

WYZNACZANIE PŁASKIEGO POLA NAPRĘŻENIA Z OBRAZU IZODYN UZYSKIWANYCH METODĄ ŚWIATŁA ROZPROSZONEGO

WOJCIECH KARMOŃSKI, STANISŁAW MAZURKIEWICZ (KRAKÓW)

*Instituł Mechaniki i Podstaw
Konstrukcji Maszyn
Politechnika Krakowska
Instytut Mechaniki i Podstaw
Konstrukcji Maszyn
Politechnika Krakowska*

1. Metody wyznaczenia pola naprężenia w przypadku płaskiego stanu naprężenia

Rozwiązanie płaskiego zagadnienia polega na określeniu trzech składowych tensora naprężenia tj. σ_{xx} , σ_{yy} , σ_{xy} . Składowe te jak wiadomo spełniają równania równowagi oraz równanie nierozdzielności

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} &= 0, \\ \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) (\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) &= 0.\end{aligned}\tag{1.1}$$

Równania (1.1) łącznie z warunkami brzegowymi pozwalają na rozwiązanie płaskiego zagadnienia. Eliminacja dwóch spośród trzech niewiadomych prowadzi do uzyskania jednego równania biharmonicznego. Rozwiązaniem jest na ogół funkcją nieelementarną i może być efektywnie przedstawiona jedynie w postaci dyskretnej. Do rozwiązania stosuje się metody numeryczne np. metodę różnic skończonych. Procedura ta jest jednakże bardzo pracochłonna. Zasadniczą wadą dotychczas stosowanych metod jest określanie wartości funkcji wewnątrz obszaru na podstawie jej wartości i pochodnych na brzegu. Powoduje to znaczne odstępstwa od faktycznego pola fizycznego wywołane nie tylko błędami metody ale i błędami doświadczalnymi wyznaczania własności pola na brzegu obszaru. Błąd pomiarowy jest propagowany przez algorytm do wnętrza obszaru na znaczne odległości co powoduje jego zwielokrotnienie. Wad tych można uniknąć przez prowadzenie eksperymentu, w którym pomiary są wykonywane również wewnątrz obszaru, skracając drogę od dowolnego punktu wewnątrz obszaru do najbliższego punktu pomiarowego. Techniki elastoptyczne między innymi pozwalają na uzyskanie jednego dodatkowego równania do układu (1.1). Poprzez eliminację trzeciego z równań (1.1) uzyskuje się zmniejsz-

szenie stopnia układu o 2, powodując zmniejszenie błędów numerycznych i poprawiając dokładność rozwiązania.

2. Klasyczne techniki elastoptyczne

W elastoptyce stosuje się powszechnie metody oparte o wykorzystanie izochrom i izoklin. Obydwie metody pozwalają na uzyskanie jednej funkcji naprężeń w badanym obszarze, dotyczącej układu głównego naprężeń. Definiując przez „ p ” połowę sumy naprężeń głównych, przez „ q ” połowę ich różnicy a przez „ ψ ” podwojony kąt transformacji tensora naprężeń z układu przyjętego w eksperymencie do układu głównego, można zapisać tensor naprężenia w postaci

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= p + q \cos \psi, \\ \sigma_{yy} &= p - q \cos \psi, \\ \sigma_{xy} &= q \sin \psi.\end{aligned}\tag{2.1}$$

Metoda izochrom pozwala na pomiar „ q ” a metoda izoklin na „ ψ ”. Po wyeliminowaniu „ p ”, za pomocą równań równowagi, uzyskuje się równanie postaci

$$2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} (q \cos \psi) + \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) (q \sin \psi) = 0.\tag{2.2}$$

