

TERMODYFUZJA W ZAGADNIENIU KONTAKTU WARSTWY I PÓLPRZESTRZENI SPRĘŻYSTEJ

ROMAN MOKRYK

Lwów

ZBIGNIEW OLESIAK

*Instytut Mechaniki
Uniwersytet Warszawski*

1. Wstęp

Dyfuzja jest zjawiskiem związanym z budową molekularną materii i polega na ruchu pojedynczych atomów i molekuł lub jonów. Zjawisko to występuje często w przyrodzie, wykorzystywane jest również w wielu procesach technologicznych przede wszystkim w fizyce materiałów, a ostatnio w elektronice. Mimo charakteru wybitnie molekularnego proces dyfuzji daje się opisać z dobrym przybliżeniem metodami teorii ośrodków ciągłych, które jak wiadomo, nie uwzględniają atomowej struktury materii. Zagadnienia dyfuzji rozpatruje się często również w ramach mechaniki statystycznej.

Przypuśćmy, że mamy do czynienia z ciałem stałym o określonych własnościach. Dla potrzeb technicznych badane są zjawiska dyfundowania do obszaru zajmowanego przez ciało stałe cząstek otaczającego je gazu, cieczy, lub innego ciała stałego w przypadku ich kontaktu. Intensywność procesu dyfuzji, jego natężenie, zależy w pierwszym rzędzie od własności chemicznych substancji biorących udział w dyfuzji, ale nie tylko. Ważne znaczenie odgrywają czynniki fizyczne jak np. ciśnienie otaczającego gazu lub cieczy, siła nacisku przy kontakcie dwóch ciał, temperatura, kierunek i natężenie strumienia ciepła, pole elektromagnetyczne, stałe materiałowe mechaniczne i termiczne, itd.

Łatwo stwierdzić, że modele matematyczne dyfuzji czy też termodyfuzji, gdy rozpatrywane jest jedno ciało z otaczającą cieczą lub gazem są znacznie prostsze, a odpowiednie równania łatwiejsze do rozwiązania w porównaniu z przypadkiem równań dyfuzji między ciałami stałymi poprzez powierzchnie kontaktu. Znacznie bardziej skomplikowane są zagadnienia dynamiczne, gdy ciśnienie, strumień ciepła, powierzchnia kontaktu, pole elektromagnetyczne są funkcjami czasu. Ostatnio przeprowadzono doświadczenia z dyfuzją metali w warunkach nieważkości i próżni kosmicznej. Wyniki tych doświadczeń są trudno dostępne dla skonfrontowania z teorią.

Założymy tu, że powierzchnia kontaktu jest płaszczyzną i rozpatrzmy przypadek

termodyfuzji między warstwą sprężystą i półprzestrzenią (lub między dwiema półprzestrzeniami), obie izotropowe i jednorodne lecz o różnych stałych materiałowych. Przy kontakcie dwóch ciał proces termodyfuzyjny może odbywać się w ten sposób, że materia przechodzi od ciała 1 do ciała 2, lub na odwrót od ciała 2 do ciała 1, może również mieć miejsce porównywalna ilościowo dyfuzja dwustronna z przechodzeniem materii w obu kierunkach.

Podstawowe równania termodyfuzji, w oparciu o termodynamikę procesów nieodwracalnych [1], zostały podane przez Ja. S. PIDSTRYHACZA [2, 3] i W. NOWACKIEGO [5, 6]. W dziedzinie tej rozwiązano niewiele zagadnień szczegółowych, wymienimy tu prace [3, 4, 7, 8, 9 i 12].

W tej pracy zajmiemy się przypadkiem, gdy termodyfuzja jednego ze składników jest o wiele bardziej istotna i interesować nas będzie zmiana koncentracji tego właśnie składnika pod wpływem pola odkształcenia i temperatury. Zagadnienie kontaktu półprzestrzeni zostało rozwiązane, w ramach przyjętych założeń, dla wszystkich czasów t , lecz bez uwzględnienia sił zewnętrznych. Przy kontakcie warstwy z półprzestrzenią uwzględniamy siły ciśnienia działające na swobodną powierzchnię warstwy przenoszące się przez powierzchnię kontaktu na półprzestrzeń sprężystą. W tym przypadku zagadnienie zostało rozwiązane dla dużych czasów t , co wynika z przybliżonego obliczenia transformat odwrotnych Laplace'a.

W wyprowadzonych równaniach i wzorach uwzględniamy pełne sprzężenie pola koncentracji, temperatury i odkształcenia. Dotyczy to przede wszystkim uogólnionego prawa Fouriera i Ficka (2.4) i (2.5) i wynikających z nich równań.

