepła (por. [2, 4, 5]; w pracy [5] wyznaczono także wartość współczynnika przejmowania ciepła metodą przedstawioną w pracy [11]). Wspomniana dysza miała ściankę o grubości $h = 0.0211$ m, co pozwoliło tę ściankę traktować w przybliżeniu jako warstwę płaską (stosunek promienia zewnętrznego do wewnętrznego był na całej długości dyszy bliski jedności). Pozostałe dane są następujące: temperatura otoczenia dyszy $T_0 = 300°K$, temperatura gazów w dyszy $T_g = 2946{,}2°$ K, $\varrho = 7900$ kg/m³, $c_p = 545$ Ws/kg°K, średni współczynnik przewodnictwa cieplnego $\lambda = 35$ W/m°K; czas pracy silnika — 16 sekund. Na podstawie danych temperaturowych określono, podobnie jak w pracach [2, 4, 5], wartości Θ i T_f wg wzorów

$$\Theta = \frac{T - T_0}{T_g - T_0}, \quad T_f = \frac{T_g - T_0}{T_g - T_0} = 1, \quad T \text{— temperatura bezwzględna}. \tag{5.1}$$

Ponieważ dane eksperymentalne są niepełne i dotyczą temperatury w chwilach czasu od $t = 6$ s do $t = 16$ s co 1 s, otrzymane wyniki wykazują tendencję do ustalania się dopiero dla $t > 10$ s. Wartości liczby Biota, otrzymane ze wzorów (1.9) i (1.15) przeliczono następnie na wartości współczynnika przejmowania ciepła wg wzoru

$$\alpha = \mathrm{Bi}\,\lambda/h. \tag{5.2}$$

Otrzymane wyniki przedstawiono w tabeli 1; podano tam także dla porównania wyniki otrzymane w pracach [2, 4, 5], oraz rezultaty cytowane w [5], a otrzymane metodą przedstawioną w pracy [11]. Warto zaznaczyć, że we wszystkich cytowanych pracach zakładano stałość liczby Biota. W pracach [5] i [11] zakładano dodatkowo, że współczynnik przewodnictwa cieplnego, λ, jest funkcją temperatury. Spowodowało to znaczne zmniejszenie wartości współczynnika przejmowania ciepła, α, w stosunku do wyników otrzymanych przy założeniu, że λ = const.

Jak widać z tabeli 1, wartości współczynnika przejmowania ciepła otrzymane różnymi metodami cechuje duża rozbieżność. Na tle rezultatów otrzymanych w cytowanych pracach, wyniki uzyskane przy wykorzystaniu wzorów (1.9) i (1.15), wyróżniają się tym, że dla $t > 10$ mają tendencję do oscylowania wokół pewnej stałej wartości. Tendencję taką mają także wyniki przedstawione przez R. C. Mehtę w pracach [2] i [5], jednakże metoda kolejnych przybliżeń, jaką wykorzystał on do uzyskania tych wyników, jest nieporównanie bardziej złożona od metody zaprezentowanej w niniejszej pracy.

Tabela 1. Porównanie wartości współczynnika przejmowania ciepła, α, wyznaczonego różnymi metodami na podstawie tych samych danych.

t [s]	$\Theta(0,t)$ bezwym	α					
		(1.9)	(1.15)	[4]	[2]	[5]	[11]
6	0.00933	738.8	239.5	2254.2	1821.9	536.6	581.7
7	0.01588	1074.2	696.6	2254.2	1810.0	600.6	587.0
8	0.02116	1175.7	884.3	2254.2	1610.3	592.6	598.4
9	0.03020	1241.7	969.5	2254.2	1690.9	674.2	685.3
10	0.03855	1291.6	1056.9	2254.2	1669.7	712.9	693.2
11	0.04724	1318.9	1111.7	2254.2	1641.9	737.4	730.0
12	0.05291	1300.4	1138.5	2254.2	1497.6	718.2	721.9
13	0.06046	1279.6	1133.6	2254.2	1443.1	723.6	725.8
14	0.06764	1257.6	1129.0	2254.2	1387.0	723.0	725.1
15	0.07823	1255.2	1127.0	2254.2	1413.0	753.6	765.0
16	0.08615	1248.5	1135.5	2254.2	1383.7	758.3	770.0

Warto zwrócić uwagę na fakt, że wyniki uzyskane w niniejszej pracy na podstawie wzoru (1.15), są gorsze (por. tabela 3) od wyników uzyskanych na podstawie związku (1.9). Wynika to z fragmentaryczności danych z pomiarów. Przy znajomości danych pomiarowych dla chwil od $t = 1$ do $t = 16$ z krokiem czasowym równym 1 s, wyniki uzyskane na podstawie wzoru (1.15) są oczywiście dokładniejsze od rezultatów bazujących na (1.9).

