

## ANALIZA STATECZNOŚCI PRYZMATYCZNYCH ŁUKÓW O OSI ODKSZTAŁCALNEJ

JAN BŁACHUT (KRAKÓW)

*Instytut Fizyki  
Politechniki Krakowskiej*

### 1. Aktualny stan zagadnienia

Przyjęcie wydłużalności osi łuku prowadzi do jakościowo innych zagadnień w problematyce badania stateczności w porównaniu np. do łuków będących w stanie bezmomentowym (1), gdzie przez utratę stateczności rozumie się wystąpienie stanu giętnego. Wyróżniając w łukach o osi wydłużalnej stan deformacji statycznej oraz badając nałożone na niego małe, liniowe drgania można wyznaczyć krytyczne wartości obciążenia i równocześnie typy utraty stateczności (bifurkacja, przeskok).

Forma utraty stateczności zależy od sposobu podparcia, kształtu osi łuku, wydłużalności jak również samej wyniosłości.

W ostatnim czasie zagadnienia krytycznego i pokrytycznego zachowania się łuków są przedmiotem coraz intensywniejszych poszukiwań. SCHREYER i MASUR [13] w oparciu o metody energetyczne rozważają kryteria utraty stateczności łuku pryzmatycznego obciążonego stałym ciśnieniem gazu. DICKIE i BROUGHTON [3] rozważają łuk obciążony radialnie. Praca ma charakter teoretyczny i doświadczalny. Wykorzystując energetyczną metodę badania stateczności stosowaną w [13] autorzy przeprowadzają porównanie otrzymanych rezultatów z danymi doświadczalnymi. Bifurkacja łuków wyniosłych z uwzględnieniem wydłużalności osi jest rozpatrywana przez DYMA [4]. Utracie stateczności oraz pokrytycznemu zachowaniu się łuków kołowych poddanych równomiernie rozłożonemu obciążeniu o nie zmieniającym się kierunku działania, poświęcony jest rozdział książki DYMA [5]. Również BRUSH i ALMROTH [2] rozważają stateczność kołowych pierścieni. Analiza zachowania się liniowo-sprężystego łuku kołowego, przy założeniu hipotezy płaskich przekrojów i przyjęciu nieliniowości geometrycznej badana jest przez SCHMIDTA [9, 10, 11, 12]. Podstawą analizy jest opis łuku poprzez układ sześciu równań różniczkowych zwyczajnych pierwszego rzędu. Praca [12] zawiera ponadto przegląd literatury poświęcony temu zagadnieniu poczynając od 1884 r. PLAUT [8] analizuje stateczność ciągłych elementów konstrukcyjnych (pręty, łuki) obciążonych niezależnie działającymi obciążeniami typu konserwatywnego jak i niekonserwatywnego, lecz w zakresie statycznego kryterium utraty stateczności [1]. Z nieliniowego równania stanu wyróżnia się równania opisujące stan zerowy (stan statycznego ugięcia w procesie obciążenia), wyboczenie oraz stan pokrytyczny. Obok wspornika rozpatrzono kołowy łuk utwierdzony przegubowo, obciążony

pionowo trzema siłami skupionymi. Zbadano wpływ niedokładności przyłożenia siły skupionej. KORNISZYN i ISANBAJEWA [6] rozważają zachowanie się powłok kołowych o stałej grubości z uwzględnieniem warunku stateczności. Podana jest analiza form utraty stateczności.

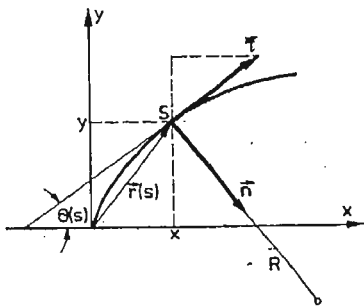
Celem obecnej pracy jest zbadanie stateczności pryzmatycznych łuków z materiału liniowo-sprężystego poprzez analizę małych, liniowych drgań nałożonych na stan statycznego, nieliniowego ugięcia. Na przykładzie łuku kołowego zostanie przedstawiony związek między formami drgań, a formami utraty stateczności.

## 2. Geometrycznie nieliniowe sformułowanie zagadnienia. Wyprowadzenie równań ruchu.

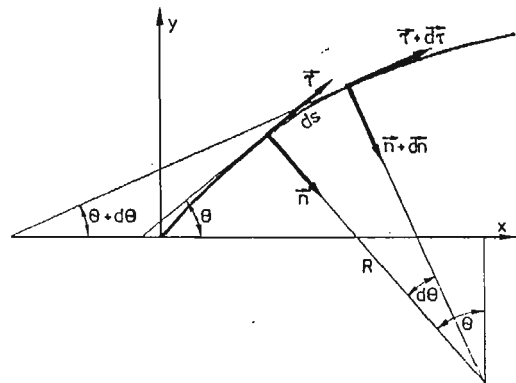
2.1. Związki geometryczne, prawo fizyczne. Rozpatrzmy łuk nieodkształcony w kartezjańskim układzie współrzędnych (rys. 1), którego równanie osi środkowej ma postać:

$$\begin{aligned} x &= \int_0^s \cos \Theta(\xi) d\xi, \\ y &= \int_0^s \sin \Theta(\xi) d\xi, \end{aligned} \quad (1)$$

gdzie kąt  $\Theta$  mierzony jest między osią  $OX$ , a styczną do osi łuku w punkcie  $s$ . Związek



Rys. 1



Rys. 2

między elementem długości łuku  $ds$ , a zmianą kąta  $d\Theta$  pokazano na rysunku 2. Krzywizna łuku oraz związki między wersorami  $\vec{n}$ ,  $\vec{\tau}$  zdefiniowane są następująco:

$$k = -\frac{1}{R} = \frac{d\Theta}{ds}; \quad \frac{d\vec{n}}{ds} = k\vec{\tau}; \quad \frac{d\vec{\tau}}{ds} = -k\vec{n}. \quad (2)$$

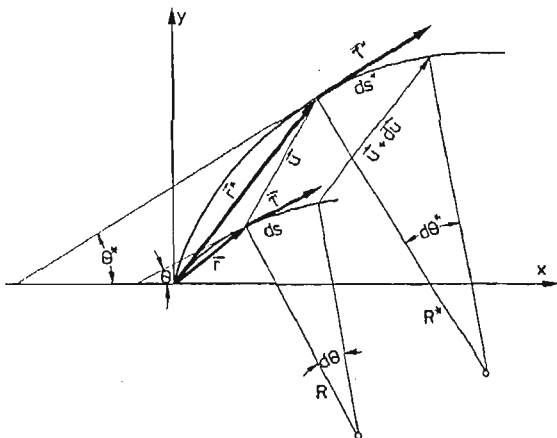
Niech tak opisany łuk ulegnie odkształceniu (rys. 3).