2. Równania i podstawowe związki termodyfuzji ciał sprężystych

Za punkt wyjścia bierzemy układ równań różniczkowych cząstkowych termodyfuzji ośrodka sprężystego w następującej postaci [2, 5]:

$$(2.1) \quad \mu \nabla^2 \bar{u} + (\lambda + \mu) \text{grad div } \bar{u} + \bar{X} = \rho \ddot{\bar{u}} + \gamma_{\Theta} \text{grad } \Theta + \gamma_c \text{grad } c,$$

$$(2.2) \quad (k' \nabla^2 - n \partial_t) \Theta = \gamma_{\Theta} \text{div } \dot{\bar{u}} + d \dot{c},$$

$$(2.3) \quad (a \nabla^2 - m \partial_t) c = \nabla^2 (\gamma_c \text{div } \bar{u} + dc),$$

gdzie (2.1) jest uogólnionym równaniem Naviera, (2.2) uogólnionym równaniem przewodnictwa cieplnego, a (2.3) równaniem bilansu koncentracji składnika. We wzorach tych uwzględniliśmy uogólnione prawo Fouriera (przewodnictwa cieplnego), Ficka (termodyfuzji) i Hooke'a:

$$(2.4) \quad T_0 \bar{q} = (dL_{\eta a} - L_{aa}) \text{grad } T + L_{\eta a} \gamma_c \text{grad div } \bar{u} + aL_{\eta a} \text{grad } c,$$

$$(2.5) \quad T_0 \bar{\eta} = (dL_{\eta \eta} - L_{\eta a}) \text{grad } T + L_{\eta a} \gamma_c \text{grad div } \bar{u} + aL_{\eta \eta} \text{grad } c,$$

$$(2.6) \quad \sigma = 2\mu \epsilon + (\lambda \text{div } \bar{u} - \gamma_{\Theta} \Theta - \gamma_c c) \cdot \mathbf{1}.$$

We wzorach powyższych \bar{q} jest strumieniem ciepła, c — koncentracją składnika, $\bar{\eta}$ — strumieniem dyfundującej masy, L_{aa} , $L_{\eta a}$, $L_{\eta \eta}$ są fenomenologicznymi współczynnikami Onsagera spełniającymi warunki $L_{aa} > 0$, $L_{\eta \eta} > 0$, $L_{\eta \eta} L_{aa} - L_{\eta a}^2 > 0$, γ_c , γ_e , γ_n , d , m , a , n są stałymi, u jest wektorem przemieszczenia, $\Theta = T - T_0$ różnicą temperatur względem

stanu naturalnego, σ i ϵ są odpowiednio tensorami naprężenia i odkształcenia, $\mathbf{1}$ tensorem jednostkowym, λ , μ są stałymi Lamégo, ponadto przyjęliśmy oznaczenia $T_0 k' = k$, $mL_{\eta\eta} = T_0$.

3. Zagadnienie kwazi-stacjonarne

Celem pracy jest wyprowadzenie związków i zbadanie wpływu niestacjonarnych pól odkształcenia i temperatury na rozkład koncentracji dyfundującego składnika w warunkach fizycznego kontaktu dwóch ciał sprężystych. Zagadnienie rozwiążemy przy następujących założeniach. Rozpatrzmy procesy, w których można pominąć wpływ sił masowych i sił bezwładności w równaniu bilansu pędu. Również zaniedbamy wpływ zmiany odkształcenia na pole temperatury, uwzględniając jednak wpływ odkształcenia na pole koncentracji. Przy tych założeniach równania (2.1) - (2.3) przyjmują postać

$$(3.1) \quad \mu \nabla^2 \bar{u} + (\lambda + \mu) \text{grad div } \bar{u} = \gamma_\Theta \text{grad } \Theta + \gamma_c \text{grad } c,$$

$$(3.2) \quad k' \nabla^2 \Theta - n \frac{\partial \Theta}{\partial t} = d \frac{\partial c}{\partial t},$$

$$(3.3) \quad a \nabla^2 c - m \frac{\partial c}{\partial t} = \gamma_c \nabla^2 \text{div } \bar{u} + d \nabla^2 c.$$

Równania różniczkowe cząstkowe (3.1) - (3.3) przekształcimy do bardziej dogodnej postaci. Podziałamy operatorem div na równanie (3.1), otrzymując

$$(3.4) \quad (\lambda + 2\mu) \nabla^2 \text{div } \bar{u} = \gamma_\Theta \nabla^2 \Theta + \gamma_c \nabla^2 c.$$

Po uwzględnieniu równania (3.4) wyrugujemy $\nabla^2 \text{div } \bar{u}$ z równania (3.3). Wtedy równania (3.2) i (3.3) sprowadzą się do następującego układu równań różniczkowych cząstkowych drugiego rzędu

$$(3.5) \quad \nabla^2 c - \frac{1}{k_c} \frac{\partial c}{\partial t} + \delta_c \frac{\partial \Theta}{\partial t},$$

$$(3.6) \quad \nabla^2 \Theta - \frac{1}{k_T} \frac{\partial \Theta}{\partial t} = \delta_T \frac{\partial c}{\partial t},$$

gdzie

$$k_c = \frac{[(\lambda + 2\mu)(a - d) - \gamma_c^2]}{[m(\lambda + 2\mu) + d\gamma_c \gamma_\Theta] k'}, \quad \delta_c = \frac{n\gamma_c \gamma_\Theta}{[(\lambda + 2\mu)(a - d) - \gamma_c^2] k'}, \quad k_T n = k', \quad \delta_T k' = d.$$

W ten sposób sprowadziliśmy przypadek kwazi-stacjonarny do układu dwóch równań sprzężonych (3.5) i (3.6) oraz równania Naviera (uogólnionego) (3.1). Zagadnienia kwazi-stacjonarne termodyfuzji ośrodków sprężystych były już rozpatrywane w pracach [3, 4] jednak bez uwzględnienia wpływu zmian pól odkształcenia i koncentracji na temperaturę. W pracy [7] pominięto wpływ odkształcenia na pole temperatury i koncentracji.

