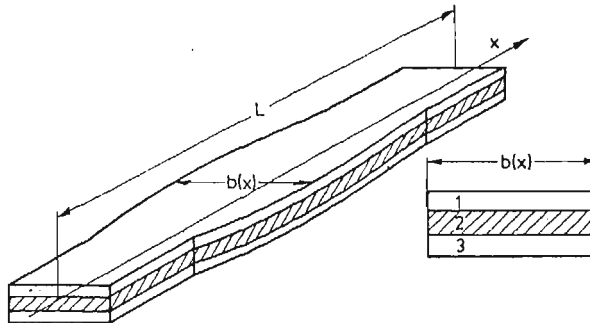


OPTYMALNE KSZTAŁTOWANIE BELKI TRÓJWARSTWOWEJ W PROCESIE USTALONYCH, HARMONICZNYCH DRGAŃ WYMUSZONYCH

ZYGMUNT BASISTA (KRAKÓW)

*Institut Mechaniki i Podstaw
Konstrukcji Maszyn
Politechnika Krakowska*

R. A. Di TARANTO [1] wyprowadził równanie różniczkowe drgań wolnopodpartej belki trójwarstwowej (typu „sandwich”), w której warstwa wewnętrzna posiada liniowe własności lepkości-prężyste (moduł zespolony) pełniąc rolę elementu tłumiącego drgania. Drgania wymuszone takiej belki analizowano w [2]. W obu wymienionych przypadkach była to belka o stałej grubości i stałej szerokości. W niniejszej pracy uogólniono równanie podane przez Di Taranto na przypadek belki o dowolnie zmiennej wzdłuż osi szerokości $b(x)$ (rys. 1). Dla takiej belki sformułowano zagadnienie optymalnego kształtowania [3].



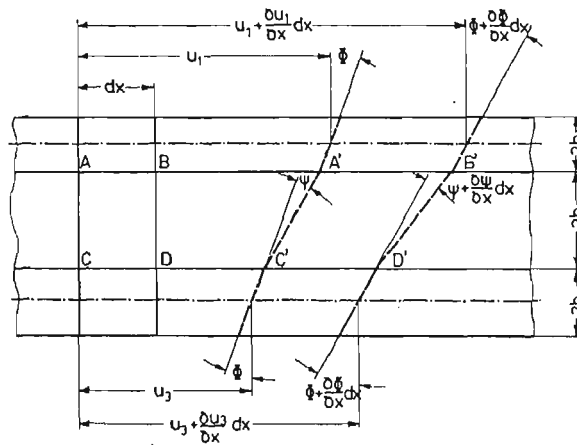
Rys. 1

(optymalnego doboru funkcji $b(x)$) ze względu na minimum (zdefiniowanej dokładnie niżej) amplitudy harmonicznym drgań wymuszonych. Problem rozwiązano w oparciu o zasadę maksimum PONTIAGINA [4]. Przedstawione wyniki otrzymano na drodze obliczeń numerycznych przeprowadzonych na EMC.

1. Równania różniczkowe ruchu

Podobnie jak w [1, 2] założymy, że warstwy zewnętrzne są idealnie sprężyste o modułach Younga E_1 i E_3 , zaś warstwa wewnętrzna posiada liniowe własności lepkości-prężyste

charakteryzujące się zespolonym modułem Kirchoffa $G^*(\omega) = G_1(\omega) + iG_2(\omega)$, (ω — częstość drgań wymuszonych). Pomijamy wpływ naprężeń ścinających w warstwach zewnętrznych na poprzeczne ugięcie belki. Zakładamy, że przemieszczenia poprzeczne wszystkich warstw są identyczne. W związku z tym, warstwa wewnętrzna podlega tylko odkształceniu postaciowemu. Przyjmujemy, że nie ma poślizgów między warstwami. Rysunek 2 przedstawia zakładaną deformację elementu belki podczas drgań poprzecznych.



Rys. 2

Przekrój A — C przechodzi w A' — C', B — D w B' — D'. Siły osiowe w zewnętrznych warstwach wynoszą odpowiednio

$$F_1 = 2E_1 h_1 b(x) \frac{\partial u_1}{\partial x}, \quad (1)$$

$$F_3 = 2E_3 h_3 b(x) \frac{\partial u_3}{\partial x}, \quad (2)$$

gdzie u_1 i u_3 są przemieszczeniami wzdłużnymi. W warstwie wewnętrznej, zgodnie z przyjętymi założeniami siła osiowa nie występuje. Na podstawie warunku równowagi sił osiowych w całym przekroju belki