Promień wodzący dowolnego punktu  $s$  przed odkształceniem  $\vec{r}$  oraz po odkształceniu  $\vec{r}^*$  związane są z przemieszczeniem  $\vec{u}$  następująco:

$$\vec{r}^*(s) = \vec{r}(s) + \vec{u}(s), \quad (3)$$

przy czym zachodzą następujące związki:

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{r}^*}{ds^*} &= \vec{\tau}^*, \quad |\tau^*| = 1, \\ \frac{d\vec{r}^*}{ds} &= A_1^* \tau^*, \quad \text{gdzie} \quad A_1^* = \left| \frac{d\vec{r}^*}{ds} \right|, \\ k^* &= \frac{d\Theta^*}{ds^*} = -\frac{d\vec{\tau}^*}{ds^*} \cdot \vec{n}^*. \end{aligned} \quad (4)$$



Rys. 3

Odształcenie osi środkowej łuku  $\varepsilon_0$  w dalszym ciągu będzie rozumiane w sensie miary Cauchy'ego jako:

$$\varepsilon_0 = \frac{ds^* - ds}{ds} = A_1^* - 1. \quad (5)$$

Odształcenie  $\varepsilon$  warstwy łuku odległej o  $z$  w kierunku normalnej od osi środkowej (rys. 4) może być zapisane:

$$\varepsilon(z) = \frac{(R^* - z) d\Theta^* - (R - z) d\Theta}{(R - z) d\Theta}. \quad (6)$$

Korzystając z (4) i (5) otrzymujemy:

$$\varepsilon(z) = \frac{1}{1 - z/R} \{ \varepsilon_0 + z[(1 + \varepsilon_0)k^* - k] \}. \quad (7)$$

W układzie współrzędnych  $(\vec{\tau}, \vec{n})$  związanym z osią nieodkształconą, przemieszczenie  $\vec{u}$  zapiszemy:

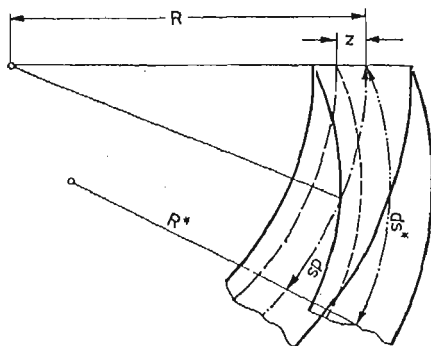
$$\vec{u} = \hat{v} \vec{\tau} + \hat{w} \vec{n}. \quad (8)$$

Z (3) i (4) otrzymujemy:

$$(1 + \varepsilon_0) \vec{\tau}^* = (1 + \hat{v}' + k \hat{w}) \vec{\tau} + (\hat{w}' - k \hat{v}) \vec{n}. \quad (9)$$

Korzystając z rozkładu wektora  $\vec{\tau}^*$  w bazie  $(\vec{\tau}, \vec{n})$  otrzymujemy z (9) następujący układ równań:

$$\begin{aligned} (1 + \varepsilon_0) \cos(\Theta^* - \Theta) &= 1 + \hat{v}' + k\hat{w}', \\ -(1 - \varepsilon_0) \sin(\Theta^* - \Theta) &= \hat{w}' - k\hat{v}'. \end{aligned} \quad (10)$$



Rys. 4

Po podniesieniu stronami do kwadratu równań (10) i dodaniu otrzymuje się następujący związek między odkształceniem osi środkowej  $\varepsilon_0$  i składowymi przemieszczenia  $\hat{v}$ ,  $\hat{w}$ :

$$\varepsilon_0 = -1 + \sqrt{(1 + \hat{v}' + k\hat{w}')^2 + (\hat{w}' - k\hat{v}')^2}. \quad (11)$$

Wprowadzając oznaczenie:

$$\hat{\psi} = \Theta^* - \Theta, \quad (12)$$

zapiszemy związek między zmianą kąta  $\Theta$ , a składowymi  $\hat{v}$ ,  $\hat{w}$  w postaci:

$$\hat{\psi} = -\arctg \frac{\hat{w}' - k\hat{v}'}{1 + \hat{v}' + k\hat{w}'}. \quad (13)$$

Jeśli oznaczymy:

$$\varkappa = (1 + \varepsilon_0) k^* - k, \quad (14)$$

to odkształcenie (6) można zapisać:

$$\varepsilon(z) = \varepsilon_0 + (-\varepsilon_0 k + \varkappa) \frac{z}{1 + kz}, \quad (15)$$

zaś naprężenie (zgodnie z prawem Hooke'a)

$$\sigma(z) = E\varepsilon_0 + E(-\varepsilon_0 k + \varkappa) \frac{z}{1 + kz}. \quad (16)$$

Należy zauważyć, że w elementarnej teorii zginania łuków na ogół przyjmuje się  $\varkappa = k^* - k$  (pomijając  $\varepsilon_0$  we wzorze (14)).

2.2. Równania ruchu. Po podstawieniu (16) do wzorów określających siły uogólnione:

$$\begin{aligned} \hat{N} &= \iint_A \sigma dA, \\ \hat{M} &= - \iint_A \sigma z dA, \end{aligned} \quad (17)$$

(gdzie  $\hat{N}$  oznacza siłę podłużną,  $\hat{M}$  — moment zginający) otrzymamy następujące zależności:

$$\begin{aligned}\hat{N} &= EA\varepsilon_0 - EI_{20}k(-\varepsilon_0 k + \varkappa), \\ \hat{M} &= -EI_{20}(-\varepsilon_0 k + \varkappa),\end{aligned}\quad (18)$$

gdzie [15]:

$$I_{20} = \iint_A \frac{z^2}{1+kz} dA.$$

Korzystając z (13), (14) i (18) otrzymujemy następujące równania (po rozwiązaniu ze względu na  $\hat{v}'$ ,  $\hat{w}'$ ,  $\hat{\psi}'$ ):

$$\begin{aligned}\hat{v}' &= -k\hat{w}' - (1 - \cos\hat{\psi}) + \left( \frac{\hat{N}}{EA} - k \frac{\hat{M}}{EA} \right) \cos\hat{\psi}, \\ \hat{w}' &= k\hat{v}' - \left( 1 + \frac{\hat{N}}{EA} - \frac{k\hat{M}}{EA} \right) \sin\hat{\psi}, \\ \hat{\psi}' &= -\frac{\hat{M}}{EI_{20}} \left( 1 + k^2 \frac{EI_{20}}{EA} \right) + k \frac{\hat{N}}{EA}.\end{aligned}\quad (19)$$

Równania ruchu układu wyprowadzimy z zasady prac przygotowanych. Warunkiem koniecznym i wystarczającym równowagi układu poddanego więzom ustalonym (tzn. niezależnym od czasu), jest równość zera sumy prac wirtualnych sił działających na układ (z uwzględnieniem sił bezwładności)

$$\delta W - \delta L = 0 \quad (20)$$

gdzie  $\delta W$  jest sumą prac przygotowanych sił wewnętrznych,  $\delta L$  zaś sumą prac przygotowanych sił zewnętrznych.