4. Termodyfuzja przy kontakcie warstwy sprężystej i półprzestrzeni sprężystej

Warstwa sprężysta o grubości h znajduje się w stanie idealnego kontaktu z półprzestrzenią sprężystą. Układ współrzędnych dobieramy w ten sposób, że płaszczyzną kontaktu

jest płaszczyzna $z = 0$, a płaszczyzną swobodną $z = +h$. Zagadnienie nie zależy od współrzędnych x, y . W tym układzie równania różniczkowe cząstkowe (3.1), (3.5) i (3.6) sprowadzą się do następujących równań

$$(4.1) \quad (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} = \gamma_\Theta \frac{\partial \Theta}{\partial z} + \gamma_c \frac{\partial c}{\partial z},$$

$$(4.2) \quad \frac{\partial^2 c}{\partial z^2} - \frac{1}{k_c} \frac{\partial c}{\partial t} = \delta_c \frac{\partial \Theta}{\partial t},$$

$$(4.3) \quad \frac{\partial^2 \Theta}{\partial z^2} - \frac{1}{k_T} \frac{\partial \Theta}{\partial z} = \delta_T \frac{\partial c}{\partial t}.$$

W dalszym ciągu wartości stałych i składowe rozpatrywanych pól będziemy oznaczać wskaźnikiem „1” dla warstwy i wskaźnikiem „2” dla półprzestrzeni. Zakładamy, że w stanie naturalnym (czyli początkowym) jest brak odkształceń, a pola koncentracji i temperatury przyjmują wartości:

dla $t = 0$

$$(4.4) \quad \Theta_1(z, 0) = \Theta_1^0, \quad \Theta_2(z, 0) = \Theta_2^0,$$

$$(4.5) \quad c_1(z, 0) = c_1^0, \quad c_2(z, 0) = c_2^0.$$

Założmy ponadto, że na swobodnej powierzchni warstwy $z = +h$ działa temperatura i ciśnienie

$$(4.6) \quad \Theta_1(h, t) = q(t), \quad \sigma_{zz}(h, t) = -\sigma(t)$$

strumień dyfundującej materii jest natomiast równy zeru:

$$(4.7) \quad \left[D_{\eta c}^1 \frac{\partial c_1}{\partial z} + D_{\eta T}^1 \frac{\partial \Theta_1}{\partial z} + D_{\eta E}^1 \frac{\partial e_1}{\partial z} \right]_{z=h} = 0$$

albo znany jest potencjał chemiczny

$$(4.8) \quad M^1 = -\gamma_c \varepsilon_{kk1} - d^1 \Theta_1 - a^1 c.$$

W płaszczyźnie styku warstwy i półprzestrzeni, tzn. dla $z = 0$, zachodzą warunki ciągłości:

strumienia ciepła

$$(4.9) \quad D_{qT}^1 \frac{\partial \Theta_1}{\partial z} + D_{qc}^1 \frac{\partial c_1}{\partial z} + D_{qE}^1 \frac{\partial e_1}{\partial z} = D_{qT}^2 \frac{\partial \Theta_2}{\partial z} + D_{qc}^2 \frac{\partial c_2}{\partial z} + D_{qE}^2 \frac{\partial e_2}{\partial z},$$

strumienia dyfundującej masy

$$(4.10) \quad D_{\eta T}^1 \frac{\partial \Theta_1}{\partial z} + D_{\eta c}^1 \frac{\partial c_1}{\partial z} + D_{\eta E}^1 \frac{\partial e_1}{\partial z} = D_{\eta T}^2 \frac{\partial \Theta_2}{\partial z} + D_{\eta c}^2 \frac{\partial c_2}{\partial z} + D_{\eta E}^2 \frac{\partial e_2}{\partial z}$$

ponadto, w przypadku idealnego kontaktu termicznego, równość temperatury

$$(4.11) \quad \Theta_1 = \Theta_2,$$

oraz równość wartości potencjału chemicznego

$$(4.12) \quad d^1 \Theta_1 + a^1 c_1 + \gamma_c^1 e_1 = d^2 \Theta_2 + a^2 c_2 + \gamma_c^2 e_2.$$

