

STATECZNOŚĆ EULEROWSKA PRĘTÓW PRZEKŁADKOWYCH Z RDZENIEM O ZMIENNEJ CHARAKTERYSTYCE

PIOTR A. WRZECIONIARZ (WROCLAW)

1. Wstęp

Pojawienie się tworzyw o zmiennych własnościach umożliwiło otrzymanie konstrukcji przekładkowych z rdzeniami o zmiennej charakterystyce [1]. Dotychczas rozważono utratę stateczności płyty przekładkowej z rdzeniem o celowo zróżnicowanych na grubości własnościach wytrzymałościowych [2]. Przedstawiono metodę określania sił krytycznych grubych płyt przekładkowych w przypadku lokalnej formy utraty stateczności [3]. W badaniach doświadczalnych [4, 5] wykazano, że zastosowanie rdzenia o zmiennej gęstości powoduje wzrost sił krytycznych fałdowania nawet o 68% w stosunku do płyt przekładkowych z rdzeniem o stałej charakterystyce, przy tym samym ciężarze obu rodzajów płyt.

Praca niniejsza uzupełnia dotychczasowe o przypadek wyboczenia eulerowskiego pręta przekładkowego z rdzeniem o zmiennej na grubości charakterystyce wytrzymałościowej. Analizuje się swobodnie podparty pręt poddany działaniu jednokierunkowego obciążenia ściskającego przyłożonego w płaszczyźnie okładzin. W celu wykazania korzyści związanych ze stosowaniem tego typu konstrukcji porównuje się wartości sił krytycznych prętów o stałych i zmiennych charakterystykach rdzenia.

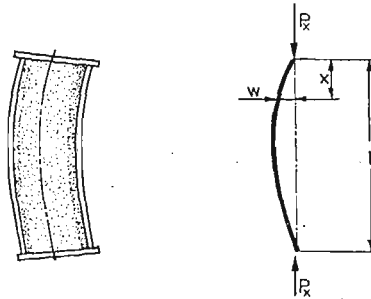
2. Analiza mechanizmu utraty stateczności

Rozważany pręt przekładkowy (rys. 1) charakteryzuje się rdzeniem o zmiennej na grubości gęstości pozornej. Tworzywo o największej gęstości pozornej, a więc i najwyższych własnościach wytrzymałościowych, znajduje się bezpośrednio przy okładzinach.

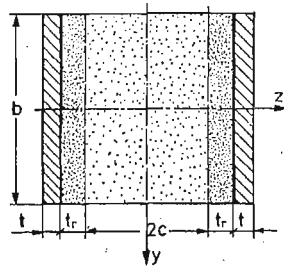
Rys. 2 przedstawia przekrój poprzeczny tego pręta. Jak wykazały badania [2, 4, 6] zmiany w tworzywie mają charakter ciągły, przy czym istotne różnice występują jedynie w cienkich zewnętrznych warstwach rdzenia, natomiast jego warstwa środkowa charakteryzuje się własnościami stałymi. Można więc w rdzeniu wyodrębnić trzy warstwy: dwie cienkie zewnętrzne o grubości t , charakteryzujące się podwyższonymi i zmieniającymi się własnościami wytrzymałościowymi oraz wewnętrzną o własnościach stałych.

Utrata stateczności w kierunku osi y (rys. 2) jest mało prawdopodobna z uwagi na znaczną sztywność okładzin zginanych w swej płaszczyźnie. Wyboczenie pręta może nastąpić w kierunku osi z . Ponieważ sztywność rdzenia w kierunku osi x , w tym i jego warstw zagęszczonych jest mała w porównaniu ze sztywnością okładzin, więc się ją powszechnie pomija. Jest to równoznaczne założeniu, że rdzeń nie przynosi naprężeń po-

dłużnych, które w całości przynoszone są przez obie okładziny. Powszechnie też przyjmuje się, że w cienkich okładzinach naprężenia normalne mają rozkład liniowy na grubości t , natomiast naprężenia ścinające są równe zero. Tak więc utrata stateczności związana będzie ze zginaniem obu okładzin, obu warstw zagęszczonych oraz warstwy środkowej. Obok zginania występować będzie, charakterystyczne dla konstrukcji warstwowych, ścinanie rdzenia, który przenosi całkowitą siłę poprzeczną. Naprężenia ścinające występujące we wszystkich warstwach rdzenia nie mogą być pominięte, gdyż mają one duży wpływ na zachowanie się konstrukcji przekładkowych.