W przypadku techniki izochrom niewiadomą w tym równaniu jest „ ψ ”. Jest to równanie silnie nieliniowe i rozwiązanie jego jest trudne i pracochłonne. Znajomość pola izoklin prowadzi wprawdzie do równania liniowego na „ q ”, lecz pomiar wartości kąta przy pomocy izoklin jest obciążony dużym błędem (są one zwykle bardzo rozmyte). Z pierwszego lub drugiego równania równowagi wyznacza się „ p ” po wyznaczeniu „ q ” i „ ψ ”. Obydwie techniki są wobec tego mało przydatne do dokładnego wyznaczania pól naprężeń, metoda izochrom z powodu generowania równania nieliniowego a metoda izoklin z powodów błędów eksperymentalnych. Nowe możliwości eksperymentalnych badań stworzone zostały dzięki wykorzystaniu zjawiska modulacji intensywności światła rozproszonego poprzez składowe stanu naprężenia wzdłuż drogi wiązki światła padającego na model. Począwszy od 1939 roku [6] następuje szybki rozwój tej metody w różnych zastosowaniach do analizy stanu naprężenia. Jednakże bardziej powszechne jej stosowanie było ograniczone między innymi zbyt uproszczonym modelem matematycznym, opisującym intensywność światła rozproszonego jak również błędami zniekształceń geometrycznych obrazu wynikającymi z zastosowanych technik obserwacji i rejestracji.

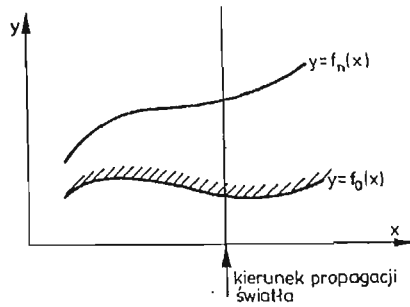
Zaproponowana w pracy [3] nowa koncepcja tzw. zintegrowanego polaryskopu oraz przedstawiony model matematyczny zjawiska pozwala na uniknięcie szeregu błędów pomiarowych i stwarza nowe możliwości szerszego stosowania tej metody w badaniach elastoptycznych.

3. Elementy teorii izodyni

Termin izodyni wprowadzony został po raz pierwszy w pracy [4], dla określenia nowego typu charakterystyk w płaskim stanie naprężenia. Przyjmijmy dowolnie wybrany

kierunek w obszarze, w którym panuje płaski stan naprężenia, nazywany dalej kierunkiem charakterystycznym „y”. Niech brzeg modelu opisuje funkcja $y = f_0(x)$ rys. 1. Izodyna n -tego rzędu $y = f_n(x)$ jest miejscem geometrycznym punktów w modelu, dla których

$$\int_{f_0}^{f_n} \sigma_{xx} dy = \text{const.} \quad (3.1)$$



Rys. 1

Doświadczalnie izodyny można uzyskać stosując metodę światła rozproszonego wykorzystującą pryzmat integrujący opisany w [3]. Przykłady zastosowania tej metody podane są m.in. w [1] [2] [5]. W płaskim stanie naprężenia, gdy $\sigma_{zz} = 0$, naprężenie σ_{xx} wyznaczyć można tą metodą wprost z zależności:

$$\sigma_{xx} = S'_\sigma \frac{\Delta m}{\Delta y}, \quad (3.2)$$

gdzie: Δm — liczba izodyn przecinających odcinek Δy leżący wzdłuż kierunku świetlnego światła spolaryzowanego padającego na model, zaś S'_σ — stała elastoosytna wyznaczona doświadczalnie. Łatwo zauważyć, iż dla grubości modelu „b” mamy:

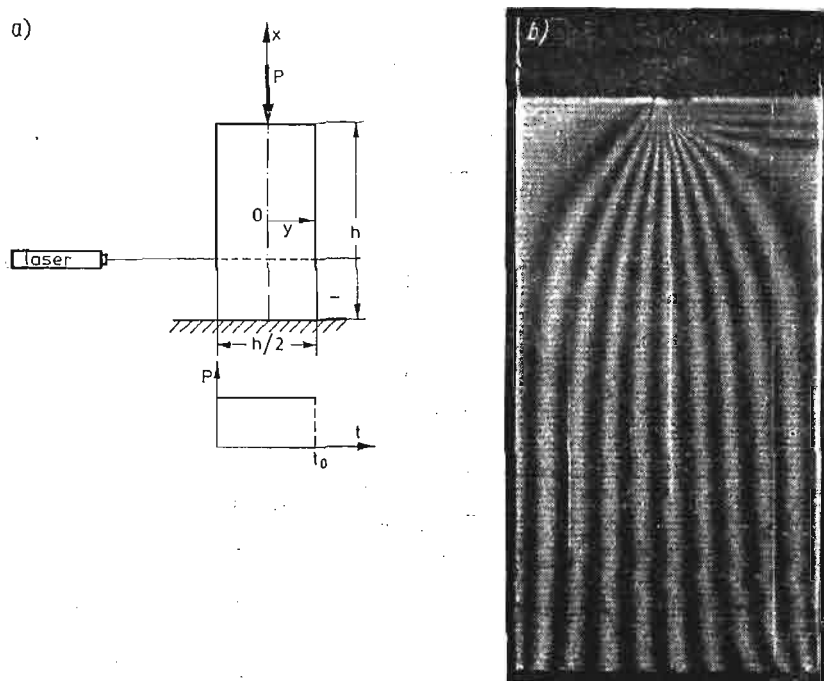
$$\int_{f_0}^{f_n} b \sigma_{xx} dy = \Delta P_x, \quad (3.3)$$