Pracę wirtualną sił wewnętrznych i zewnętrznych obliczamy z równań:

$$\begin{aligned}\delta W &= \int_V \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} dV = \int_0^l (\hat{N} \delta \varepsilon_0 - \hat{M} \delta \varkappa) ds, \\ \delta L &= \int_0^l (\vec{f} - \rho A \vec{u}) \delta \vec{u} ds,\end{aligned}\quad (21)$$

przy czym w pracy sił zewnętrznych pomijamy pracę momentu pochodzącego od bezwładności obrotu przekroju poprzecznego łuku. Całkując przez części wyrażenie (21) oraz korzystając z równań (18) i (11) otrzymujemy:

$$\begin{aligned}\delta W &= -\hat{M} \delta \hat{\psi} \Big|_0^l + \left\{ \left[ -\hat{N} \sin \hat{\psi} - \hat{M}' \frac{\cos \hat{\psi}}{1 + \varepsilon_0} \right] \delta \hat{w} \right\} \Big|_0^l + \left\{ \left[ \hat{N} \cos \hat{\psi} - \hat{M}' \frac{\sin \hat{\psi}}{1 + \varepsilon_0} \right] \delta \hat{v} \right\} \Big|_0^l + \\ &+ \int_0^l \left\{ k \left[ \hat{N} \cos \hat{\psi} - \frac{\hat{M}' \sin \hat{\psi}}{1 + \varepsilon_0} \right] - \left[ -\hat{N} \sin \hat{\psi} - \hat{M}' \frac{\cos \hat{\psi}}{1 + \varepsilon_0} \right] \right\} \delta \hat{w} + \\ &+ \int_0^l \left\{ k \left[ \hat{N} \sin \hat{\psi} + \hat{M}' \frac{\cos \hat{\psi}}{1 + \varepsilon_0} \right] - \left[ \hat{N} \cos \hat{\psi} - \hat{M}' \frac{\sin \hat{\psi}}{1 + \varepsilon_0} \right] \right\} \delta \hat{v},\end{aligned}\quad (22)$$

oraz

$$\delta L = \int_0^l \{[(\vec{f} \cdot \vec{\tau}) - \rho A \hat{v}] \delta \hat{v} + [(\vec{f} \cdot \vec{n}) - \rho A \hat{w}] \delta \hat{w}\} ds. \quad (23)$$

Postępując się (20) (wobec dowolności wariacji  $\delta \hat{v}$  i  $\delta \hat{w}$ ) otrzymuje się:

$$\begin{aligned} k(\hat{N} \cos \hat{\psi} + \hat{Q} \sin \hat{\psi}) + (\hat{N} \sin \hat{\psi} - \hat{Q} \cos \hat{\psi})' - (\vec{f} \cdot \vec{n}) + \rho A \hat{w} &= 0, \\ k(\hat{N} \sin \hat{\psi} - \hat{Q} \cos \hat{\psi}) - (\hat{N} \cos \hat{\psi} + \hat{Q} \sin \hat{\psi})' - (\vec{f} \cdot \vec{\tau}) + \rho A \hat{v} &= 0, \end{aligned} \quad (24)$$

gdzie

$$\hat{M}' = -(1 + \varepsilon_0) \hat{Q}. \quad (25)$$

Scalkowane wyrazy dają warunki brzegowe do tych równań:

$$\begin{aligned} -\hat{M} \delta \hat{\psi}|_0 &= 0, \\ [(-\hat{N} \sin \hat{\psi} + \hat{Q} \cos \hat{\psi}) \delta \hat{w}]|_0 &= 0, \\ [(\hat{N} \cos \hat{\psi} + \hat{Q} \sin \hat{\psi}) \delta \hat{v}]|_0 &= 0. \end{aligned} \quad (26)$$

Wprowadzając nowe zmienne zależne  $\hat{\mathcal{N}}$ ,  $\hat{\mathcal{X}}$ :

$$\begin{aligned} \hat{N} \cos \hat{\psi} + \hat{Q} \sin \hat{\psi} &= \hat{\mathcal{N}}, \\ -\hat{N} \sin \hat{\psi} + \hat{Q} \cos \hat{\psi} &= \hat{\mathcal{X}}, \end{aligned} \quad (27)$$

otrzymamy z (19) i (24-25) układ cząstkowych nieliniowych równań różniczkowych opisujących nieliniowe drgania łuku sprężystego:

$$\begin{aligned} \hat{v}' &= -k \hat{w} - (1 - \cos \hat{\psi}) + \varepsilon_0 \cos \hat{\psi}, \\ \hat{w}' &= k \hat{v} - \sin \hat{\psi} - \varepsilon_0 \sin \hat{\psi}, \\ \hat{\psi}' &= -\frac{\hat{M}}{EI_{20}} + k \varepsilon_0, \\ \hat{\mathcal{N}}' &= -k \hat{\mathcal{X}} - (\vec{f} \cdot \vec{\tau}) + \rho A \hat{v}, \\ \hat{\mathcal{X}}' &= k \hat{\mathcal{N}} - (\vec{f} \cdot \vec{n}) + \rho A \hat{w}, \\ \hat{M}' &= -(1 + \varepsilon_0) (\hat{\mathcal{N}} \sin \hat{\psi} + \hat{\mathcal{X}} \cos \hat{\psi}), \end{aligned} \quad (28)$$

gdzie

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{EA} (\hat{\mathcal{N}} \cos \hat{\psi} - \hat{\mathcal{X}} \sin \hat{\psi} - k \hat{M}), \quad (29)$$

z warunkami brzegowymi:

$$\begin{aligned} (\hat{M} \delta \hat{\psi})|_0 &= 0, \\ (\hat{\mathcal{X}} \delta \hat{w})|_0 &= 0, \\ (\hat{\mathcal{N}} \delta \hat{v})|_0 &= 0. \end{aligned} \quad (30)$$

### 3. Analiza stanu nieliniowego statycznego ugięcia, liniowych drgań i stanu krytycznego.

Wprowadźmy do równań stanu rozwinięcia zmiennych stanu, parametrów określających odkształcenie osi środkowej łuku i obciążenie zewnętrzne, pozwalające na zbadanie

małych drgań nałożonych na statyczne ugięcie lub zbadanie form utraty stateczności:

$$\begin{aligned}
 \hat{v}(s, t) &= v_0(s) + \varepsilon \hat{v}_1(s, t) + \dots \\
 \hat{w}(s, t) &= w_0(s) + \varepsilon \hat{w}_1(s, t) + \dots \\
 \hat{\psi}(s, t) &= \psi_0(s) + \varepsilon \hat{\psi}_1(s, t) + \dots \\
 \hat{\mathcal{N}}(s, t) &= \mathcal{N}_0(s) + \varepsilon \hat{\mathcal{N}}_1(s, t) + \dots \\
 \hat{\mathcal{K}}(s, t) &= \mathcal{K}_0(s) + \varepsilon \hat{\mathcal{K}}_1(s, t) + \dots \\
 \hat{M}(s, t) &= M_0(s) + \varepsilon \hat{M}_1(s, t) + \dots \\
 \tilde{q}(s) &= \tilde{q}_0(s) + \varepsilon \tilde{q}_1(s) + \dots \\
 \tilde{p}(s) &= \tilde{p}_0(s) + \varepsilon \tilde{p}_1(s) + \dots
 \end{aligned} \tag{31}$$

gdzie:  $(\vec{f} \cdot \vec{v}) = \tilde{q}$ ;  $(\vec{f} \cdot \vec{n}) = \tilde{p}$ ;  $\varepsilon$  — mały parametr który może być zdefiniowany nastę-

pująco:  $\varepsilon = \left| \frac{w_1 - w_0}{w_0} \right|$

Zerowy człon tego rozwinięcia opisuje statyczne ugięcie łuku, które jest dane przez następujący układ niejednorodnych, nieliniowych równań różniczkowych pierwszego rzędu:

$$\begin{aligned}
 v'_0 &= kw_0 - (1 - \cos \psi_0) + \varepsilon_{00} \cos \psi_0, \\
 w'_0 &= kv_0 - \sin \psi_0 - \varepsilon_{00} \sin \psi_0, \\
 \psi'_0 &= -\frac{M_0}{EI_{20}} + k\varepsilon_{00}, \\
 \mathcal{N}'_0 &= -k\mathcal{K}_0 - \tilde{q}_0, \\
 \mathcal{K}'_0 &= k\mathcal{N}_0 - \tilde{p}_0, \\
 M'_0 &= -(1 + \varepsilon_{00})(\mathcal{N}_0 \sin \psi_0 + \mathcal{K}_0 \cos \psi_0),
 \end{aligned} \tag{32}$$

gdzie

$$\varepsilon_{00} = \frac{1}{EA} (\mathcal{N}_0 \cos \psi_0 - \mathcal{K}_0 \sin \psi_0 - kM_0).$$