Rys. 1. Wyboczony pręt przekładkowy.



Rys. 2. Przekrój poprzeczny pręta przekładkowego z rdzeniem o zmiennej charakterystyce.

W rozważanych prętach rdzeń połączony jest z okładzinami na całej ich powierzchni. W przypadku rdzeni o zmiennej charakterystyce nie jest możliwe stosowanie technologii spieniania „in situ” między okładzinami. Tak więc połączenie elementów składowych konstrukcji może odbyć się przez klejenie. Z uwagi na stosowane obecnie kleje, charakteryzujące się znaczną elastycznością, można przyjąć, podobnie jak w pracy [3], założenie upraszczające o istnieniu poślizgów na granicy okładzin i rdzenia.

3. Obciążenia krytyczne

Obciążenia krytyczne określone zostaną dla pręta swobodnie podpartego na obu końcach. Czyni się przy tym następujące założenia wynikające z p. 2 lub też powszechnie czynione w przypadku rozważania konstrukcji warstwowych:

- utrata stateczności pręta, o jednostkowej szerokości b , następuje w zakresie sprężystym,
- na pręt działa równomierne obciążenie ściskające P_x przyłożone na końcach pręta i przenoszone w całości przez obie okładziny,

- wszystkie warstwy pręta są sprężyste i izotropowe,
- dopuszcza się występowanie poślizgów na granicy okładzin i rdzenia,
- rdzeń składa się z dwóch jednakowych warstw zewnętrznych o grubości t , oraz jednej warstwy wewnętrznej o grubości $2c$,
- każda cienka warstwa zewnętrzna rdzenia ma własności wytrzymałościowe równe średniej arytmetycznej własności ekstremalnych w niej występujących.

Ostatnie z przedstawionych założeń sprowadza w zasadzie rozważany pręt przekładkowy do pręta o trójwarstwowym rdzeniu. Jak wykazały cytowane badania [2, 4, 6] zewnętrzne warstwy rdzenia o zmiennej charakterystyce mają niewielką grubość w stosunku do grubości warstwy środkowej. Ponadto w warstwach tych uzyskuje się własności o różnym trudnym obecnie do uchwycenia, charakterze zmian. Przyjęcie uproszczonego modelu, identycznego z przedstawionymi w [2, 3], zawęży oczywiście uniwersalność przedstawionych rozważań.

Całkowite ugięcie wybozonego pręta (rys. 1) jest sumą ugięć częściowych, z których w_g pochodzi od zginania, natomiast w_s od sił poprzecznych występujących w rdzeniu.

$$w = w_g + w_s. \quad (3.1)$$

Na podstawie klasycznej teorii gięcia można napisać, że

$$\frac{\partial^2 w_g}{\partial x^2} = -\frac{M}{B}, \quad (3.2)$$

gdzie:

B jest sztywnością na zginanie.

Od sztywności poprzecznej S zależy ugięcie w_s ,

$$w_s = \frac{\partial Q}{\partial X}, \quad (3.3)$$

przy czym

$$\frac{\partial Q}{\partial X} = P_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}. \quad (3.4)$$

Równanie (3.1) można więc przedstawić w postaci

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = -\frac{M}{B} + P_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}. \quad (3.5)$$

Pamiętając o tym, że $M = P \cdot w$ można napisać

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = -\frac{P_x \cdot w}{B} + \frac{P_x}{S} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad (3.6)$$

lub po przekształceniach

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1}{B} \frac{P_x}{1 + \frac{P_x}{S}} w = 0. \quad (3.7)$$

Dla warunków swobodnego podparcia pręta na obu końcach mamy

$$\begin{aligned}x &= 0 & w &= 0 \\x &= l & w &= 0\end{aligned}$$

Oczywiście powyższe warunki brzegowe odnoszą się tylko do sumy ugięć w , a nigdy do w_g lub w_s oddzielnie. Rozwiązanie równania (3.7) przy założonych warunkach brzegowych przyjmuje ostateczną postać

$$P_{xkr} = \frac{P_E}{1 + \frac{P_E}{P_S}} \quad (3.8)$$

Siła eulerowska P_E określona będzie zależnością

$$P_E = \frac{\pi^2 n^2}{l^2} B \quad (3.9)$$

Przed przystąpieniem do dalszych rozważań przyjmuje się, że $n = 1$, gdyż wówczas otrzymuje się najmniejszą wartość siły wybaczącej.