Następnie sprawdzono, jaki jest związek pomiędzy wartościami współczynnika przejmowania ciepła, otrzymanymi w niniejszej pracy oraz w pracach [4] i [2], a wynikami pomiarów temperatury ścianki dyszy, [4], przedstawionymi w drugiej kolumnie tabeli 1. W związku z tym obliczono średnią wartość współczynnika α, biorąc przy tym pod uwagę dane następujące (por. tabela 1)

— dla (1.9): od $t = 10$ do $t = 16$,
— dla (1.15): od $t = 11$ do $t = 16$,
— dla [2]: od $t = 12$ do $t = 16$.

Otrzymane w ten sposób współczynniki $\alpha_{śr}$, a także odpowiadające im liczby Biota, przedstawiono w tabeli 2.

Tabela 2. Przybliżone wartości współczynnika przejmowania ciepła, $\alpha_{śr}$ i liczby Biota, $Bi_{śr}$.

	(1.9)	(1.15)	[4]	[2]	(1.9) popr.
$\alpha_{śr}$	1278.83	1129.22	2254.2	1424.88	1376.78
$Bi_{śr}$	0.77095	0.68076	1.35896	0.859	0.83

Wartości temperatury $\Theta(\xi, \tau)$ można obliczyć na podstawie wzoru

$$\Theta(\xi, \tau) = 1-2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{Bi}\cos(\xi\mu_n)}{(\mathrm{Bi}^2+\mathrm{Bi}+\mu_n^2)\cos\mu_n} e^{-\mu_n^2\tau}, \tag{5.3}$$

który otrzymuje się, odwracając transformatę, daną związkiem (1.5). Tutaj μ_n są pierwiastkami równania

$$\mu \,\mathrm{tg}\, \mu = \mathrm{Bi}. \tag{5.4}$$

Wstawiając do wzoru (5.3) w miejsce Bi wielkości, podane w tabeli 2, wyliczono wartości temperatury dla chwil od $t = 6$ do $t = 16$ s. Otrzymane wyniki przedstawiono w tabeli 3.

Tabela 3. Wartości temperatury w chwilach od $t = 6$ s do $t = 16$ s, obliczone na podstawie współczynników z tabeli 2.

t [s]	$\Theta(0, t)$ pomiar	(1.9)	(1.15)	[4]	[2]	(1.9) popr.
6	0.00933	0.00754	0.00674	0.01228	0.00830	0.00805
7	0.01588	0.01238	0.01109	0.01999	0.01361	0.01321
8	0.02116	0.01824	0.01635	0.02921	0.02002	0.01944
9	0.03020	0.02494	0.02239	0.03965	0.02735	0.02656
10	0.03855	0.03232	0.02906	0.05104	0.03540	0.03440
11	0.04724	0.04025	0.03622	0.06314	0.04404	0.04281
12	0.05291	0.04860	0.04379	0.07577	0.05312	0.05165
13	0.06046	0.05728	0.05166	0.08878	0.06255	0.06084
14	0.06764	0.06620	0.05976	0.10203	0.07222	0.07027
15	0.07823	0.07530	0.06804	0.11544	0.08208	0.07988
16	0.08615	0.08453	0.07644	0.12893	0.09206	0.08962

Wyniki przedstawione w tabeli 3 dyskwalifikują w zasadzie rezultaty pracy [4] oraz wartość liczby Biota otrzymaną na podstawie wzoru (1.15). Co do tego ostatniego, stwierdzono już wyżej, iż wynika to z fragmentaryczności danych. Każdy bowiem wzór określający liczbę Biota w oparciu o $S_n\Theta(\xi^*, \tau)$ wymaga znajomości danych pomiarowych począwszy od chwili początkowej przy stałym kroku czasowym; brak danych dotyczących pierwszej fazy procesu wymiany ciepła powoduje tym większe zafałszowanie wyników, im dokładniej przybliżona jest funkcja $\Theta(\xi^*, \tau)$ przez $S_n\Theta$, tzn. im wyższa jest wartość n. Najmniej wrażliwa na brak informacji z pierwszej fazy procesu jest funkcja $S_0\Theta$ — widać to w tabeli 3.