Do układu (32) dołączymy warunki brzegowe:

$$\begin{aligned}
 (M_0 \delta \psi_0)|_0^l &= 0; & (\mathcal{K}_0 \delta w_0)|_0^l &= 0; \\
 (\mathcal{N}_0 \delta v_0)|_0^l &= 0.
 \end{aligned} \tag{33}$$

**3.1. Opis liniowych drgań łuku nałożonych na stan statycznego ugięcia.** Na nieliniowe statyczne ugięcie łuku nakładamy małe liniowe drgania. Z (28) i (31) po podstawieniu:

$$\begin{aligned}
 \hat{v}_1 &= v_1 \exp(i\omega t); & \hat{w}_1 &= w_1 \exp(i\omega t), \\
 \hat{\psi}_1 &= \psi_1 \exp(i\omega t); & \hat{\mathcal{N}}_1 &= \mathcal{N}_1 \exp(i\omega t), \\
 \hat{\mathcal{K}}_1 &= \mathcal{K}_1 \exp(i\omega t); & \hat{M}_1 &= M_1 \exp(i\omega t),
 \end{aligned} \tag{34}$$

otrzymujemy układ równań

$$\begin{aligned}
 v'_1 &= -kw_1 - (1 + \varepsilon_{00}) \sin \psi_0 \psi_1 + \frac{\cos \psi_0}{EA} [\cos \psi_0 \mathcal{N}_1 - \\
 &\quad - \sin \psi_0 \mathcal{K}_1 - (\mathcal{N}_0 \sin \psi_0 + \mathcal{K}_0 \cos \psi_0) \psi_1 - kM_1],
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 w_1' &= kv_1 - (1 + \varepsilon_{00}) \cos \psi_0 \psi_1 - \frac{\sin \psi_0}{EA} [\cos \psi_0 \mathcal{N}_1 - \\
 &\quad - \sin \psi_0 \mathcal{K}_1 - (\mathcal{N}_0 \sin \psi_0 + \mathcal{K}_0 \cos \psi_0) \psi_1 - kM_1], \\
 \psi_1' &= -\frac{M_1}{EI_{20}} + \frac{k}{EA} [\cos \psi_0 \mathcal{N}_1 - \sin \psi_0 \mathcal{K}_1 - (\mathcal{N}_0 \sin \psi_0 + \mathcal{K}_0 \cos \psi_0) \psi_1 - kM_1], \\
 N_1' &= -k\mathcal{K}_1 - \bar{q}_1 - \rho\omega^2 Av_1, \\
 \mathcal{K}_1' &= k\mathcal{N}_1 - \bar{p}_1 - \rho\omega^2 Aw_1, \\
 M_1' &= -(1 + \varepsilon_{00}) (\cos \psi_0 \mathcal{K}_1 + \sin \psi_0 \mathcal{N}_1) + (\mathcal{N}_0 \cos \psi_0 - \\
 &\quad - \mathcal{K}_0 \sin \psi_0) \psi_1 - \frac{\mathcal{N}_0 \sin \psi_0 + \mathcal{K}_0 \cos \psi_0}{EA} [\cos \psi_0 \mathcal{N}_1 - \\
 &\quad - \sin \psi_0 \mathcal{K}_1 - (\mathcal{N}_0 \sin \psi_0 + \mathcal{K}_0 \cos \psi_0) \psi_1 - kM_1],
 \end{aligned} \tag{35}$$

z warunkami brzegowymi:

$$(M_0 \delta \psi_1 + M_1 \delta \psi_0)|_0^l = 0,$$

$$(\mathcal{K}_0 \delta w_1 + \mathcal{K}_1 \delta w_0)|_0^l = 0,$$

$$(\mathcal{N}_0 \delta v_1 + \mathcal{N}_1 \delta v_0)|_0^l = 0.$$

Równania (35) będziemy nazywać dalej równaniami stanu. Rozwiązanie równań stanu (35) zależy od rozwiązania  $(v_0(x), w_0(x), \psi_0(x), \mathcal{N}_0(x), \mathcal{K}_0(x), M_0(x))$  układu (32).

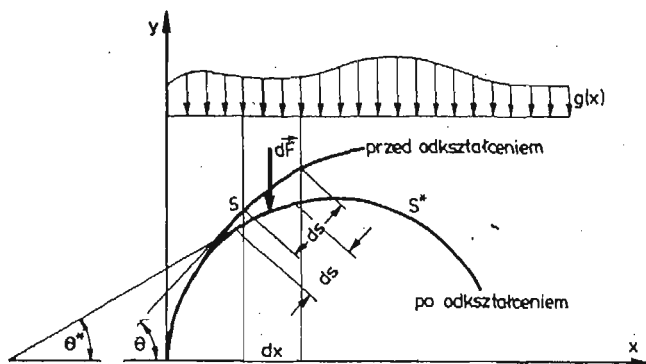
#### 4. Analiza zachowania się obciążenia zewnętrznego

4.1. Obciążenia konserwatywne. i) ciągłe obciążenie zewnętrzne na jednostkę długości osi  $x$ .

Na rysunku 5 przedstawiono schemat obciążenia o danej intensywności  $g(x)$  na jednostkę długości  $x$ .

Elementarna siła  $d\vec{F}$  liczona w kartezjańskim układzie współrzędnych  $(x, y)$  ma współrzędne:

$$d\vec{F}(0, -g(x)dx). \tag{37}$$



Rys. 5



Natomiast wektor  $\vec{f} = d\vec{F}/ds$  obciążenia zewnętrznego ma postać:

$$f(0, -g(s)\cos\theta(s)). \quad (38)$$

Składowe  $(\tilde{p}, \tilde{q})$  tego wektora liczone względem lokalnego układu odniesienia  $(\vec{n}, \vec{\tau})$  można zapisać:

$$\begin{aligned} \tilde{q} &= (\vec{f} \cdot \vec{\tau}) = -g[x(s)]\sin\theta(s)\cos\theta(s) = \tilde{q}_0, \\ \tilde{p} &= (\vec{f} \cdot \vec{n}) = g[x(s)]\cos^2\theta(s) = \tilde{p}_0. \end{aligned} \quad (39)$$

Obciążenie takie prowadzi do samosprężenia układu (35).

ii) stały kierunek obciążenia w przestrzeni.