W sztywności na zginanie B (3.9) uwzględnić należy zginanie obu okładzin, obu warstw zagęszczonych oraz warstwy środkowej

$$B = E_t \cdot J_t + E_r \cdot J_r + E_c \cdot J_c. \quad (3.10)$$

Odpowiednie momenty bezwładności oblicza się jedynie względem osi środkowej pręta, gdyż sztywności na zginanie okładzin i warstw zagęszczonych liczone według własnych osi są pomijalnie małe dla rozważanego przypadku (cienkie okładziny, cienkie warstwy zagęszczone). Moment bezwładności okładzin określa zależność:

$$J_t = \frac{(2t + 2t_r + 2c)^3}{12} - \frac{(2t_r + 2c)^3}{12}, \quad (3.11)$$

lub

$$J_t = \frac{2}{3} [(t + t_r + c)^3 - (t_r + c)^3]. \quad (3.12)$$

Analogicznie moment bezwładności warstw zagęszczonych wyniesie

$$J_r = \frac{2}{3} [(t_r + c)^3 - c^3]. \quad (3.13)$$

Moment bezwładności warstwy środkowej

$$J_c = \frac{2}{3} c^3. \quad (3.14)$$

Uwzględniając zależności 3.10 ÷ 3.14 siła eulerowska określona może być równaniem

$$P_E = \frac{2}{3} \frac{\pi^2}{l^2} \{E_t [(t + t_r + c)^3 - (t_r + c)^3] + E_r [(t_r + c)^3 - c^3] + E_c \cdot c^3\}. \quad (3.15)$$

Siła P_E , związana z efektem przekładkowym, uwzględnia ścinanie we wszystkich fragmentach rdzenia, zarówno tych o stałej, jak i zmiennej charakterystyce. Jak wiadomo jest

ona równa iloczynowi powierzchni przekroju rdzenia A oraz modułu sprężystości poprzecznej G .

$$S = A \cdot G \quad (3.16)$$

Dla rozważanego pręta przekładkowego otrzymamy

$$P_s = 2 \cdot c \cdot b \cdot G_c + 2 \cdot t_r \cdot b \cdot G_r \quad (3.17)$$

Dla pręta o jednostkowej szerokości można oczywiście napisać

$$P_s = 2c \cdot G_c + 2t_r \cdot G_r \quad (3.18)$$

Uwzględniając (3.15) i (3.18) siłę krytyczną z równania (3.8) opisuje ostatecznie zależność

$$P_{xkr} = \frac{\frac{2}{3} \frac{\pi^2}{l^2} \{E_t[(t+t_r+c)^3 - (t_r+c)^3] + E_r[(t_r+c)^3 - c^3] + E_c \cdot c^3\}}{1 + \frac{\frac{2}{3} \frac{\pi^2}{l^2} \{E_t[(t+t_r+c)^3 - (t_r+c)^3] + E_r[(t_r+c)^3 - c^3] + E_c \cdot c^3\}}{2c \cdot G_c + 2t_r \cdot G_r}}$$

Postępując analogicznie określić można siłę krytyczną dla pręta obustronnie zamurowanego lub o mieszanych warunkach brzegowych. W tych przypadkach zależność (3.9) ulegnie zmianie podobnie jak dla prętów jednorodnych, podczas gdy (3.8), (3.10) i (3.18) pozostaną w tej samej postaci.