$$F_1 + F_3 = 0, \quad (3)$$

otrzymujemy

$$\frac{\partial u_3}{\partial x} = - \frac{E_1 h_1}{E_3 h_3} \frac{\partial u_1}{\partial x},$$

stąd

$$u_3 = - \frac{E_1 h_1}{E_3 h_3} u_1. \quad (4)$$

Zależności geometryczne (rys. 2) prowadzą do związków

$$(u_1 - h_1 \Phi) - (u_3 + h_3 \Phi) = 2h_2(\Phi + \Psi), \quad (5)$$

$$\left(\frac{\partial u_1}{\partial x} - h_1 \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) - \left(\frac{\partial u_3}{\partial x} + h_3 \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) = 2h_2 \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right). \quad (6)$$

Oddziaływanie warstwy środkowej na warstwy zewnętrzne ogranicza się do sił stycznych (rys. 3). Warunek równowagi elementu warstwy 1 prowadzi do związku

$$F_{12} = \frac{\partial F_1}{\partial x} dx. \quad (7)$$

Z drugiej strony mamy

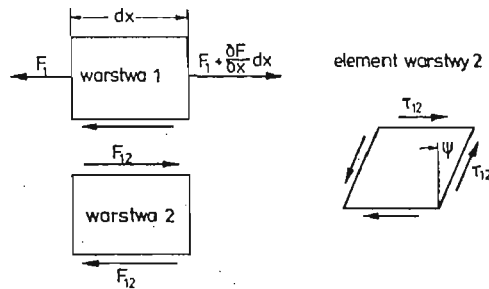
$$b(x)\tau_{12} = \frac{\partial F_1}{\partial x}, \quad (8)$$

gdzie τ_{12} jest naprężeniem stycznym w warstwie środkowej. Lepkosprężystość warstwy środkowej zdefiniowano przez

$$\tau_{12} = L_G(\Psi), \quad (9)$$

gdzie \mathcal{L}_G jest operatorem całkowym [5]

$$\mathcal{L}_G(\Psi) = G_r\Psi(t) + \int_{-\infty}^t G(t-\tau) \frac{\partial \Psi}{\partial \tau} d\tau, \quad (10)$$



Rys. 3

w którym G jest funkcją relaksacji oraz G_r modułem zrelaksowanym. Biorąc pod uwagę (1), (8) i (9) otrzymujemy

$$\Psi = \frac{2E_1 h_1}{b(x)} \frac{\partial}{\partial x} \left[b(x) \mathcal{L}_G^{-1} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} \right) \right], \quad (11)$$

gdzie \mathcal{L}_G^{-1} jest operatorem odwrotnym do \mathcal{L}_G . Po uwzględnieniu (4), związek (5) prowadzi do równania

$$\Phi = \frac{k}{d} u_1 + \frac{1}{\gamma db(x)} \frac{\partial}{\partial x} \left[b(x) \mathcal{L}_G^{-1} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} \right) \right], \quad (12)$$

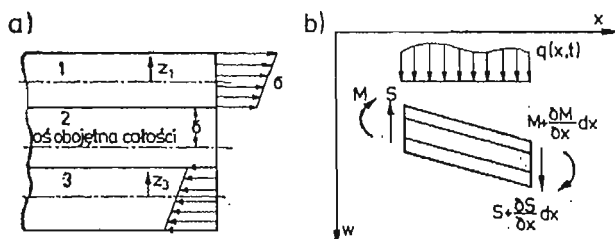
w którym

$$k = \frac{E_1 h_1 + E_3 h_3}{E_3 h_3}, \quad d = h_1 + 2h_2 + h_3$$

$$\gamma = \frac{1}{3E_1 h_1 h_2}$$

Moment zginający w całym przekroju belki (rys. 4b) wynosi

$$M = - \int_{-h_1}^{h_1} (\delta + h_1 + Z_1) dF_1 + \int_{-h_3}^{h_3} (2h_2 - \delta + h_3 - Z_3) dF_3,$$