W tym przypadku składowe  $(\tilde{p}, \tilde{q})$  dadzą się zapisać:

$$\begin{aligned} \tilde{q} &= (\vec{f} \cdot \vec{\tau}) = g_x[y(s)]\sin\theta(s)\cos\theta(s) - g_y[x(s)]\sin\theta(s)\cos\theta(s), \\ \tilde{p} &= (\vec{f} \cdot \vec{n}) = g_x[y(s)]\sin^2\theta(s) + g_y[x(s)]\cos^2\theta(s) \end{aligned} \quad (40)$$

iii) intensywność obciążenia zmienia się w określony sposób.

Jeśli przyjmiemy obciążenie zewnętrzne w postaci:

$$\vec{f} = \vec{f}(s, \vec{r}, \vec{r}', \vec{u}) = f_1(s, \vec{r}, \vec{r}', \vec{u})\vec{\tau} + f_2(s, \vec{r}, \vec{r}', \vec{u})\vec{n} \quad (41)$$

to prowadzi ono do samosprężenia układu równań stanu w przypadku gdy obciążenie  $\vec{f}$  posiada potencjał  $V(s, \vec{r}, \vec{r}', \vec{u})$  tzn.

$$f_1 = \frac{\partial V}{\partial v} \quad f_2 = \frac{\partial V}{\partial w}, \quad (42)$$

gdzie  $V(s, \vec{r}, \vec{r}', \vec{u})$  oznacza dowolną funkcję.

**4.2. Obciążenia niekonserwatywne.** i) stałe ciśnienie zewnętrzne na jednostkę długości osi nieodkształconej.

Oznaczając stałe, zewnętrzne, ciśnienie działające na jednostkę długości osi nieodkształconej przez  $\tilde{p} = p_0 = \text{const}$ , można kolejno: wektor  $\vec{f}$  oraz jego składowe  $(q, p)$  w bazie  $(\vec{n}, \vec{\tau})$  zapisać:

$$\begin{aligned} \vec{f} &= \tilde{p}(s^*)\vec{n}^* = p_0\vec{n}^*, \\ \tilde{q} &= (\vec{f} \cdot \vec{\tau}) = p_0(\vec{n}^* \cdot \vec{\tau}) = p_0\sin\psi, \\ \tilde{p} &= (\vec{f} \cdot \vec{n}) = p_0(\vec{n}^* \cdot \vec{n}) = p_0\cos\psi. \end{aligned} \quad (43)$$

Rozwijając składowe  $(\tilde{p}, \tilde{q})$  w szereg:

$$\begin{aligned} \tilde{q} &= p_0\sin\psi_0 + p_0\cos\psi_0\epsilon\psi_1 + \dots \\ \tilde{p} &= p_0\cos\psi_0 - p_0\sin\psi_0\epsilon\psi_1 + \dots \end{aligned} \quad (44)$$

otrzymujemy następujące człony tego obciążenia:

$$\begin{aligned} q_0 &= p_0\sin\psi_0; & \tilde{q}_1 &= p_0\cos\psi_0\psi_1, \\ \tilde{p}_0 &= p_0\cos\psi_0; & \tilde{p}_1 &= -p_0\sin\psi_0\psi_1, \end{aligned} \quad (45)$$

które nie prowadzą do samosprężenia równań stanu (35).

ii) stałe ciśnienie na jednostkę osi odkształconej (ciśnienie rzeczywiste).

W tym przypadku elementarna siła  $d\vec{F} = p_0 ds^* \cdot \vec{n}^*$ . Wektor  $\vec{f}$  można zapisać:

$$\vec{f} = \frac{d\vec{F}}{ds} = p_0 \frac{ds^*}{ds} \vec{n}^* = p_0(1 + \epsilon_0)\vec{n}^*, \quad (46)$$

zaś jego składowe ( $\tilde{p}$ ,  $\tilde{q}$ ):

$$\begin{aligned}\tilde{q} &= (\vec{f} \cdot \vec{\tau}) = p_0(1 + \varepsilon_0)\sin\psi, \\ \tilde{p} &= (\vec{f} \cdot \vec{n}) = p_0(1 + \varepsilon_0)\cos\psi,\end{aligned}\quad (47)$$

korzystając z (31) i (34) otrzymujemy po przekształceniach:

$$\begin{aligned}\tilde{q} &= p_0(1 + \varepsilon_{00})\sin\psi_0 + \varepsilon[(1 + \varepsilon_{00})\cos\psi_0\psi_1 + \sin\psi_0\varepsilon_{01}]p_0 + \dots, \\ \tilde{p} &= p_0(1 + \varepsilon_{00})\cos\psi_0 + \varepsilon[-(1 + \varepsilon_{00})\sin\psi_0\psi_1 + \cos\psi_0\varepsilon_{01}]p_0 + \dots\end{aligned}\quad (48)$$

Z (48) wynikają następujące składowe obciążenia:

$$\begin{aligned}\tilde{q}_0 &= p_0(1 + \varepsilon_{00})\sin\psi_0, \\ \tilde{p}_0 &= p_0(1 + \varepsilon_{00})\cos\psi_0, \\ \tilde{q}_1 &= p_0[(1 + \varepsilon_{00})\cos\psi_0\psi_1 + \sin\psi_0\varepsilon_{01}], \\ \tilde{p}_1 &= p_0[-(1 + \varepsilon_{00})\sin\psi_0\psi_1 + \cos\psi_0\varepsilon_{01}],\end{aligned}\quad (49)$$

gdzie

$$\begin{aligned}\varepsilon_{00} &= \frac{1}{EA} (\mathcal{N}_0\cos\psi_0 - \mathcal{K}_0\sin\psi_0 - kM_0) \\ \varepsilon_{01} &= \frac{1}{EA} [(\cos\psi_0\mathcal{N}_1 - \sin\psi_0\mathcal{K}_1) - (\mathcal{N}_0\sin\psi_0 + \mathcal{K}_0\cos\psi_0)\psi_1 - kM_1].\end{aligned}$$

Pełny schemat klasyfikujący 27 różnych sposobów zachowania się obciążenia z uwagi na:

- aktualny kierunek obciążenia
- prostą działania obciążenia
- intensywność obciążenia

został opracowany wspólnie z J. Skrzypkiem i zamieszczony w jego pracy [12].

## 5. Przykład. Łuk kołowy.

**5.1. Równania opisujące statyczne ugięcia oraz małe, liniowe drgania łuku.** Rozpatrywać będziemy sprężysty łuk kołowy o długości  $l$ , promieniu  $R$ , obustronnie sztywnie zamocowany, obciążony stałym ciśnieniem hydrostatycznym  $p_0$  liczonym na jednostkę długości osi nieodkształconej (tzn. ciśnienie pozorne). Przyjęcie takiego ciśnienia podyktowane było względami numerycznymi i jak wynika z porównania wzorów (49) (ciśnienie rzeczywiste) i (45) (ciśnienie pozorne), nie prowadzi do zasadniczych zmian ilościowych z uwagi na nierówności:  $\varepsilon_{00} \ll 1$  oraz  $\varepsilon_{01} \ll 1$ .