Dla $z \rightarrow -\infty$ przyjmujemy, że

$$(4.13) \quad \Theta_2 \rightarrow \Theta_2^0, \quad c_2 \rightarrow c_2^0.$$

We wzorach (4.9) i (4.10) oraz w dalszym ciągu przyjęto następujące oznaczenia

$$(4.14) \quad \begin{aligned} T_0 D_{qc} &= aL_{\eta q}, & T_0 D_{qT} &= dL_{\eta q} - L_{qq}, & T_0 D_{qE} &= \gamma_c L_{\eta q}, \\ T_0 D_{\eta c} &= aL_{\eta \eta}, & T_0 D_{\eta T} &= dL_{\eta \eta} - L_{\eta q}, & T_0 D_{\eta E} &= \gamma_c L_{\eta \eta}. \end{aligned}$$

Przy przyjętych założeniach: $e = \operatorname{div} \bar{u} = \frac{\partial uz}{\partial z}$. Z uogólnionego prawa Hooke'a (2.6), po wykorzystaniu równania równowagi $\sigma_{zz}(z, t) = -\sigma(t)$, otrzymamy

$$(4.15) \quad e = \gamma_\Theta^* \Theta + \gamma_c^* c + \sigma^*(t)$$

gdzie

$$(\lambda + 2\mu)\gamma_\Theta^* = \gamma_\Theta, \quad \gamma_c^*(\lambda + 2\mu) = \gamma_c$$

oraz

$$(\lambda + 2\mu)\sigma^*(t) = -\sigma(t).$$

5. Rozwiązanie metodą przekształcenia całkowego Laplace'a

Transformaty Laplace'a będziemy oznaczać wężykiem nad odpowiednią literą. Zastosujemy transformatę Laplace'a do równań (4.2) i (4.3). Otrzymamy wtedy

$$(5.1) \quad \frac{d^2 \check{c}}{dz^2} - \frac{1}{k_c} [s\check{c} - c^0] = \delta_c [s\check{\Theta} - \Theta^0],$$

$$(5.2) \quad \frac{d^2 \check{\Theta}}{dz^2} - \frac{1}{k_T} [s\check{\Theta} - \Theta^0] = \delta_T [s\check{c} - c^0].$$

Równanie charakterystyczne powyższego układu równań przyjmie postać

$$(5.3) \quad \lambda^4 - a_k s \lambda^2 + a_\delta s^2 = 0$$

gdzie

$$a_k = \frac{1}{k_c} + \frac{1}{k_T}, \quad a_\delta = \frac{1}{k_c k_T} - \delta_c \delta_T$$

Pierwiastki równania charakterystycznego przyjmują wartości

$$(5.4) \quad \lambda_1 = \sqrt{sr_+}, \quad \lambda_2 = -\sqrt{sr_+}, \quad \lambda_3 = \sqrt{sr_-}, \quad \lambda_4 = -\sqrt{sr_-},$$

gdzie $r_{+-} = \frac{1}{2}(a_k \pm \sqrt{a_k^2 - 4a_\delta})$.

Można udowodnić, że wyróżnik określający pierwiastki równania charakterystycznego jest dodatnio określony

$$(5.5) \quad a_k^2 - 4a_\delta = \left(\frac{1}{k_c} + \frac{1}{k_T}\right)^2 - 4\left(\frac{1}{k_c k_T} - \delta_c \delta_T\right) = \left(\frac{1}{k_c} - \frac{1}{k_T}\right)^2 + 4\delta_T \delta_c > 0$$

zgodnie z definicją wielkości δ_c i δ_T [5]. Ponadto

$$a_\delta = \frac{1}{k_c k_T} - \delta_c \delta_T = \frac{n}{k'} \frac{m(\lambda + 2\mu)}{[(\lambda + 2\mu)(a-d) - \gamma_c^2]}.$$

Ponieważ stałe wchodzące do powyższego wzoru są dodatnie, wynika że $a_\delta > 0$, a stąd również, że $r_{+-} > 0$.

Całkę ogólną układu równań (5.1) i (5.2) można przedstawić w postaci następującej:

$$(5.6) \quad \tilde{z}(z, s) = \frac{1}{\delta_T k_T} \left[\alpha_+ (A_1 \exp(\sqrt{sr_+} z) + A_2 \exp(-\sqrt{sr_+} z)) + \right. \\ \left. + \alpha_- (A_3 \exp(\sqrt{sr_-} z) + A_4 \exp(-\sqrt{sr_-} z)) \right] + c^0 s^{-1},$$

$$(5.7) \quad \tilde{\Theta}(z, s) = A_1 \exp(\sqrt{sr_+} z) + A_2 \exp(-\sqrt{sr_+} z) + A_3 \exp(\sqrt{sr_-} z) + \\ + A_4 \exp(-\sqrt{sr_-} z) + \Theta^0 s^{-1},$$

gdzie $\alpha_+ = k_T r_+ - 1$, $\alpha_- = k_T r_- - 1$

Zamiast rozwiązania (5.6) i (5.7) możemy przyjąć całkę ogólną układu (5.1) i (5.2) w postaci

$$(5.8) \quad \tilde{z}(z, s) = \frac{1}{\delta_T k_T} \left[\alpha_+ (B_1 \text{Ch}(\sqrt{sr_+} z) + B_2 \text{Sh}(\sqrt{sr_+} z)) + \alpha_- (B_3 \text{Ch}(\sqrt{sr_-} z) + \right. \\ \left. + B_4 \text{Sh}(\sqrt{sr_-} z)) \right] + c^0 s^{-1},$$

$$(5.9) \quad \tilde{\Theta}(z, s) = B_1 \text{Ch}(\sqrt{sr_+} z) + B_2 \text{Sh}(\sqrt{sr_+} z) + B_3 \text{Ch}(\sqrt{sr_-} z) + B_4 \text{Sh}(\sqrt{sr_-} z) + \Theta^0 s^{-1}.$$