Rys. 4

gdzie całkujemy po całej powierzchni przekroju danej warstwy oraz gdzie δ jest odległością warstwy 1 do osi obojętnej całej belki (rys. 4a) oraz z_1, z_3 są współrzędnymi określającymi odległość danego punktu przekroju do osi obojętnej określonej warstwy (rys. 4a). Korzystając z

$$dF_1 = E_1 \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + z_1 \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) b(x) dz_1,$$

$$dF_3 = E_3 \left(\frac{\partial u_3}{\partial x} + z_3 \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) b(x) dz_3,$$

$$\int_{-h_1}^{h_1} z_1 dz_1 = 0; \quad \int_{-h_3}^{h_3} z_3 dz_3 = 0,$$

$$\int_{-h_1}^{h_1} z_1^2 dz_1 = \frac{2}{3} h_1^3; \quad \int_{-h_3}^{h_3} z_3^2 dz_3 = \frac{2}{3} h_3^3,$$

wyrazimy moment zginający w całym przekroju wzorem

$$M = -2dE_1 h_1 \left[b(x) \frac{\partial u_1}{\partial x} \right] - \frac{2}{3} (E_1 h_1^3 + E_3 h_3^3) \left[b(x) \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right]. \quad (13)$$

Na podstawie równania belki jednorodnej

$$-\frac{\partial_2 M}{\partial x_2} = -e \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + q(x, t),$$

w którym M oznacza moment zginający, w jest przemieszczeniem poprzecznym, $q(x, t)$ jest obciążeniem zewnętrznym oraz e jest masą na jednostkę długości, otrzymujemy

$$\begin{aligned} 2dE_1 h_1 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[b(x) \frac{\partial u_1}{\partial x} \right] + \frac{2}{3} (E_1 h_1^3 + E_3 h_3^3) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[b(x) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] = \\ = -mb(x) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + q(x, t), \quad (14) \end{aligned}$$

gdzie $m = 2(h_1\rho_1 + h_2\rho_2 + h_3\rho_3)$, oraz ρ_1, ρ_2, ρ_3 są gęstościami odpowiednich warstw. Ponieważ

$$\Phi = \frac{\partial w}{\partial x},$$

więc równanie (12) przyjmuje postać

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[b(x) \frac{\partial u_1}{\partial x} \right] = \gamma \left[b(x) \mathcal{L}_G \left(ku_1 - d \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right]. \quad (15)$$

Równanie (14) i (15) stanowią poszukiwany układ równań różniczkowych opisujących ruch trójwarstwowej belki. W przypadku $b(x) = \text{const}$ układ ten można sprowadzić do jednego równania 6-go rzędu [1, 2].

2. Warunki brzegowe

Mamy do określenia 6 warunków brzegowych na końcach belki (dla $x^* = 0$ i $x^* = L$). Mogą to być warunki:

$$1. \quad w(x^*, t) = 0, \quad \text{lub} \quad \frac{\partial w(x^*, t)}{\partial x} = 0, \quad (16)$$

$$2. \quad M(x^*, t) = 0, \quad \text{lub} \quad \frac{\partial M(x^*, t)}{\partial x} = 0, \quad (17)$$

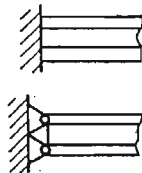
oraz warunki dotyczące przemieszczeń i sił wzdłużnych w przekrojach warstw zewnętrznych:

3. Gdy warstwy zamocowane są tak, że ich końce nie mogą się przemieszczać w kierunku osiowym to

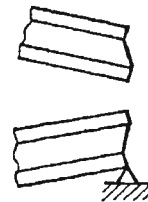
$$u_1(x^*, t) = 0. \quad (18)$$

4. Gdy warstwy zewnętrzne nie są ze sobą sztywno połączone; w związku z czym na końcu może wystąpić tzw. „ukosowanie” (rys. 6), to

$$\frac{\partial u_1(x^*, t)}{\partial x} = 0. \quad (19)$$



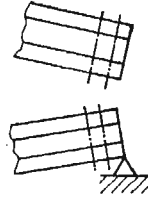
Rys. 5



Rys. 6

5. Gdy warstwy zewnętrzne są na końcach sztywno ze sobą połączone (rys. 7), skutkiem czego nie występuje „ukosowanie”, to $\psi(x^*, t) = 0$, czyli (patrz (11))

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[b(x^*) \mathcal{L}_G^{-1} \left(\frac{\partial u_1(x^*, t)}{\partial x} \right) \right] = 0. \quad (20)$$



Rys. 7

3. Sformułowanie problemu optymalizacji

Problem optymalizacji zostanie sformułowany dla stanu ustalonego drgań belki, wymuszonych harmonicznie zmiennym obciążeniem

$$q(x, t) = q(x)e^{i\omega t}. \quad (21)$$

3.1. Równania stanu. Drgania wymuszone rozpatrywanej belki można przedstawić w postaci

$$\begin{cases} w(x, t) = w(x)e^{i\omega t}, \\ u_1(x, t) = u_1(x)e^{i\omega t}. \end{cases} \quad (22)$$