Wprowadzając następujące zmienne bezwymiarowe i oznaczenia:

$$\begin{aligned}x &= s/l, & v_0^* &= v_0/l, & w_0^* &= w_0/l, & \mathcal{N}_0^* &= \mathcal{N}_0 l/EI_0, & \psi_0^* &= \psi_0, \\ \mathcal{K}_0^* &= \mathcal{K}_0 l^2/EI_0, & M_0^* &= M_0 l/EI_0, & v_1^* &= v_1/l, & w_1^* &= w_1/l, \\ \mathcal{N}_1^* &= \mathcal{N}_1 l^2/EI_0, & \mathcal{K}_1^* &= \mathcal{K}_1 l^2/EI_0, & M_1^* &= M_1 l/EI_0 \\ \beta &= \frac{p_0 R^3}{EI_0}, & \Omega &= \varrho \omega^2 \frac{R^4 A_0}{EI_0}, & \alpha &= \frac{I_0}{A_0 l^2}, & \bar{\varepsilon} &= \frac{l}{R}.\end{aligned}$$

gdzie

$\rho$  — gęstość materiału

$E$  — moduł Younga,  $A_0$ ,  $I_0$  — oznaczają pole powierzchni przekroju poprzecznego oraz jego moment bezwładności w punkcie  $x_0$  zdefiniowanym tak aby  $A_0 l = V$  (objętość łuku)

równania opisujące statyczne ugięcie łuku mają postać:

$$\begin{aligned} v_0^* &= \bar{\varepsilon} w_0 - 1 + (1 + \varepsilon_{00}) \cos \psi_0, \\ w_0^* &= -\bar{\varepsilon} v_0 - (1 + \varepsilon_{00}) \sin \psi_0, \\ \psi_0^* &= -\frac{M_0^*}{f(\Phi)} - \bar{\varepsilon} \varepsilon_{00}, \\ \mathcal{N}_0^* &= \bar{\varepsilon} \mathcal{X}_0 - \bar{\varepsilon}^3 \beta \sin \psi_0^*, \\ \mathcal{X}_0^* &= -\bar{\varepsilon} \mathcal{N}_0 - \bar{\varepsilon}^3 \beta \cos \psi_0^*, \\ M_0^* &= -(1 + \varepsilon_{00}) (\mathcal{N}_0^* \sin \psi_0^* + \mathcal{X}_0^* \cos \psi_0^*), \end{aligned} \quad (51)$$

gdzie

$$\begin{aligned} \varepsilon_{00} &= \frac{\alpha}{\Phi} (\mathcal{N}_0^* \cos \psi_0^* - \mathcal{X}_0^* \sin \psi_0^* + \bar{\varepsilon} M_0^*), \\ A &= A_0 \Phi(x); \quad I_{20} = I_0 f(\Phi); \quad f(\Phi) = \Phi^v; \quad v = 1, 2, 3, \end{aligned} \quad (52)$$

$\Phi$  — bezwymiarowy przekrój poprzeczny łuku.

Do równań (51) dołączamy następujące warunki brzegowe wynikłe z obustronnego sztywnego utwierdzenia:

$$\begin{aligned} v_0^*(0) &= 0, & w_0^*(0) &= 0, & \psi_0^*(0) &= 0, \\ v_0^*(1/2) &= 0, & \psi_0^*(1/2) &= 0, & \mathcal{X}_0^*(1/2) &= 0. \end{aligned}$$

Warunki te odpowiadają symetrycznej formie ugięcia. Z (35) otrzymuje się następujące równania stanu:

$$\begin{aligned} v_{1i}^* &= \bar{\varepsilon} w_{1i}^* - (1 + \varepsilon_{00}) \sin \psi_0^* \psi_{1i}^* + \frac{\alpha}{\Phi} \cos \psi_0^* [\cos \psi_0^* \mathcal{N}_{1i}^* - \\ &\quad - \sin \psi_0^* \mathcal{X}_{1i}^* - (\mathcal{N}_0^* \sin \psi_0^* + \mathcal{X}_0^* \cos \psi_0^*) \psi_{1i}^* + \bar{\varepsilon} M_{1i}^*], \\ w_{1i}^* &= -\bar{\varepsilon} v_{1i}^* - (1 + \varepsilon_{00}) \cos \psi_0^* \psi_{1i}^* - \frac{\alpha}{\Phi} \sin \psi_0^* [\cos \psi_0^* \mathcal{N}_{1i}^* - \\ &\quad - \sin \psi_0^* \mathcal{X}_{1i}^* - (\mathcal{N}_0^* \sin \psi_0^* + \mathcal{X}_0^* \cos \psi_0^*) \psi_{1i}^* + \bar{\varepsilon} M_{1i}^*], \\ \psi_{1i}^* &= -\frac{M_{1i}^*}{f(\Phi)} - \bar{\varepsilon} \frac{\alpha}{\Phi} \cos \psi_0^* \mathcal{N}_{1i}^* - \sin \psi_0^* \mathcal{X}_{1i}^* - (\mathcal{N}_0^* \sin \psi_0^* + \mathcal{X}_0^* \cos \psi_0^*) \psi_{1i}^* + \bar{\varepsilon} M_{1i}^*, \\ \mathcal{N}_{1i}^* &= \bar{\varepsilon} \mathcal{X}_{1i}^* - \bar{\varepsilon}^3 \beta \cos \psi_0^* \psi_{1i}^* - \bar{\varepsilon}^4 \Omega_i \Phi v_{1i}^*, \\ \mathcal{X}_{1i}^* &= -\bar{\varepsilon} \mathcal{N}_{1i}^* + \bar{\varepsilon}^3 \beta \sin \psi_0^* \psi_{1i}^* - \bar{\varepsilon}^4 \Omega_i \Phi w_{1i}^*, \\ M_{1i}^* &= -(1 + \varepsilon_{00}) [\cos \psi_0^* \mathcal{X}_{1i}^* + \sin \psi_0^* \mathcal{N}_{1i}^* + (\mathcal{N}_0^* \cos \psi_0^* - \mathcal{X}_0^* \sin \psi_0^*) \psi_{1i}^*] - \\ &\quad - \frac{\alpha}{\Phi} (\mathcal{N}_0^* \sin \psi_0^* + \mathcal{X}_0^* \cos \psi_0^*) [\cos \psi_0^* \mathcal{N}_{1i}^* - \sin \psi_0^* \mathcal{X}_{1i}^* - \\ &\quad - (\mathcal{N}_0^* \sin \psi_0^* + \mathcal{X}_0^* \cos \psi_0^*) \psi_{1i}^* + \bar{\varepsilon} M_{1i}^*], \end{aligned} \quad (53)$$

z warunkami brzegowymi:

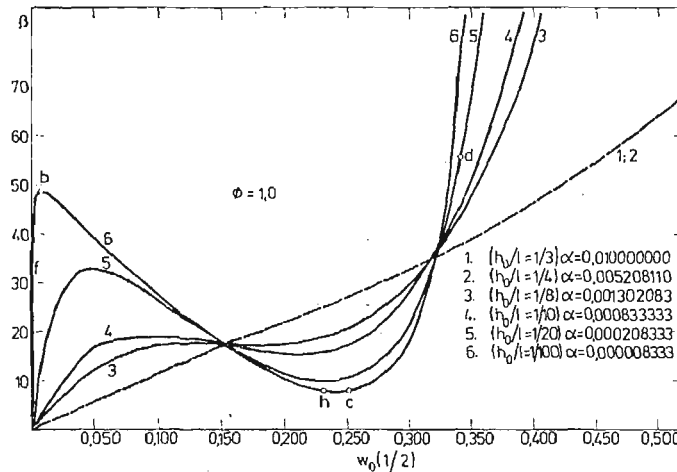
a) antysymetryczna forma drgań ( $i = 1$ )

$$\begin{aligned} v_{i1}^*(0) = 0, \quad w_{i1}^*(0) = 0, \quad \psi_{i1}^*(0) = 0, \\ w_{i1}^*(1/2) = 0, \quad \mathcal{N}_{i1}^*(1/2) = 0, \quad M_{i1}^*(1/2) = 0, \end{aligned} \quad (54)$$

b) symetryczna forma drgań ( $i = 2$ )

$$\begin{aligned} v_{i2}^*(0) = 0, \quad w_{i2}^*(0) = 0, \quad \psi_{i2}^*(0) = 0, \\ v_{i2}^*(1/2) = 0, \quad \psi_{i2}^*(1/2) = 0, \quad \mathcal{N}_{i2}^*(1/2) = 0. \end{aligned} \quad (55)$$