gdzie ΔP_x jest tą częścią siły zewnętrznej P_x , która przenoszona jest przez odcinek przekroju modelu wzdłuż y od brzegu modelu do izodyny f_n . Na rys. 2b i rys. 3b pokazano rodziny izodyn $y = f_n(x)$ a na rys. 2a i 3a schematy obciążeń dla obydwu modeli przy prześwietlaniu ich promieniem świetlnym wzdłuż kierunku y .

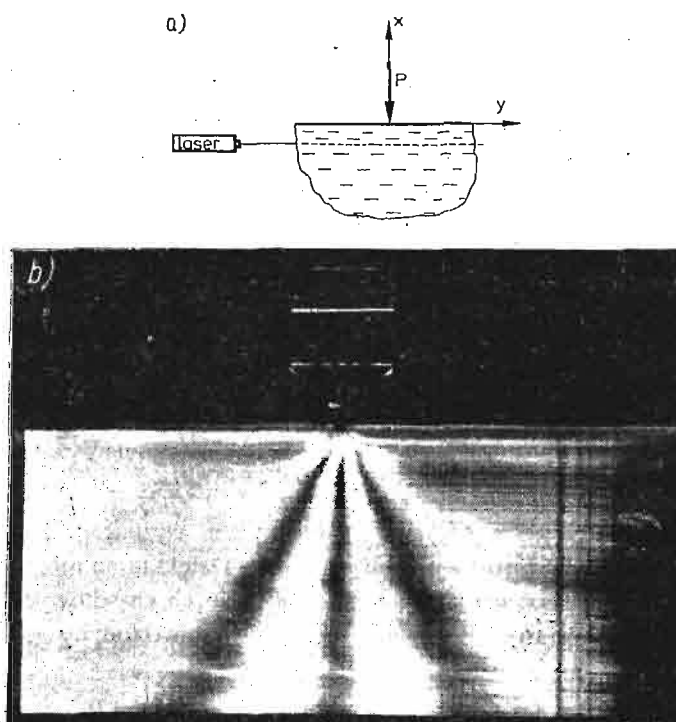
4. Metoda izodyn

Jak opisano w punkcie 3 w technice izodyn można wyznaczyć jedną składową symetryczną pola naprężenia wprost z przebiegu izodyn. Dzięki temu możliwe jest uzyskanie pola naprężenia bez rozwiązywania równań różniczkowych cząstkowych a jedynie przez całkowanie równań równowagi. Różniczkowanie równania izodyny (3.1) po „x” daje

$$\dot{f}_u \cdot \sigma_{xx}(x, f_u) - \dot{f}_0 \cdot \sigma_{xx}(x, f_0) + \int_{f_0}^{f_n} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} dy = 0. \quad (4.1)$$



Rys. 2



Rys. 3

Uwzględnienie pierwszego równania równowagi (2.1) prowadzi do zależności na σ_{xy} w dowolnym punkcie izodyny rzędu „ n ”,

$$\sigma_{xy}(x, f_n) = \sigma_{xy}(x, f_0) + \dot{f}_n \cdot \sigma_{xx}(x, f_n) - \dot{f}_0 \cdot \sigma_{xx}(x, f_0) \quad (4.2)$$

W powyższym równaniu, dla wyznaczenia σ_{xy} , należy podać wartość kombinacji składowych σ_{xx} i σ_{xy} na brzegu obszaru. Można je uzyskać z warunku brzegowego

$$\check{\sigma} \vec{n} = \vec{\gamma}, \quad (4.3)$$

gdzie: $\check{\sigma}$ — tensor naprężenia

\vec{n} — wektor normalny do brzegu

$\vec{\gamma}$ — wektor obciążeń brzegu

Równanie brzegu ma postać

$$B(x, y) = 0, \quad (4.4)$$

gdzie: $B(x, y) = f_0(x) - y$.