Równania (14), (15) prowadzą wtedy do układu

$$\begin{cases} [\alpha(\Theta \tilde{u}'' + w')]'' - \beta^2 \alpha \tilde{u} = p(\tilde{x}), \\ [\alpha \tilde{w}']' = \tilde{\gamma} \alpha g^*(k_1 \tilde{w} - k_2 \tilde{u}'), \end{cases} \quad (23)$$

w którym wprowadzono wielkości bezwymiarowe

$$\begin{aligned} \tilde{x} &= x/L, & \tilde{u} &= u_1/L, & \tilde{w} &= w/L \\ \alpha(\tilde{x}) &= b(\tilde{x}L)/d \\ \Theta &= \frac{1}{3} \frac{E_1 h_1^3 + E_3 h_3^3}{E_1 h_1 d L}, & p(\tilde{x}) &= \frac{q(\tilde{x}L)L^2}{2E_1 h_1 d^2}, \end{aligned}$$

$$\beta^2 = \frac{mL^3}{2E_1 h_1 d} \omega^2, \quad \tilde{\gamma} = \frac{L^2}{4h_1 h_2},$$

$$k_1 = \frac{E_1 h_1 + E_3 h_3}{E_3 h_3}, \quad k_2 = \frac{d}{L}, \quad g^* = g_1 + ig_2 = \frac{G^*}{E_1}.$$

oraz G^* jest modułem zespolonym. Przedstawiając zespolone rozwiązanie układu (23) oraz wymuszenie w postaci $w = w_1 + iw_2$; $u = u_1 + iu_2$, $p = p_1 + ip_2$ oraz dokonując podstawień:

$$\begin{aligned} y_1 &= u_1, & y_2 &= u_2, & y_3 &= u_1', & y_4 &= u_2' \\ y_5 &= -[\alpha(\Theta u_1'' + w_1')], & y_6 &= -[\alpha(\Theta u_2'' + w_2')] \\ y_7 &= y_5', & y_8 &= y_6', & y_9 &= w_1, & y_{10} &= w_2, & y_{11} &= \alpha w_1', & y_{12} &= \alpha w_2', \end{aligned}$$

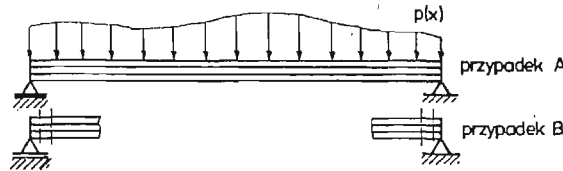
otrzymujemy układ równań różniczkowych pierwszego rzędu, nazywanych dalej **równaniami stanu**

$$\left\{ \begin{array}{l} y'_1 = y_3, \quad y'_2 = y_4, \\ y'_3 = -\frac{1}{\Theta\alpha}(y_5 + y_{11}); \quad y'_4 = -\frac{1}{\Theta\alpha}(y_6 + y_{12}), \\ y'_5 = y_7, \quad y'_6 = y_8, \\ y'_7 = -\beta^2\alpha y_1 - p_1, \quad y'_8 = -\beta^2\alpha y_2 - p_2, \\ y'_9 = \frac{1}{\alpha}y_{11}, \quad y'_{10} = \frac{1}{\alpha}y_{12}, \\ y'_{11} = \tilde{\gamma}\alpha[\eta_1(k_1 y_9 - k_2 y_3) - \eta_2(k_1 y_{10} - k_2 y_4)], \\ y'_{12} = \tilde{\gamma}\alpha[\eta_1(k_1 y_{10} - k_2 y_4) + \eta_2(k_1 y_9 - k_2 y_3)]. \end{array} \right. \quad (24)$$

gdzie

$$\eta_1 = \frac{g_1}{g_1^2 + g_2^2}, \quad \eta_2 = \frac{g_2}{g_1^2 + g_2^2}.$$

W dalszej części ograniczymy się do rozpatrzenia belki wolnopodpartej (rys. 8) z dwoma wspomnianymi sposobami połączenia warstw zewnętrznych na końcu. Oznaczmy te



Rys. 8

przypadki przez „A” i „B”. Warunki brzegowe odpowiadające wymienionym przypadkom wyrażają się następująco:

Przypadek „A”

$$\left\{ \begin{array}{l} y_1(0) = y_2(0) = y_1(1) = y_2(1) = 0, \\ y_5(0) = y_6(0) = y_5(1) = y_6(1) = 0, \\ y_{11}(0) = y_{12}(0) = y_{11}(1) = y_{12}(1) = 0. \end{array} \right. \quad (25A)$$