Na podstawie obliczonych dla Bi = 0.077095 wartości temperatury dokonano ponownego obliczenia liczby Biota, biorąc także pod uwagę tylko wyniki dla chwil czasu od $t = 6$ s do $t = 16$ s. Oszacowana na podstawie tych obliczeń wartość liczby Biota, różniąca się (na skutek niepełnych danych z „pomiarów") od wartości wyjściowej, posłużyła do oceny stopnia dokładności wyników z tabeli 2 w przypadku stosowania wzoru (1.9) do wspomnianych na wstępie danych z pracy [4]. Stwierdzono, iż fragmentaryczność danych z pomiarów powoduje zaniżenie wartości liczby Biota. Poprawiona — w oparciu o te rozważania — liczba Biota została podana w tabeli 2 jako „(1.9) popr.". Odpowiadająca jej zmiana temperatury $\Theta(0, t)$ przedstawiona jest w ostatniej kolumnie tabeli 3. Porównując te wyniki z danymi pomiarowymi widać, iż są one znacznie im bliższe niż wyniki otrzymane na podstawie wzoru (1.9). Jednocześnie widać dużą zgodność tak otrzymanych rezultatów z rezultatami otrzymanymi na podstawie pracy [2].

W przypadku posiadania pełnych danych z pomiaru, od $t = 1$ do dowolnej chwili czasu, wartości wyliczone na podstawie wzorów (1.9) czy (1.15) bardzo szybko dążą do pewnej wartości granicznej, o ile oczywiście wartość liczby Biota jest stała w rozważanym procesie grzania (chłodzenia). Co do przedstawionego wyżej zestawu danych pomiarowych, oraz otrzymanych na ich podstawie wyników, widać, że założenie o stałości liczby Biota było tu niesłuszne. Tym niemniej otrzymana wartość liczby Biota, przedstawiona w ostatniej kolumnie tabeli 2, ma charakter pewnej wartości średniej.

Natomiast symulacja numeryczna, polegająca na obliczeniu zmiany w czasie temperatury w punkcie $\xi = \xi^*$ przy zadanej liczbie Biota, a następnie odtworzenie tej liczby Biota na podstawie wzorów (1.9) czy (1.15) całkowicie potwierdza przydatność tych wzorów w przypadku, gdy Bi = const.

6. Wnioski

Przedstawione metody wyznaczania współczynnika przejmowania ciepła oraz liczby Biota różnią się nieco w zależności od kształtu próbki (badanego obiektu) oraz rodzaju wewnętrznej odpowiedzi, na podstawie której wspomniane wielkości się wyznacza. Otrzymane wzory, opisujące tę zależność, są proste, a do otrzymania na ich podstawie wyników wystarcza maszyna cyfrowa o niedużej pamięci operacyjnej. (Przedstawione w części piątej wyniki otrzymano na kalkulatorze programowalnym TI-59). W przypadku przybliżania odpowiedzi wewnętrznej przez splajny wyższych rzędów należy wziąć pod uwagę, iż dokładność otrzymanej przy ich pomocy liczby Biota zależy w dużym stopniu od znajomości historii procesu, począwszy od chwili $t = 0$, od kroku czasowego, a także od ilości posiadanych danych. Wobec możliwości wykorzystania danych z wnętrza ciała, a nawet z brzegu przeciwnego w stosunku do grzanego, przedstawione metody umożliwiają określenie liczby Biota i współczynnika α w takich warunkach, gdy nie ma możliwości dokonania pomiaru temperatury na brzegu grzanym, lub gdy pomiar taki jest bardzo trudny do przeprowadzenia. Prezentowane tu podejście nie wymaga stosowania procedur iteracyjnych, co jest wspólną cechą wielu innych metod, przedstawionych w literaturze. Przy fragmentarycznych danych zastosowanie podejścia zademonstrowanego w piątej części pracy pozwala w prosty sposób określić przybliżoną wartość liczby Biota.

Wydaje się, iż przedstawione w pracy wyniki mogłyby stać się punktem wyjścia do zbudowania urządzenia pomiarowego, które na podstawie danych temperaturowych, przemieszczeniowych czy innych obliczałoby wartość liczby Biota czy współczynnika przejmowania ciepła.

Warto tu też zaznaczyć, że przy znanej wartości liczby Biota można na podstawie przedstawionych wyżej wzorów wyznaczyć temperaturę T_f czynnika grzejącego w przypadku, gdy jest ona stała. Wystarczy w tym celu przekształcić wzór (3.5) do postaci

$$T_f = \frac{\Theta(\xi, \tau) * \left[\eta(\tau)\mathrm{Bi} + 2\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\mu_n^2 \tau}\right]}{\mathrm{Bi}\,\eta(\tau) * \left[1 - 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\xi^\beta J_{-\beta}(\mu_n \xi)}{\mu_n J_{-\beta+1}(\mu_n)} e^{-\mu_n^2 \tau}\right]}. \tag{6.1}$$

Wzór na określenie T_f można też łatwo otrzymać przekształcając związek (2.9) w przypadku, gdy $T_f = \text{const}$. Prowadziłoby to do możliwości określenia temperatury gazów np. w silniku rakietowym czy odrzutowym bez potrzeby umieszczania czujników w tymże gazie.