Wektor normalny ma tutaj postać

$$\vec{n} = \frac{(\dot{f}_0, -1)}{\sqrt{\dot{f}_0^2 + 1}} \quad (4.5)$$

Pierwsze z równań (4.3) ma wtedy postać

$$\gamma \times \sqrt{\dot{f}_0^2 + 1} = \sigma_{xx}(x, f_0) \cdot \dot{f}_0 - \sigma_{xy}(x, f_0) \quad (4.6)$$

co podstawione do (4.2) daje ostatecznie

$$\sigma_{xy}(x, f_n) = \dot{f}_n \cdot \sigma_{xx}(x, f_n) - \gamma \times \sqrt{1 + \dot{f}_0^2} \quad (4.7)$$

Wartość σ_{yy} może być otrzymana z drugiego równania równowagi

$$\frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} = -\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x}. \quad (4.8)$$

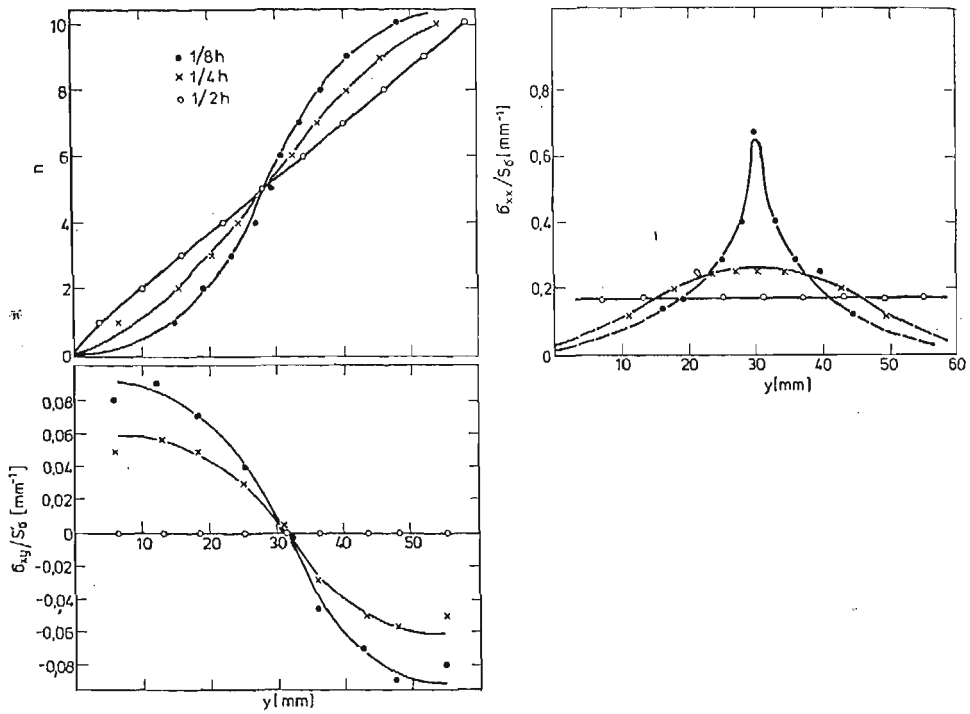
W powyższej metodzie, polegającej na całkowaniu równań równowagi przy zadane wartości σ_{xx} , łatwo można wyliczyć jedynie składową σ_{xy} , i to w punktach leżących na izodynie, przy zadanych warunkach brzegowych. Do wyznaczenia pozostałych składowych konieczne jest uzyskanie algorytmu wyznaczania pochodnych po „ y ” oraz wartości funkcji σ_{xx} we wszystkich punktach obszaru analizowanego.

Dla przykładu podajemy wykresy wartości izodyny n rys. 4a, składowej naprężenia σ_{xx} rys. 4b, składowej naprężenia σ_{xy} rys. 4c dla przekrojów modelu pokazanego na rysunku 2 w odległościach 1/8 h, 1/4 h, 1/2 h, od punktu przyłożenia siły zewnętrznej.