Przypadek „B”

$$\left\{ \begin{array}{l} y_1(0) = y_2(0) = y_1(1) = y_2(1) = 0, \\ y_5(0) = y_6(0) = y_5(1) = y_6(1) = 0, \\ k_2 y_3(1) - k_1 y_9(1) = k_2 y_4(1) - k_1 y_{10}(1) = 0. \end{array} \right. \quad (25B)$$

3.2. Sformułowanie problemu. Sformułujemy problem optymalizacji w sposób następujący: Określić funkcję $\alpha(\tilde{x})$, spełniającą warunki $\alpha_d \leq \alpha(x) \leq \alpha_g$, gdzie α_g i α_d są danymi ograniczeniami (górnym i dolnym) oraz warunek

$$\int_0^1 \alpha(\tilde{x}) d\tilde{x} = \alpha_0, \quad (27)$$

dla której funkcjonał

$$J = \int_0^1 (y_1^2 + y_2^2) d\tilde{x}, \quad (28)$$

osiągnie wartość minimalną.

Tak sformułowany problem, przy spełnieniu równań stanu (24) i warunków brzegowych (25A) lub (25B), jest typowym zagadnieniem optymalnego sterowania [4]. Funkcją sterowania jest tutaj funkcja $\alpha(\tilde{x})$ opisująca kształt belki. Warunek (27) jest warunkiem izoperymetrycznym (zadana z góry objętość). Funkcjonał (28), zwany **funkcją celu** określa uśredniony wzdułuż długości kwadrat amplitudy drgań belki.

Do rozwiązywania niniejszego problemu zastosujemy zasadę maksimum Pontriagina. Warunek izoperymetryczny (27) uwzględniamy przez zmodyfikowanie funkcjonału (28)

$$J_1 = \int_0^1 (y_1^2 + y_2^2) d\tilde{x} + \lambda \int_0^1 \alpha d\tilde{x}. \quad (29)$$

Mnożnik Lagrange'a λ dobiera się tak aby był spełniony warunek (27). Po wprowadzeniu zmiennej

$$y_0 = \int_0^{\tilde{x}} (y_1^2 + y_2^2 + \lambda \alpha) d\tilde{x}, \quad (30)$$

otrzymujemy dodatkowe równanie

$$y_0' = y_1^2 + y_2^2 + \lambda \alpha, \quad (31)$$

wraz z warunkiem

$$y_0(0) = 0. \quad (32)$$

Dzięki temu funkcjonał (29) można zapisać bardzo prosto jako

$$J_1 = y_0(1). \quad (33)$$

Utwórzmy hamiltonian

$$H = \sum_{j=0}^{12} f_j \psi_j, \quad (34)$$

gdzie f_j oznaczają prawe strony równań (24) i (31), a ψ_j są rozwiązaniami układu równań sprzężonych

$$\psi_j' = -\frac{\partial H}{\partial y_i}, \quad i = 0, 1, \dots, 12, \quad (35)$$

spełniających warunki brzegowe, określone na podstawie warunków transwersalności ($\delta(\cdot)$ oznaczają wariacje).

$$\delta J_1 + \sum_{j=0}^{12} (\psi_j(1) \delta y_j(1) - \psi_j(0) \delta y_j(0)) = 0. \quad (36)$$

Biorąc pod uwagę (33) oraz wykorzystując związki $y_0(0) = 0$ (na podstawie (32)) i $\psi_0' = 0$ otrzymujemy najpierw $\psi_0 = -1$. Po wykorzystaniu warunków brzegowych (25A) i (25B) i przyrównaniu do zera pozostałych współczynników stojących przy niezależnych wariacjach otrzymujemy:

Przypadek A

$$\begin{cases} \psi_3(0) = \psi_4(0) = \psi_3(1) = \psi_4(1) = 0, \\ \psi_7(0) = \psi_8(0) = \psi_7(1) = \psi_8(1) = 0, \\ \psi_9(0) = \psi_{10}(0) = \psi_9(1) = \psi_{10}(1) = 0. \end{cases} \quad (37A)$$

Przypadek B

$$\begin{cases} k_1 \psi_3(0) + k_2 \psi_9(0) = k_1 \psi_4(0) + k_2 \psi_{10}(0) = 0, \\ k_1 \psi_3(1) + k_2 \psi_9(1) = k_1 \psi_4(1) + k_2 \psi_{10}(1) = 0, \\ \psi_7(0) = \psi_8(0) = \psi_7(1) = \psi_8(1) = 0, \\ \psi_{11}(0) = \psi_{12}(0) = \psi_{11}(1) = \psi_{12}(1) = 0. \end{cases} \quad (37B)$$