W przypadku półprzestrzeni, wykorzystanie warunków w nieskończoności prowadzi do następujących wartości stałych (dla $z \rightarrow -\infty$)

$$(5.10) \quad A_2^0 = A_4^0 = 0, \quad B_1^0 = B_2^0, \quad B_3^0 = B_4^0$$

6. Zagadnienie termodyfuzji w przypadku styku dwóch półprzestrzeni sprężystych

Rozpatrzmy przypadek szczególny, gdy grubość warstwy sprężystej wzrasta nieograniczenie. Warunki początkowe zachowują postać poprzednią (4.4) i (4.5), podobnie warunki brzegowe (4.9) - (4.12). Z warunków w nieskończoności otrzymujemy obecnie dla $z \rightarrow +\infty$ $\Theta_1 \rightarrow \Theta_1^0$, $c_1 \rightarrow c_1^0$

oraz dla $z \rightarrow -\infty$ $\Theta_2 \rightarrow \Theta_2^0$ $c_2 \rightarrow c_2^0$

Warunki te będą spełnione, gdy we wzorach (5.6) i (5.7) podstawimy

$$(6.1) \quad A_1^1 = A_3^1 = 0, \quad A_2^1 = B_1^1 = -B_2^1, \quad A_4^1 = B_3^1 = -B_4^1$$

$$(6.2) \quad A_2^2 = A_4^2 = 0, \quad A_1^2 = B_1^2 = B_2^2, \quad A_3^2 = B_3^2 = B_4^2$$

Otrzymujemy następujący układ równań algebraicznych, z których wyznaczymy pozostałe parametry transformat:

$$(6.3) \quad B_1^1 D_{q+}^1 + B_3^1 D_{q-}^1 + B_1^2 D_{q+}^2 + B_3^2 D_{q-}^2 = 0, \\ B_1^1 D_{q+}^1 + B_3^1 D_{q-}^1 + B_1^2 D_{q+}^2 + B_3^2 D_{q-}^2 = 0, \\ B_1^1 + B_3^1 - B_1^2 - B_3^2 = \frac{1}{s} [(\Theta_2^0 - \Theta_1^0)]$$

$$B_1^1 a_+^1 + B_3^1 a_-^1 + B_1^2 a_+^2 - B_3^2 a_-^2 = \frac{1}{s} [(\hat{\gamma}_\delta^0 \Theta + \hat{\gamma}_c^0 c_2^0) - (\hat{\gamma}_\delta^1 \Theta_1^0 + \hat{\gamma}_c^1 c_1^0)]$$

gdzie

$$\hat{\gamma}_\Theta^k = -(\gamma_c \gamma_\Theta^{*k} + d^k), \quad \hat{\gamma}_c = -(\gamma_c^k \gamma_\Theta^{*k} + a^k), \quad a_\pm^k = \hat{\gamma}_\Theta^k + \frac{\alpha_\pm^k \hat{\gamma}_c^k}{\delta_T^k K_T^k}$$

$$D_{q^{(n)\pm}}^k = \sqrt{r_\pm^k} \left[(D_{q^{(n)T}^k} + \gamma_\Theta^{*k} + \frac{\alpha_\pm^k (D_{q^{(n)C}^k} + \gamma_c^{*k})}{\delta_T^k K_T^k} \right].$$

Oznaczmy wyznacznik podstawowy układu równań

$$(6.4) \quad \Delta^* = \begin{vmatrix} D_{q^+}^1 & D_{q^-}^1 & D_{q^+}^2 & D_{q^-}^2 \\ D_{\eta^+}^1 & D_{\eta^-}^1 & D_{\eta^+}^2 & D_{\eta^-}^2 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ a_+^1 & a_-^1 & a_+^2 & a_-^2 \end{vmatrix}$$

Wtedy rozwiązanie układu równań (6.3) możemy zapisać następująco

$$(6.5) \quad B_i^k = \frac{1}{s \Delta^*} [(\Theta_2^0 - \Theta_1^0) A_{ik} + \{(\hat{\gamma}_\Theta^2 \Theta_2^0 + \hat{\gamma}_c^2 C_2^0) - (\hat{\gamma}_\Theta^1 \Theta_1^0 + \hat{\gamma}_c^1 C_1^0)\} C_{ik}.$$

Współczynniki A_{ik} oraz C_{ik} zależą wyłącznie od charakterystyk materiałowych i wyznacza się je z rozwiązania układu równań (6.3). Odpowiednie wyznaczniki oznaczmy następująco

$$(6.6) \quad B_i^k = \frac{P_{ik}}{\Delta^* s}, \quad k = 1, 2, \quad i = 1, 3.$$