5. Metoda ciągłego pola izodyn

Efektywne wyznaczenie pola naprężeń przy użyciu izodyn możliwe jest jedynie wtedy, gdy znana jest funkcja izodyn ułamkowych, czyli rozkład funkcji ciągłej, która na izodynach przyjmuje wartości całkowite. Jest to funkcja $N(x, y)$, gdzie „ N ” jest liczbą rzeczywistą, „ n ” wartością izodyny i

$$N(x, f_n(x)) = n. \quad (5.1)$$



Rys. 4

Dla celów praktycznych celowe jest sformułowanie funkcji „ H ” w postaci

$$H(x, y) = S'_0 \cdot N(x, y), \quad (5.2)$$

i wtedy

$$\sigma_{xx} = \frac{\partial H}{\partial y}. \quad (5.3)$$

Po zastosowaniu pierwszego równania równowagi (1.1)

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\partial_{xy} + \frac{\partial H}{\partial x} \right) = 0, \quad (5.4)$$

co daje

$$\sigma_{xy} = -\frac{\partial H}{\partial x} + g(x). \quad (5.5)$$

Funkcja $g(x)$ może być wyznaczona z warunku brzegowego

$$g(x) = \sigma_{xy}(x, f_0) + \left(\frac{\partial H}{\partial x} \right)_{(x, f_0)}. \quad (5.6)$$

Podstawienie (4.6) i (5.3) do (5.6) pozwala uzyskać efektywny wzór na funkcję $g(x)$:

$$g(x) = \left(\frac{\partial H}{\partial x} \right)_{(x, f_0)} + \left(\frac{\partial H}{\partial y} \right)_{(x, f_0)} \cdot f_0 - \gamma_x \sqrt{1 + f_0^2}. \quad (5.7)$$

Wartości σ_{yy} wyznacza się z drugiego równania równowagi

$$\frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} = \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} - \dot{g}(x). \quad (5.8)$$

Całkując (5.8) po „y” w granicach f_0 , y otrzymuje się wzór na σ_{yy} w postaci

$$\sigma_{yy} = (\sigma_{yy})_{(x, f_0)} - \dot{g}(x) \cdot (y - f_0) + \int_{f_0}^y \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} \cdot dy. \quad (5.9)$$

Funkcja $(\sigma_{yy})_{(x, f_0)}$ jest określona przez

$$(\sigma_{yy})_{(x, f_0)} = \left(\frac{\partial H}{\partial y} \right)_{(x, f_0)} \cdot \dot{f}_0^2 - (\gamma \times \dot{f}_0 + \gamma_y) \sqrt{1 + \dot{f}_0^2}. \quad (5.10)$$

Uzyskuje się to wykorzystując drugie równanie (4.3) i znaną wyrtłość σ_{xy} .

Wariant metody ciągłego pola izodyn. Wykonanie trzech fotografii izodyn, przepuszczając wiązkę światła w trzech kierunkach w płaszczyźnie „xy”, pozwala na uproszczenie obliczeń i uzyskanie składowych naprężenia wyłącznie poprzez obliczenia algebraiczne. Wychodząc ze wzoru transformacyjnego

$$\check{\sigma}' = \check{T} \check{\sigma} \check{T}^T, \quad (5.11)$$

gdzie $T(\varphi)$ jest macierzą obrotów o kąt „ φ ” i po wyliczeniu stąd składowej σ'_{xx} uzyskuje się:

$$\sigma'_{xx} = \sigma_{xx} \cdot \cos^2 \varphi + 2\sigma_{xy} \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi + \sigma_{yy} \cdot \sin^2 \varphi. \quad (5.12)$$

Wykonanie fotografii izodyn w trzech kierunkach pod kątami $-\varphi$, 0 , φ daje na $\check{\sigma}$

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \sigma'_{xx}(0) \\ \sigma_{yy} &= \frac{\sigma'_{xx}(\varphi) + \sigma'_{xx}(-\varphi)}{2 \sin^2 \varphi} - \sigma'_{xx}(0) \cdot \operatorname{ctg}^2 \varphi, \\ \sigma_{xy} &= \frac{\sigma'_{xx}(\varphi) - \sigma'_{xx}(-\varphi)}{4 \sin \varphi \cdot \cos \varphi}. \end{aligned} \quad (5.13)$$