Równania sprzężone oraz hamiltonian (po opuszczeniu wyrazów niezależnych od α) przyjmują postać

$$\begin{aligned} \psi'_1 &= \beta^2 \alpha \psi_7 + 2y_1, & \psi'_2 &= \beta^2 \alpha \psi_8 + 2y_2, \\ \psi'_3 &= -\psi_1 + \tilde{\gamma} \alpha k_2 (\eta_1 \psi_{11} + \eta_2 \psi_{12}), \\ \psi'_4 &= -\psi_2 + \tilde{\gamma} \alpha k_2 (\eta_1 \psi_{12} - \eta_2 \psi_{11}), \\ \psi'_5 &= \frac{1}{\Theta \alpha} \psi_3, & \psi'_6 &= \frac{1}{\Theta \alpha} \psi_4, \\ \psi'_7 &= -\psi_5, & \psi'_8 &= -\psi_6, \\ \psi'_9 &= -\tilde{\gamma} \alpha k_1 (\eta_1 \psi_{11} + \eta_2 \psi_{12}), \\ \psi'_{10} &= -\tilde{\gamma} \alpha k_1 (\eta_1 \psi_{12} - \eta_2 \psi_{11}), \\ \psi'_{11} &= \frac{1}{\alpha} \left(\frac{1}{\Theta} \psi_3 - \psi_9 \right), & \psi'_{12} &= \frac{1}{\alpha} \left(\frac{1}{\Theta} \psi_4 - \psi_{10} \right). \end{aligned} \quad (38)$$

$$H(\alpha) = -\frac{x}{\alpha} - Y_\alpha \quad (39)$$

gdzie

$$\begin{aligned} X &= \frac{1}{\Theta} (y_5 + y_{11}) \psi_3 + (y_6 + y_{12}) \psi_4 - y_{11} \psi_9 - y_{12} \psi_{10}, \\ Y &= \beta^2 (y_1 \psi_7 + y_2 \psi_8) - \tilde{\gamma} (G_1 \psi_{11} + G_2 \psi_{12}) + \lambda, \\ G_1 &= \eta_1 (k_1 y_9 - k_2 y_3) - \eta_2 (k_1 y_{10} - k_2 y_4), \\ G_2 &= \eta_1 (k_1 y_{10} - k_2 y_4) + \eta_2 (k_1 y_9 - k_2 y_3). \end{aligned}$$

Zgodnie z zasadą maksimum wg której optymalna funkcja spełnia warunek

$$H(\alpha_{opt}) = \sup_{\alpha_d \leq \alpha \leq \alpha_g} H(\alpha)$$

otrzymujemy:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Dla } X > 0 \text{ i } Y > 0 \\ \alpha_{opt}(\tilde{x}) = \begin{cases} \alpha_g & \text{gdy } \alpha^* > \alpha_g, \\ \alpha^* & \text{gdy } \alpha_d \leq \alpha^* \leq \alpha_g, \\ \alpha_d & \text{gdy } \alpha^* < \alpha_d, \end{cases} \\ \text{gdzie } \alpha^* = \sqrt{\frac{X}{Y}}. \\ \text{W przeciwnym wypadku} \\ \alpha_{opt}(\tilde{x}) = \begin{cases} \alpha_g & \text{gdy } H(\alpha_g) > H(\alpha_d), \\ \alpha_d & \text{gdy } H(\alpha_d) \geq H(\alpha_g). \end{cases} \end{array} \right. \quad (40)$$

4. Obliczenia numeryczne

Przedstawiony problem sprowadza się do nieliniowego zagadnienia brzegowego w skład którego wchodzi równania (24), (38) wraz z warunkami (25A) lub (25B) i (37A) lub (37B). Nieliniowość jest wynikiem związków (40), które należy podstawić w miejscu $\alpha(\tilde{x})$ do równań (24) i (38). Rozwiązywanie problemu tego typu wymaga stosowania metod numerycznych. Przedstawione niżej wyniki otrzymano po zastosowaniu metody kolejnych przybliżeń [6]. Proces iteracyjny rozpoczyna się od przyjęcia pewnej funkcji $\alpha_1(\tilde{x})$ jako pierwszego przybliżenia funkcji optymalnej, rozwiązania kolejno zagadnień brzegowych (24), (25A) lub (25B) i (38), (37A) lub (37B). Na podstawie otrzymanych rozwiązań, opierając się na (40) określamy nowe przybliżenia $\alpha_2(\tilde{x})$. Iteracja zostaje zakończona, jeżeli osiągnięta zostanie dokładność ε , tj. jeżeli spełniona będzie nierówność

$$\int_0^1 (\alpha_2(\tilde{x}) - \alpha_1(\tilde{x}))^2 d\tilde{x} \leq \varepsilon.$$