5.2. Związek między drganiami, a formami utraty stateczności. W celu zbadania statecznego zachowania się łuku całkowano numerycznie równania statycznego ugięcia (51) z warunkami brzegowymi (52). Otrzymane rezultaty dla wyniosłości  $\bar{\varepsilon} = 1,571$  i  $\frac{h_0}{l} = 1/100$  przedstawiono na rysunku 6. Punkt *b* (rys. 6) odpowiada krytycznej wartości obciążenia dla którego



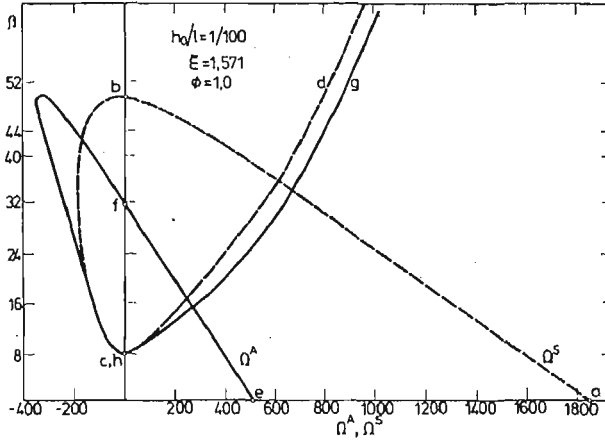
Rys. 6

następuje utrata stateczności przez przeskok. Gałąź (b—c) odpowiada niestatecznemu zachowaniu się łuku, z uwagi na formę symetryczną wybożenia. Zbiór krzywych w funkcji parametru  $\alpha$  zestawiono na rys. 6. W celu określenia obciążenia krytycznego odpowiadającego bifurkacji rozpatrzono małe, liniowe drgania nałożone na stan statycznego ugięcia wyznaczony z rozwiązań równań (51) z warunkami (52). Wykreślono zależność między wartościami kwadratów częstości antysymetrycznej  $\Omega_i^A$  i symetrycznej  $\Omega^S$ , a ugięciem  $w_0(1/2)$  w środku łuku. Odpowiednie wartości otrzymano całkując numerycznie równania stanu (53) z warunkami (54) dla antysymetrycznej lub (55) dla symetrycznej linii ugięcia.

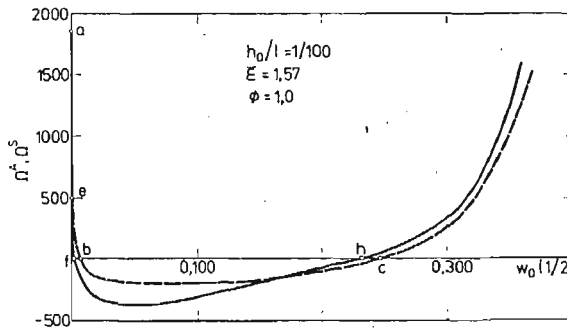
Dla  $\frac{h_0}{l} = 1/100$  otrzymano krzywe przedstawione na rysunkach 7 i 8.

Krzywe te wspólnie z krzywą z rysunku 6 charakteryzują zachowanie się łuku pryzmatycznego. Ze wzrostem siły, ugięcie  $w_0(1/2)$  rośnie, zaś częstość  $\Omega^S$  maleje (gałąź (a—b)). W punkcie *b* (siła krytyczna) następuje przeskok na gałąź *d* lub niestateczne przejście po gałęzi (b—c) ( $\Omega^S$  pozostaje wtedy ujemne). Począwszy od punktu *c* cała gałąź (c—d)

odpowiada statecznemu zachowaniu się łuku (ze względu na wyoboczenie symetryczne). Dla drgań antysymetrycznych gałąź (e—f) odpowiada statecznemu zachowaniu się łuku. Punkt f odpowiada bifurkacji. Gałąź (f—h) charakteryzuje niestateczne zachowanie się



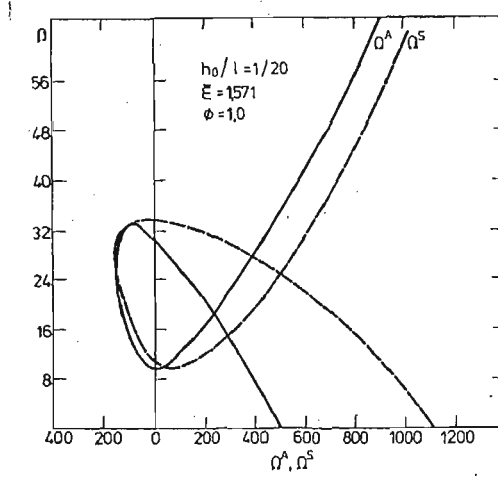
Rys. 7



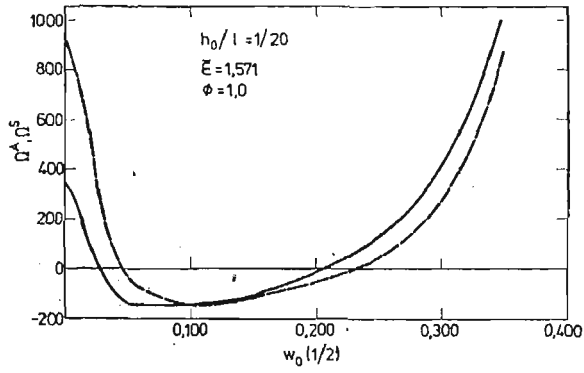
Rys. 8

łuku. Obszar stateczności pojawia się dopiero na gałęzi (h—g). Odpowiednie obszary stateczności i niestateczności, przeskok oraz bifurkacja mogą być również dobrze zilustrowane w innym układzie współrzędnych (rys. 8). Dla parametru  $\frac{h_0}{l} = 1/100, 1/10, 1/4$  analogiczne wykresy zestawiono na rys. 9, 10, 11, 12, 13, 14.

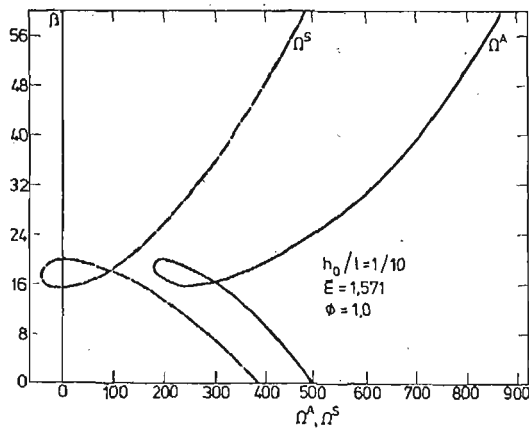
Jak widać z rysunku 11 i 12 dla  $\frac{h_0}{l} = 1/10$  nie występuje utrata stateczności przez bifurkację ( $\Omega^A > 0$ ). Zaś dla  $\frac{h_0}{l} = 1/4$  w ogóle nie jest możliwa utrata stateczności, ani poprzez bifurkację (gdyż  $\Omega^A > 0$ ), ani poprzez przeskok ponieważ  $\Omega^S > 0$ .