4. Porównanie prętów przekładkowych z rdzeniami o stałych i zmiennych charakterystykach

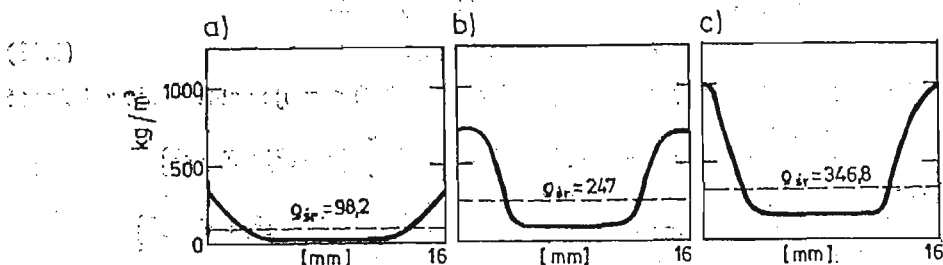
W celu sprawdzenia efektów związanych z ewentualnym stosowaniem prętów z rdzeniami o zmiennej na grubości charakterystyce wytrzymałościowej porównuje się je z odpowiednimi prętami o klasycznych rdzeniach spienianych. Obliczenia przeprowadza się dla rdzenia ze sztywnego tworzywa poliuretanowego, którego warstwy zewnętrzne mają charakterystyki identyczne do wcześniej otrzymanych [2, 4, 5]. Dobiera się do nich takie rdzenie o stałych własnościach, których gęstość pozorną jest równa średniej gęstości pozornej tych pierwszych. Innymi słowy porównanie dotyczy prętów przekładkowych o tej samej masie. Oczywiście pozostałe wielkości takie jak wymiary gabarytowe, stałe materiałowe i grubość okładzin, warunki brzegowe oraz sposób obciążenia są identyczne dla obu rodzajów prętów.

Obliczenia przeprowadza się dla prętów o długości $l = 500$ mm i całkowitej grubości rdzenia 16 mm. Wymiary powyższe gwarantują pojawienie się eulerowskiej formy utraty stateczności. Przyjmuje się ponadto, że okładziny o grubości $t = 1$ mm wykonane są z blachy duralowej o $E_t = 72,9 \cdot 10^3$ MPa oraz $\nu_t = 0,3$.

Na rysunku 3 przedstawiono wykresy zmian gęstości pozornej w trzech różnych rdzeniach. Zgodnie z założeniami przedstawionymi w p. 3 oraz w oparciu o metodę określania związków między gęstością pozorną a własnościami wytrzymałościowymi [6] można określić stałe materiałowe rdzenia. Dla warstwy zagęszczonej o grubości 3 mm, I-szego pręta mamy $E_r = 51,2$ MPa oraz $G_r = 25,6$ MPa, natomiast dla warstwy środkowej o grubości 10 mm odpowiednio $E_c = 6,88$ MPa i $G_c = 3,44$ MPa.

Siła eulerowska, zgodnie z 3.15 wyniesie 416,9 N/mm, a siła P_s zgodnie z 3.18 — 180 N/mm.

Ostatecznie siła krytyczna przyjmuje wartość $P_{xkr} = 129,6$ N/mm. Podane jednostki wynikają z rozważań pręta o szerokości $b = 1$. Średnia gęstość pozorna rdzenia wynosi 98,2 kg/m³, a odpowiedni moduł Younga 15,4 MPa [6]. Można więc obliczyć siłę krytyczną dla pręta z rdzeniem o stałej charakterystyce. Wynosi ona 95 N/mm.



Rys. 3. Zmiany gęstości pozornej w trzech rdzeniach.

Postępując analogicznie określono siły krytyczne dla prętów z rdzeniami przedstawionymi na rys. 3b i c oraz dla odpowiadających im prętów z rdzeniami o stałej gęstości pozornej. Wyniki obliczeń zestawiono w tablicy 1. Odpowiednio podano: średnią gęstość pozorną rdzenia ρ_{sr} , wartość siły krytycznej dla pręta z rdzeniem o zmiennej charakterystyce P_{xkrz} oraz dla odpowiedniego pręta o charakterystyce stałej P_{xkrst} , ΔP różnicę między obydwoma wartościami sił krytycznych oraz przyrost procentowy liczony w stosunku do siły P_{xkrz} .