Zaletą przedstawionej metody jest to, że na każdym etapie iteracji rozwiązujemy liniowe zagadnienie brzegowe (dzięki danej w sposób jawny funkcji $\alpha(\tilde{x})$), przy czym wystarczy osobno rozwiązać najpierw równania stanu a następnie równania sprzężone. Rozwiązania równań stanu wchodzi do równań sprzężonych jako niejednorodności. Obliczenia przeprowadzono na maszynie CYBER 72 w oparciu o program napisany w języku FORTRAN. Do rozwiązania liniowych zagadnień brzegowych zastosowano program biblioteczny o nazwie LINBVP (MATHSCIENCE LIBRARY), oparty na metodzie sprowadzenia liniowego zagadnienia brzegowego do zagadnienia początkowego [7].

5. Wyniki obliczeń

Przedstawione wyniki otrzymano przy następujących danych:

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= 20; & \alpha_b &= 40; & \alpha_d &= 10 \\ k_1 &= 2; & k_2 &= 0.01 \\ \Theta &= 4.167 \times 10^{-4}; & \tilde{\gamma} &= 4 \times 10^4; \end{aligned}$$

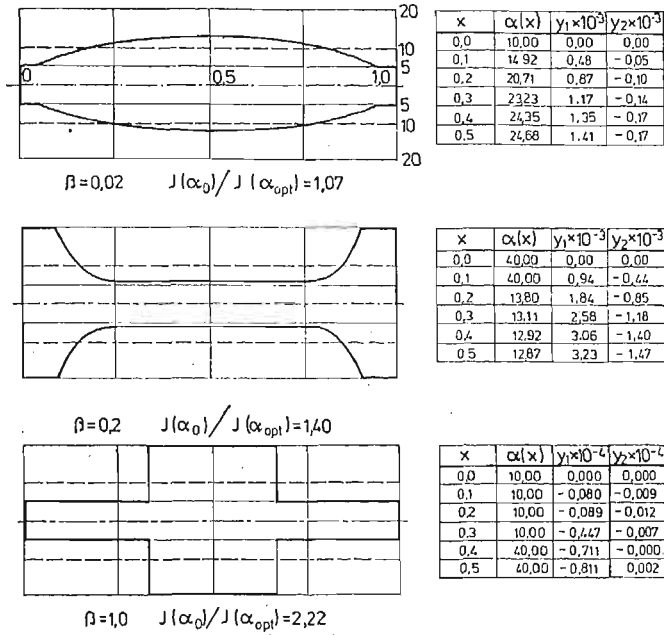
Przyjęto obciążenie stałe na całej długości belki

$$p_1(\tilde{x}) = 10^{-3}; \quad p_2(\tilde{x}) \equiv 0$$

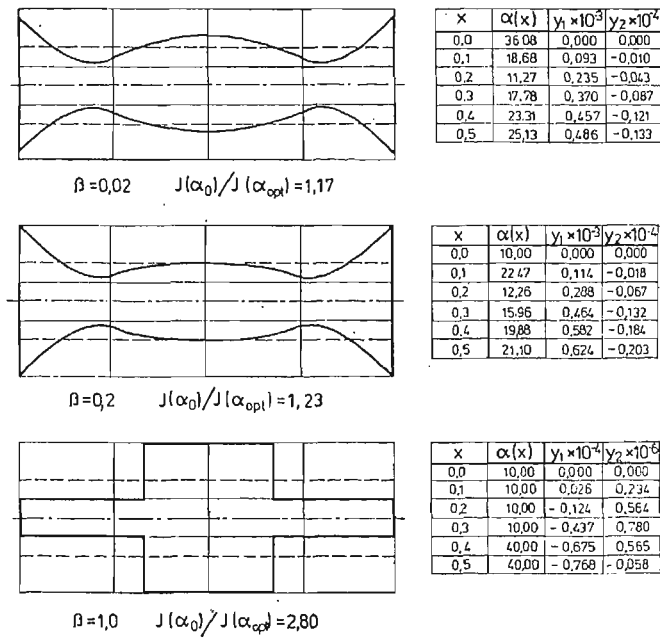
Dla zbadania wpływu wielkości tłumienia w warstwie wewnętrznej na optymalny kształt przeprowadzono obliczenia dla całkowitego braku tłumienia ($g_2 = 0$) oraz przy wielkości $g_2/g_1 = 0,5$.