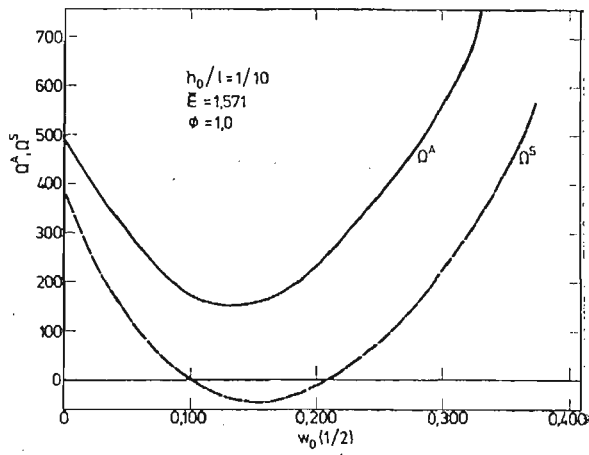
Rys. 9



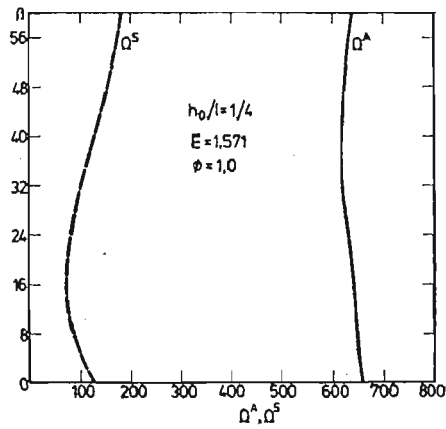
Rys. 10



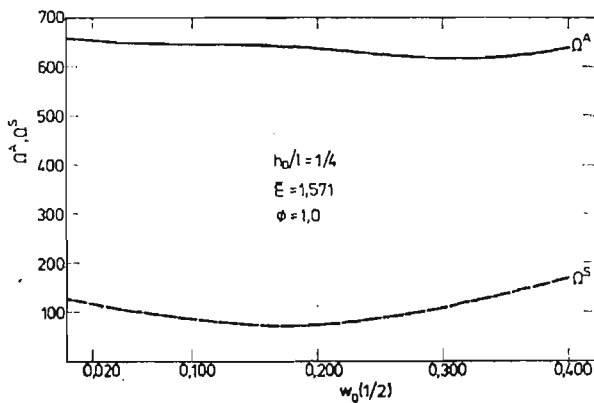
Rys. 11



Rys. 12



Rys. 13



Rys. 14

## 6. Zakończenie

Przedstawiona koncepcja wyróżnienia stanu nieliniowego, statycznego ugięcia z równoczesnym nałożeniem na niego małych, liniowych drgań oprócz swej funkcji prowadzącej do badania stateczności może być wykorzystana do optymalnego kształtowania łuków o osi wydłużalnej.

W zakończeniu pragnę również wyrazić wdzięczność doc. dr hab. inż. Antoniemu Gajewskiemu za pomoc w wykonaniu tej pracy.

### Literatura cytowana w tekście

1. J. BLACHUT, A. GAJEWSKI, *On unimodal and bimodal optimal design of funicular arches*, Int. J. Solids Struct., 17, (1981), 653 - 667.
2. D. O. BRUSH, B. O. ALMROTH, *Buckling of bars, plates and shells*, str. 120 - 141, Mc Graw-Hill, NY, 1975.
3. J. F. DICKIE, P. BROUGHTON, *Stability criteria for shallow arches*, J. of Engineering Mech. Div., ASCE, 97, (1971), 951 - 965.
4. C. L. DYM, *Buckling and postbuckling behaviour of steep compressible arches*, Int. J. Solids Struct., 9, (1973), 129 - 140.
5. C. L. DYM, *Stability theory and its applications to structural mechanics*, str. 144 - 166, Noordhoff International Publishing, Leyden, 1974.
6. M. S. KORNISZYN, F. S. ISANBAJEWA, *Gibkije plastyiny i paneli*, Moskwa, 1968.
7. M. LÉVY, *Memoire sur un nouveau cas integrable du problème d'élastique et l'une de ses applications*, Journal de Mathématique Pures et Appliquées (Liouville), series 3, 10, (1884), 5 - 42.
8. R. H. PLAUT, *Postbuckling analysis of continuous elastic systems under multiple loads; part 1: theory, part 2: applications*, J. Appl. Mech., 2, 46, (1979), 393 - 403.
9. R. SCHMIDT, *Postbuckling behaviour of uniformly compressed circular arches with clamped ends*, Z. Angew. Math. Phys. (ZAMP), 30, (1979), 553 - 556.
10. R. SCHMIDT, *Initial postcritical behaviour of circular arches with hinged ends*, Indust. Math., 29, (1979), 27 - 37.
11. R. SCHMIDT, D. A. DADDEPO, *Large deflections of eccentrically loaded arches*, Z. Angew. Math. Phys. (ZAMP), 21, (1970), 991.
12. R. SCHMIDT, *Buckling of rings subjected to unconventional loads*, Industrial Math., 30, (1980), 135 - 142.
13. H. L. SCHREYER, E. F. MASUR, *Buckling of shallow arches*, J. of the Engineering Mech. Div., ASCE, 92, (1966), 1 - 17.
14. J. SKRZYPEK, *Odkształcenia plastyczne i analiza form utraty nośności geometrycznie nieliniowych powłok toroidalnych*, Zeszyty Naukowe Pol. Krakowskiej, nr. 2, 1979.
15. R. SOLECKI, J. SZYMKIEWICZ, *Układy prętowe i powierzchniowe; obliczenia dynamiczne*, Arkady, Warszawa, 1964.

### Резюме

#### АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ ПРИЗМАТИЧЕСКИХ БАЛОК С РАСТЯЖИВАЕМОЙ ОСЕЙ

Рассматривается задача устойчивости призматических балок, в которых употребляется растяжимость оси (не принимается во внимание безмоментного состояния). Выведены точные уравнения движения, а потом выведено нелинейное состояние, на которое накладывается малые,



линейные колебания, чтобы получить возможность учитывания устойчивости или для бифуркаций или для перескока. Численные результаты получились для круглой арки под действием внешнево давления.

### Summary

#### STABILITY ANALYSIS OF EXTENSIBLE PRISMATIC ARCHES

The stability problem of a prismatic curved rod in which an extensibility of a rod axis and a bending state are taken into account, is discussed. The linear vibrations are imposed on the deformed state in order to analyse the buckling problem either by a bifurcation or by a snap-through approach. Appropriate results for a circular arch under external pressure are provided.

*Praca została złożona w Redakcji dnia 27 stycznia 1981 roku.*

Praca wykonana została w ramach problemu węzłowego 05.12 pt. „Wytrzymałość i optymalizacja konstrukcji maszynowych i budowlanych”.