Wtedy całka ogólna układu równań (5.6), (5.7) przyjmie postać

$$(6.7) \quad \begin{aligned} \tilde{c}_1(z, s) &= \frac{1}{\delta_T K_T} [\alpha_+^1 A_2^1 \exp(-\sqrt{sr_+z}) + \alpha_-^1 A_4^1 \exp(-\sqrt{sr_-z})] + \frac{C_1^0}{s}, \\ \tilde{\Theta}_1(z, s) &= A_2^1 \exp(-\sqrt{sr_+z}) + A_4^1 \exp(-\sqrt{sr_-z}) + \frac{\Theta_1^0}{s}, \\ \tilde{c}_2(z, s) &= \frac{1}{\delta_T K_T} [\alpha_+^2 A_1^2 \exp(\sqrt{sr_+z}) + \alpha_-^2 A_3^2 \exp(\sqrt{sr_-z})] + \frac{C_2^0}{s}, \\ \tilde{\Theta}_2(z, s) &= A_1^2 \exp(\sqrt{sr_+z}) + A_3^2 \exp(\sqrt{sr_-z}) + \frac{\Theta_2^0}{s}, \end{aligned}$$

gdzie

$$A_i^1 = -\frac{P_{i1}}{s \Delta^*}, \quad i = 2, 4; \quad A_i^2 = \frac{P_{i2}}{s \Delta^*}, \quad i = 1, 3.$$

Po odwróceniu transformat Laplace'a okazuje się, że rozwiązanie da się wyrazić przez kombinacje współczynników i funkcji błędu:

$$(6.8) \quad C_1(z, t) = C_1^0 - \frac{1}{\delta_T^2 K_T^2 \Delta^*} \left[\alpha_+^1 P_{11} \operatorname{Erf} \left(\frac{z \sqrt{r_+^1}}{2 \sqrt{t}} \right) + \alpha_-^1 P_{31} \operatorname{Erf} \left(\frac{z \sqrt{r_-^1}}{2 \sqrt{t}} \right) \right], \quad z > 0$$

$$(6.9) \quad \Theta_1(z, t) = \Theta_1^0 - \frac{1}{\Delta^*} \left[P_{11} \operatorname{Erf} \left(\frac{z \sqrt{r_+^1}}{2 \sqrt{t}} \right) + P_{31} \operatorname{Erf} \left(\frac{z \sqrt{r_-^1}}{2 \sqrt{t}} \right) \right],$$

$$(6.10) \quad C_2(z, t) = C_2^0 + \frac{1}{\delta_T^2 K_T^2} \left[\alpha_+^2 P_{12} \operatorname{Erf} \left(-\frac{z \sqrt{r_+^2}}{2 \sqrt{t}} \right) + \alpha_-^2 P_{32} \operatorname{Erf} \left(-\frac{z \sqrt{r_-^2}}{2 \sqrt{t}} \right) \right], \quad z < 0$$

$$(6.11) \quad \Theta_2(z, t) = \Theta_2^0 + \frac{1}{\Delta^*} \left[P_{12} \operatorname{Erf} \left(-\frac{z \sqrt{r_+^2}}{2 \sqrt{t}} \right) + P_{32} \operatorname{Erf} \left(-\frac{z \sqrt{r_-^2}}{2 \sqrt{t}} \right) \right],$$

gdzie:

$$\begin{aligned}
 P_{ik} &= (\Theta_2^0 - \Theta_1^0) A_{ik} + [(\hat{\gamma}_\Theta^2 \Theta_2^0 + \hat{\gamma}_c^2 C_2^0) - (\hat{\gamma}_\Theta^1 \Theta_1^0 + \hat{\gamma}_c^1 C_1^0)] C_{ik}, \\
 A_{11} &= a_-^1 (D_{q+}^2 D_{\eta-}^2 - D_{q-}^2 D_{\eta+}^2) + a_+^2 (D_{q-}^1 D_{\eta-}^2 - D_{q-}^2 D_{\eta-}^1) + a_-^2 (D_{\eta-}^1 D_{q+}^2 - D_{q-}^1 D_{\eta+}^2), \\
 A_{31} &= a_+^1 (D_{q-}^2 D_{\eta+}^2 - D_{q+}^2 D_{\eta-}^2) + a_+^2 (D_{q-}^1 D_{\eta+}^1 - D_{q+}^1 D_{\eta-}^2) + a_-^2 (D_{q+}^1 D_{\eta+}^2 - D_{\eta+}^1 D_{q+}^2), \\
 A_{12} &= a_+^1 (D_{q-}^1 D_{\eta-}^2 - D_{\eta-}^1 D_{q-}^2) - a_-^1 (D_{q+}^1 D_{\eta-}^2 - D_{\eta+}^1 D_{q-}^2) - a_-^2 (D_{q+}^1 D_{\eta-}^1 - D_{\eta+}^1 D_{q-}^1), \\
 A_{32} &= a_+^1 (D_{q+}^2 D_{\eta-}^1 - D_{q-}^1 D_{\eta+}^2) + a_+^1 (D_{q+}^1 D_{\eta+}^2 - D_{\eta+}^1 D_{q+}^2) + a_+^2 (D_{q+}^1 D_{\eta-}^1 - D_{q-}^1 D_{\eta+}^1), \\
 C_{11} &= D_{q-}^1 (D_{\eta+}^2 - D_{\eta-}^2) - D_{q+}^2 (D_{\eta-}^2 + D_{\eta-}^1) + D_{q-}^2 (D_{\eta+}^2 + D_{\eta+}^1), \\
 C_{31} &= D_{q+}^1 (D_{\eta-}^2 - D_{\eta+}^2) + D_{q+}^2 (D_{\eta-}^2 + D_{\eta+}^1) - D_{q-}^2 (D_{\eta+}^2 + D_{\eta+}^1), \\
 C_{12} &= D_{q+}^1 (D_{\eta-}^2 + D_{\eta-}^1) + D_{q-}^1 (D_{\eta-}^2 + D_{\eta+}^1) - D_{q-}^2 (D_{\eta-}^1 + D_{\eta+}^1), \\
 C_{32} &= D_{q+}^1 (D_{\eta+}^2 + D_{\eta-}^1) - D_{q-}^1 (D_{\eta+}^2 + D_{\eta+}^1) + D_{q+}^2 (D_{\eta-}^1 + D_{\eta+}^1).
 \end{aligned}$$