Określono optymalny kształt belki dla obu przypadków (A i B) zamocowania końców oraz dla trzech wartości β : 0,02, 0,2, 1. Na rys. 9 przedstawiono optymalne kształty belki dla przypadku „A” z uwzględnieniem tłumienia, odpowiadającego podanym wartościom β . W tabelach podano liczbowe wartości funkcji $\alpha_{opt}(\tilde{x})$ w różnych punktach belki oraz wartości ugięć $y_1(\tilde{x})$ z $y_2(\tilde{x})$ dla belki optymalnej. Dla każdego przypadku określono stosunek wartości funkcjonału (28) określono dla belki o stałej szerokości $J(\alpha_0)$ do wartości minimalnej $J(\alpha_{opt})$.

Na rysunku 10 przedstawiono analogiczne wyniki odpowiadające przypadkowi „B”.



Rys. 9



Rys. 10

6. Wnioski

1) Optymalny kształt zależy od częstości wymuszenia. „Działanie” optymalnego kształtu polega jak widać na odpowiednim przesuwaniu najbliższych częstości rezonansowych w taki sposób, aby zapewnić minimum amplitudy drgań wymuszonych.

2) Na podstawie przeprowadzonych obliczeń stwierdzono, że tłumienie w warstwie wewnętrznej (w rozpatrywanych przypadkach podparcia i obciążenia) nie ma zauważalnego wpływu na optymalny kształt.

3) Istotny wpływ na optymalny kształt, przy niektórych częstościach wymuszenia wywiera sposób połączenia warstw zewnętrznych na końcu belki.

Literatura cytowana w tekście

1. R. A. Di TARANTO, *Theory of Vibratory Bending for Elastic and Viscoelastic Layered Finite — Length Beams*, J. of Appl. Mech. (Trans. ASME, ser. E), vol. 32, Nr 4, 1965, 881 - 886.
2. D. J. MEAD, S. MARKUŠ, *The Forced Vibration of a Three — Layer, Damped Sandwich Beam with Arbitrary Conditions*, J. Sound Vib. (1969) 10 (2), 163 - 175.
3. V. B. GRINEV, A. P. FILIPPOV, *Optimalizacija elementov konstrukcij po mehaničeskim karakteristikam*, Naukova dumka, Kiev 1975.
4. L. S. PONTRIAGIN, *Matematičeskaja teorija optimal'nych processov*, Nauka, Moskva 1976.
5. J. M. WARD, *Mechaniczne własności polimerów jako tworzyw konstrukcyjnych*, PWN, Warszawa 1975.
6. I. A. KRYLOV, F. L. ČERNOUŠKO, *Algoritm metoda posledovatel'nych približenij dla zadač optimal'nogo upravljenja*, Ž. vyčisl. matem. i matem. fiz., 12 Nr 1, 1972, 14 - 34.
7. V. E. SAMANSKIJ, *Metody čislennogo rešenija kraevych zadač na ÈVČM*, t. II, Naukova dumka, Kiev 1966.

Praca została wykonana w ramach tematu węzłowego 05.12 „Wytrzymałość i optymalizacja konstrukcji maszynowych i budowlanych”, koordynowanego przez IPPT PAN.

Р е з ю м е

ОПТИМАЛЬНОЕ ФОРМИРОВАНИЕ ТРЕХСЛОЙНОЙ БАЛКИ В ПРОЦЕССЕ УСТАНОВИВШИХСЯ, ГАРМОНИЧЕСКИХ ВЫНУЖДЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ

В работе выведены дифференциальные уравнения колебаний трехслойной балки (sandwich) с постоянной толщиной слоев и произвольно переменной ширине. Для такой балки формулируется вопрос оптимального подбора функции, определяющей ширину балки из-за минимума усредненного вдали длины квадрата амплитуды гармонических вынужденных колебаний. Учитывая демпфирование внутреннего слоя (комплексная шодуль) решена проблема, опираясь на принципе максимума Понтрягина и применении ЭВЦМ.

S u m m a r y

OPTIMAL DESIGN OF THE THREE-LAYER SANDWICH BEAM UNDER STABLE HARMONICAL EXCITATION

For the triple-layer sandwich beam, with the constant thickness and variable width of the layers, the differential equations have been derived. The problem of optimal choice of the beam width, based on the minimum of the mean square value (along the length) of amplitude of forced harmonical vibrations, has been formulated.

Taking into consideration damping in the inner layer (complex modulus) and basing on Pontriagin's principle the problem has been solved with the aid of computer.

Praca została złożona w Redakcji dnia 20 czerwca 1980 roku.