Można wreszcie wyznaczyć jednocześnie i liczbę Biota i temperaturę nośnika ciepła T_f (gdy jest ona stała), jeśli znane są odpowiedzi wewnętrzne w dwóch różnych punktach badanego ciała.

Wydaje się, że rozwinięcie metod, przedstawionych w pracy, na przypadek współczynników zależnych np. liniowo od temperatury, a także na przypadek innych procesów, opisywalnych układem równań różniczkowych liniowych, mogłoby doprowadzić do powstania nowych metod badań nieniszczących.

Literatura cytowana w tekście

1. B. STANISZEWSKI, *Wymiana ciepła, podstawy teoretyczne*, PWN Warszawa 1963.
2. R. C. MEHTA, *Solution of the Inverse Conduction Problem*, AIAA Journal, **15**, 9, 1355 - 1356 (1977).
3. J. TALER, *Metoda eksperymentalnego określenia współczynnika wnikania ciepła w warunkach nie ustalonych*, Czas. techn., 1978, 43 - 46.
4. D. R. BARTZ, *A Simple Equation for Rapid Estimation of Rocket Nozzle Convective Heat Transfer Coefficients*, Jet Propulsion, **27**, 49 - 51, (1957).
5. R. C. MEHTA, *Extension of the Solution of Inverse Conduction Problem*, Int. J. Heat Mass Transfer, **22**, 1149 - 1150 (1979).
6. M. J. CIAŁKOWSKI, K. GRYSA, *On a Certain Inverse Problem of Temperature and Thermal Stress Fields*, Acta Mechanica, **36**, 3 - 4, 169 - 185 (1980).

7. R. S. VARGA, *Functional Analysis and Approximation Theory in Numerical Analysis*, Soc for Ind. and Appl. Math., Philadelphia, (1971), tłum. ros. Izd. Mir, Moskwa (1974).
8. I. S. GRADŠTEIN, I. M. RIŽIK, *Tablicy integralov, summ, riadov i proizvedenii*, Izd. Nauka, Moskwa (1974).
9. K. GRYSA, J. JANKOWSKI, *O sumowaniu pewnych szeregów Diniego i trygonometrycznych, pojawiających się w zagadnieniach mechaniki ośrodków ciągłych*, Mech. Teoret. Stos., 16, 3, 299 - 319 (1978).
10. A. V. LYKOV, *Teplomassoobmen — spravočnik*, Izd. Energia, Moskwa (1978).
11. J. V. BECK, *Nonlinear Estimation Applied to the Nonlinear Inverse Heat Conduction Problem*, Int. J. Heat Mass Transfer, 13, 703 - 716, (1970).
12. K. GRYSA, *O sumowaniu pewnych szeregów Fouriera-Bessela*, Mech. Teoret. Stos., 15, 2, 205 - 214 (1977).

Р е з ю м е

МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ ЧИСЛА БИО И КОЭФФИЦИЕНТА ТЕПЛООБМЕНА

В статьи представлены две методы определения числа Био и коэффициента теплообмена. Обе методы выведены при использовании интегрального преобразования Лапласа. Первая метод получена вследстве решения обратной задачи теплопроводности. До выведения второй использовано решение одной проблеммы теории термических напряжении. Представлены тоже другие возможности определения числа Био. Затем, используя некоторые данные измерительные, цитированные в других статьях, сделано числовую проверку первой методы. Вычислительные результаты сравнено с результатами полученными другими авторами.

S u m m a r y

METHODS OF DETERMINATION OF THE BIOT NUMBER AND THE HEAT TRANSFER COEFFICIENT

In the paper two methods of determination of the Biot number and the heat transfer coefficient are presented. Both methods are based on the Laplace transform techniques. The first method takes into account a solution of an inverse heat conduction problem. In order to derive the second method a solution of a problem of the theory of thermal stresses is exploited. Other possibilities of the Biot number determination are also mentioned. Making use of some measuring data, quoted also in other papers, a numerical verification of the first method is made. The results of computation are compared with those obtained by other authors.

Praca została złożona w Redakcji dnia 9 września 1981 roku.