7. Rozwiązanie w przypadku styku warstwy z półprzestrzenią

Rozpatrzmy termodyfuzję poprzez płaszczyznę kontaktu warstwy sprężystej z półprzestrzenią sprężystą z warunkami początkowymi (4.4) - (4.7), warunkami brzegowymi na swobodnej powierzchni warstwy (4.6) i (4.7). Ponadto spełnione są warunki ciągłości odpowiednich strumieni (4.9) - (4.12). Wtedy układ równań algebraicznych, z którego wyznaczamy parametry B_k^i przyjmuje postać następującą

$$\begin{aligned}
 B_1^1 \text{Ch}(\sqrt{sr_+^1} h) + B_2^1 \text{Sh}(\sqrt{sr_+^1} h) + B_3^1 \text{Ch}(\sqrt{sr_-^1} h) + B_4^1 \text{Sh}(\sqrt{sr_-^1} h) &= -\Theta_1^0 s^{-1} + \check{q}(s), \\
 a_+^1 B_1^1 \text{Ch}(\sqrt{sr_+^1} h) + a_+^1 B_2^1 \text{Sh}(\sqrt{sr_+^1} h) + a_-^1 B_3^1 \text{Ch}(\sqrt{sr_-^1} h) + \\
 &+ a_+^1 B_4^1 \text{Sh}(\sqrt{sr_-^1} h) = M^*(s) - \frac{1}{s} (\hat{\gamma}_\Theta^1 \Theta_1^0 + \hat{\gamma}_c^1 c_1^0), \\
 B_2^1 D_{q+}^1 + B_4^1 D_{q-}^1 - B_1^2 D_{q+}^2 - B_3^2 D_{q-}^2 &= 0, \\
 B_2^1 D_{\eta+}^1 + B_4^1 D_{\eta-}^1 - B_1^2 D_{\eta+}^2 - B_3^2 D_{\eta-}^2 &= 0, \\
 (7.1) \quad B_1^1 + B_3^1 - B_1^2 - B_3^2 &= \frac{1}{s} (\Theta_2^0 - \Theta_1^0), \\
 B_1^1 a_+^1 + B_3^1 a_-^1 - B_1^2 a_+^2 - B_3^2 a_-^2 &= \frac{1}{s} [\hat{\gamma}_\Theta^2 \Theta_2^0 + \hat{\gamma}_c^2 C_2^0] - (\hat{\gamma}_\Theta^1 \Theta_1^0 + \hat{\gamma}_c^1 C_1^0) + (\gamma_\sigma^2 - \gamma_\sigma^1) \check{\sigma}(s),
 \end{aligned}$$

gdzie wprowadziliśmy oznaczenia

$$M^*(s) = \tilde{M}^1(s) - \gamma_\sigma^1 \check{\sigma}(s), \quad \gamma_\sigma^K = -\frac{(\gamma_c^K)^2}{\lambda^K + 2\mu^K}$$