6. Numeryczna metoda wyznaczenia ciągłego pola odpowiadającego izoliniom

Znajdowanie ciągłego pola będącego „rozmazaniem” izolunii na obszar płaski jest typowym zadaniem dla metod aproksymacji. Występuje tutaj jednakże podstawowa trudność polegająca na tym, że doświadczalna izolunia jest pasmem o znacznej, w stosunku do jej długości szerokości. Zapamiętywanie w pamięci komputera takiej linii jest w znacznym stopniu przypadkowe, gdyż rejestrowany jest jeden punkt z szerokości linii. Zastosowanie jakiegokolwiek aproksymacji wymaga uwzględnienia tego rozrzutu. Wykluczone są tutaj wobec tego metody interpolacji. Zastosowanie metody najmniejszych kwadratów, jako najkorzystniejszej pod względem numerycznym metody aproksymacji, jest niecelowe, gdyż rozkład intensywności światła w poprzek izolunii spada z funkcją $\cos^2 x$, co należy uwzględnić w poszukiwanym algorytmie. Celowe jest wobec tego zastosowanie metody transformacji pasma w pojedynczą linię, uwzględniając określony przez fizykę zagadnienia

rozzrut pomiarów. Metoda taka podana jest w [7]. Ma ona za zadanie utworzyć linię, która przebiega możliwie blisko danych doświadczalnych i jest jednocześnie klasy C_1 . Tak uzyskane dane pośrednie są danymi wejściowymi do drugiego programu, który tworzy ciągły rozkład funkcji [8]. Kryterium wyboru jej wartości w węzłach dowolnej siatki dobrane jest tak by przechodziła ona blisko danych doświadczalnych i tworzyła powierzchnię o możliwie małej krzywiznie. Ze względu na już uzyskaną gładkość izolunii korzystne jest stosowanie miary odchylenia jako sumy kwadratów błędów. Przyjęcie miary krzywizny w postaci kwadratowej funkcji drugich pochodnych powoduje, że tak postawione zadanie prowadzi do układu równań algebraicznych, liniowego względem wartości funkcji w punktach węzłowych. Mimo, że w równaniu tym występuje wielka liczba niewiadomych dość łatwo można je rozwiązać. Proponuje się stosowanie obydwu wymienionych wyżej metod do uzyskiwania funkcji $N(x, y)$ zdefiniowanej w punkcie 5.

7. Podsumowanie

Dotychczas stosowane metody elastoptyki mają istotne braki, polegające na konieczności stosowania pracochłonnej procedury do wyznaczania pola naprężeń. W metodach tych pomiarowi podlega skomplikowana funkcja składowych naprężeń. Uzyskanie składowych tego tensora wymaga realizacji przez komputer wielu operacji arytmetycznych (rozwiązywania równań różniczkowych cząstkowych), które w przypadku stosowania metody izochrom są silnie nieliniowe. Metoda izoklin jakkolwiek daje równanie liniowe to pasmo pomiarowe jest szerokie, co zmniejsza znacznie dokładność. Metoda izodyn jest techniką prostą w użyciu dając dobrze określone wąskie pasma w całym badanym obszarze. Prosta fizyczna interpretacja izodyn, pozwalająca na bezpośrednie wyznaczenie jednej składowej tensora naprężeń, powoduje, że zastosowanie dwóch równań równowagi daje algorytm wprzód (bez rozwiązywania równań algebraicznych na każdym kroku procedury) wyznaczania pozostałych składowych. Zastosowanie metody „rozmazywania” izolunii po obszarze płaskim daje wygodny algorytm do wyliczenia pochodnych funkcji ułamkowej izodyny. W wyniku tego można uzyskać pole naprężenia w dyskretnej formie (na siatce o dowolnej odległości węzłów). Możliwe są dwa warianty metody izodyn. Pierwsza polega na wykonaniu jednego eksperymentu i zastosowaniu równań równowagi do wyliczenia składowych pola naprężenia poprzez całkowanie tych równań. Potrzebne wzory są następujące:

$$\sigma_{xx} = \frac{\partial H}{\partial y},$$

$$\sigma_{yy} = \int_{f_0}^{f_n} \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} dy - g(x) \cdot (y - f_0) + \left(\frac{\partial H}{\partial y} \right)_{(x, f_0)} \cdot f_0^2 - (\gamma \times f_0 + \gamma_y) \sqrt{1 + f_0^2}, \quad (7.1)$$

$$\sigma_{xy} = -\frac{\partial H}{\partial x} + g(x).$$

W przypadku gdy brzeg, od którego liczy się izodyny jest swobodny przyjmują one następującą postać:

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= \frac{\partial H}{\partial y}, \\ \sigma_{yy} &= \int_{f_0}^y \frac{\partial^2 H}{\partial X^2} dy - (y-f_0) \left[\left(\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} \right)_{(x,f_0)} + \left(\frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y} \right)_{(x,f_0)} \cdot \dot{f}_0 + \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{\partial H}{\partial y} \right)_{(x,f_0)} \cdot \dot{f}_0 \right] + \dot{f}_0^2 \left(\frac{\partial H}{\partial y} \right)_{(x,f_0)}, \\ \sigma_{xy} &= -\frac{\partial H}{\partial x} + \left(\frac{\partial H}{\partial x} \right)_{(x,f_0)} + \left(\frac{\partial H}{\partial y} \right)_{(x,f_0)} \cdot \dot{f}_0.\end{aligned}\tag{7.2}$$

Druga metoda wymaga dokonania tylko prostych działań algebraicznych ale niezbędne jest przeprowadzenie trzech eksperymentów, co w przypadku brzegu o rozwiniętej linii jest trudne. Składowe tensora naprężeń wyznacza się z prostych wzorów (5.13)

O wyborze metody decyduje wobec tego kształt brzegu.

Literatura cytowana w tekście

1. S. MAZURKIEWICZ, *O metodzie światła rozproszonego w elastooptyce*, Czas. Techn. 2 (1977).
2. S. MAZURKIEWICZ, *Zastosowanie metody światła rozproszonego w elastooptyce do badania zagadnień płaskich*, Czas. Techn. 4 (1977).
3. J. T. PINDER, P. STRAKA, *Response of the Integrated Polariscope*, J. Strain. Anal. 8, (1973).
4. J. T. PINDER, S. B. MAZURKIEWICZ, *Photoelastic Isodynes: A New Type of Stress-Modulated Light Intensity Distributions*, Mech. Res. Comm. 4, 4 (1977).
5. S. B. MAZURKIEWICZ, J. T. PINDER, *Integrated plane Photoelastic Method-Application of Photoelastic Isodynes*, Exp. Mech 7, 19 (1979).
6. R. WELLER, *A New Method for Photoelasticity in Three Dimensions*, J. Appl. Phys. 10, 4 (1939).
7. W. KARMOWSKI, J. ORKISZ, *Wygladanie krzywych eksperymentalnych uwzględniające fizyczną funkcję rozrzutu danych*. Konf. Problemy losowe w mechanice konstrukcji, Gdańsk 11, 1980.
8. W. KARMOWSKI, *Aproksymacja funkcji, określonej w obszarze płaskim zbiorem wartości eksperymentalnych w dowolnie rozmieszczonych punktach*, Konf. Problemy losowe w mechanice konstrukcji, Gdańsk 11, 1980.

Резюме

НОВЫЙ МЕТОД ИНТЕРПРЕТИРОВАНИЯ ИЗОБРАЖЕНИЯ ИЗОДИН

В работе представлен новый метод интерпретирования изображения изодин. Применяя изображение изодин полученное путем эксперимента и уравнение внутреннего равновесия возможным является получение тензора напряжений (в плоском состоянии) в произвольной точке изображения. Вычисления автоматизированы. Применена черновая коррекция экспериментальных данных. Указаны пользы от применения этого метода по сравнению с другими аналитическими и экспериментальными методами применяемыми в фотоупругости.

S u m m a r y

DETERMINATION OF PLANE STATE OF STRESS FROM THE IMAGE OF ISODYNES
OBTAINED BY A METHOD OF SCATTERED LIGHT

A new method of interpreting the image of isodynes has been shown. Using the image of isodynes, obtained experimentally, and the equation of internal equilibrium it is possible to get the tensor of stress (in plane state) in any point of the image. The calculations can be automatized. During the course of calculation the experimental data are equalized. Advantages, of the method as compared with other well known experimental and analytical—experimental methods used in photoelasticity, have been pointed out.

Praca została złożona w Redakcji dnia 7 maja 1981 roku.