Tablica 1

Porównanie sił krytycznych prętów z rdzeniami o stałych i zmiennych charakterystykach

ρ_{sr} kg/m ³	P_{xkrz} N/mm	P_{xkrst} N/mm	ΔP N/mm	$\frac{\Delta P}{P_{xkrz}} \cdot 100\%$ %
98,2	129,6	95,0	34,6	36,4
247	304,7	263,7	41,0	15,5
346,8	364,9	324,4	40,5	12,5

Z przedstawionego zestawienia wynika, że wybaczone siły krytyczne dla prętów z rdzeniami o zmiennej charakterystyce są większe niż dla prętów z rdzeniem o tej samej średniej gęstości pozornej lecz charakterystyce stałej. Podobnie jak dla płyt różnica ta jest największa dla najniższej średniej gęstości pozornej rdzenia i maleje wraz z jej wzrostem. Podane przykłady wykazały, że w przypadku stosowania obecnie wytwarzanych rdzeni poliuretanowych o zmiennej charakterystyce można pominąć sztywność zginania warstwy środkowej, która jest znacznie mniejsza od sztywności na zginanie obu okładzin i warstw zagęszczonych. Można więc tym samym uprościć zależność 3.10 i dalsze w konkretnych obliczeniach inżynierskich.

Wykazane w poprzednich pracach korzyści płynące z zastosowania konstrukcji prze-

kładkowych z rdzeniami o zmiennej charakterystyce znalazły również potwierdzenie w niniejszym opracowaniu. Należy spodziewać się, że ewentualne dalsze prace mogą również wykazać celowość wprowadzenia tego typu elementów w miejsce dotychczas stosowanych konstrukcji przekładkowych o stałych charakterystykach rdzenia.

Przedstawiona propozycja określenia stateczności prętów przekładkowych z rdzeniem o zmiennej charakterystyce nie jest jedyną możliwą. Zastosowanie innych metod obliczeniowych takich, jak np. MES pozwoli na bardziej efektywne analizowanie zjawisk występujących w konstrukcjach warstwowych o celowo zróżnicowanych własnościach wytrzymałościowych materiału rdzenia.

Literatura cytowana w tekście

1. L. STRICKER, P. WRZECIONIARZ, *Konstrukcyjny element przekładkowy*, Patent Nr 86955.
2. P. WRZECIONIARZ, *Stateczność płyty przekładkowej z rdzeniem o zmiennej charakterystyce*, Rozprawa doktorska, Komunikat IKiEM nr 159, Pol. Wrocław. 1976.
3. P. WRZECIONIARZ, *Lokale Stabilität von Sandwichplatten mit Kernen veränderlichen Festigkeit*, *Forschung im Ingenieurwesen*, vol. 45, nr 6, 1979.
4. P. WRZECIONIARZ, *Badania stateczności płyt przekładkowych z rdzeniem o zmiennej charakterystyce*, III Symp. Stateczności Konstrukcji, Łódź 1979.
5. P. WRZECIONIARZ, *Stability investigations of variable density core sandwich*. *Journal of the Engineering Mechanics*, Proceedings of ASCE
6. P. WRZECIONIARZ, *Własność wytrzymałościowe tworzyw quasi-warstwowych*, *Przegląd Mechaniczny*, Nr 5, 1981.

Резюме

ЭЙЛЕРОВА УСТОЙЧИВОСТЬ ТРЁХСЛОЙНЫХ СТЕРЖНЕЙ С ЗАПОЛНИТЕЛЕМ О ПЕРЕМЕННОЙ ХАРАКТЕРИСТИКЕ

В работе рассмотрена проблема потери эйлеровой устойчивости трёхслойного стержня с заполнителем о максимальных свойствах при пластине и уменьшающихся в направлении середины заполнителя. Выведены уравнения критической нагрузки для стержня свободно опартого на концах и сжимаемого в плоскости пластин. Сравнение результатов для трёхслойных стержней с заполнителями о постоянной и переменной характеристике показывает превосходство этих вторых.

Summary

OVERALL INSTABILITY OF SANDWICH STRUTS WITH A CORE OF VARIABLE CHARACTERISTIC

The problem of overall instability of a sandwich strut with a core of the highest strength properties near the faces and decreasing towards to the axis of symmetry is considered. A formula for the critical load for a strut having both ends free supported and compressed with forces acting in the planes of the faces is derived. The calculation shows superiority of sandwich struts with the core of variable characteristics over struts with constant properties.

Praca została złożona w Redakcji dnia 10 marca 1981 roku.