Podstawowy wyznacznik układu (7.1) ma następującą strukturę

$$\begin{aligned}
 (7.2) \quad \Delta(s) &= (a_+^1 - a_-^1) [\Delta_1 \text{Ch}(\sqrt{sr_+^1} h) \text{Ch}(\sqrt{sr_-^1} h) + \Delta_2 \text{Ch}(\sqrt{sr_+^1} h) \text{Sh}(\sqrt{sr_-^1} h) + \\
 &+ \Delta_3 \text{Sh}(\sqrt{sr_+^1} h) \text{Ch}(\sqrt{sr_-^1} h) + \Delta_4 \text{Sh}(\sqrt{sr_+^1} h) \text{Sh}(\sqrt{sr_-^1} h) + \Delta_5 \text{Ch}(\sqrt{sr_-^1} h) \text{Sh}(\sqrt{sr_+^1} h)],
 \end{aligned}$$

gdzie

$$\begin{aligned}
 \Delta_1 &= a_+^2 (D_{q+}^1 D_{\eta-}^1 - D_{\eta+}^1 D_{q-}^1), \\
 \Delta_2 &= (a_-^2 - a_+^2) (D_{\eta+}^1 D_{q+}^2 + D_{\eta+}^2 D_{q+}^1) - (2a_+^1 + a_+^2 - a_-^1) [D_{q+}^1 + (D_{\eta-}^2 - D_{\eta+}^2) - D_{\eta+}^1 (D_{q-}^2 - D_{q+}^2)], \\
 \Delta_3 &= a_+^2 (D_{\eta+}^2 D_{q-}^2 - D_{q+}^2 D_{\eta-}^2) - (a_+^1 + a_+^2) [D_{q-}^1 (D_{\eta-}^2 - D_{\eta+}^2) - D_{\eta-}^1 (D_{q-}^2 - D_{q+}^2)],
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta_4 &= (a_+^1 - a_-^1)[D_{\eta_+}^2(D_{q_-}^2 - D_{q_+}^2) - D_{q_+}^2(D_{\eta_-}^2 - D_{\eta_+}^2)], \\ \Delta_5 &= a_+^2(D_{\eta_+}^2 D_{q_+}^1 - D_{q_+}^2 D_{\eta_+}^1) + (a_-^2 - a_+^2)(D_{\eta_+}^1 D_{q_+}^2 + D_{\eta_+}^2 D_{q_+}^1). \end{aligned}$$

Rozwiązanie układu (7.1) przyjmuje postać

$$(7.3) \quad B_i^k = \frac{\Delta_i^k}{\Delta(s)} \quad \begin{array}{ll} \text{dla } k = 1, & i = 1, 2, 3, 4, \\ \text{dla } k = 2, & i = 1, 3, \end{array}$$

gdzie przyjęliśmy oznaczenia

$$(7.4) \quad \Delta_i^k = \sum_{m=1}^4 \varphi_{im}^k P_m,$$

oraz

$$(7.5) \quad \begin{aligned} P_1 &= -\frac{1}{s} \Theta_1^0 + \tilde{q}(s), \\ P_2 &= M^*(s) - \frac{1}{s} (\hat{\gamma}_\Theta \Theta_1^0 + \hat{x}_c C_1^0), \\ P_3 &= \frac{1}{s} (\Theta_2^0 - \Theta_1^0), \\ P_4 &= \frac{1}{s} [(\hat{\gamma}_\Theta^2 \Theta_2^0 + \hat{\gamma}_c^2 C_2^0) - (\hat{\gamma}_\Theta^1 + \hat{\gamma}_c^1 C_1^0)] + (\gamma_\sigma^2 - \gamma_\sigma^1) \tilde{\sigma}(s). \end{aligned}$$

$$(7.6) \quad \begin{aligned} \varphi_{11}^1 &= [\Delta_{11} a_-^1 + \Delta_{14} (a_+^1 - a_-^1)] \text{sh}_+ + a_-^1 \Delta_{12} \text{ch}_- + a_-^1 \Delta_{13} \text{sh}_-, \\ \varphi_{12}^1 &= -[\Delta_{11} \text{sh}_+ + \Delta_{12} \text{ch}_- + \Delta_{13} \text{sh}_-], \\ \varphi_{13}^1 &= (a_+^1 - a_-^1) (\Delta_{15} \text{ch}_- + \Delta_{16} \text{sh}_-) \text{sh}_+, \\ \varphi_{14}^1 &= (a_+^1 - a_-^1) (\Delta_{17} \text{ch}_- + \Delta_{18} \text{sh}_-) \text{sh}_+, \\ \varphi_{21}^1 &= -[\Delta_{21} a_-^1 + \Delta_{24} (a_+^1 - a_-^1)] \text{ch}_+ + a_-^1 (\Delta_{22} \text{ch}_- - \Delta_{23} \text{sh}_-), \\ \varphi_{22}^2 &= \Delta_{21} \text{ch}_+ - \Delta_{22} \text{ch}_- + \Delta_{23} \text{sh}_-, \\ \varphi_{23}^1 &= (a_+^1 - a_-^1) \text{ch}_+ (\Delta_{25} \text{ch}_- - \Delta_{26} \text{sh}_-), \\ \varphi_{24}^1 &= (a_-^1 - a_+^1) \text{ch}_+ (\Delta_{27} \text{ch}_- - \Delta_{18} \text{sh}_-), \\ \varphi_{31}^1 &= [\Delta_{34} (a_-^1 - a_+^1) + a_+^1 \Delta_{33}] \text{sh}_- + a_+^1 (\Delta_{31} \text{ch}_+ - \Delta_{22} \text{sh}_+), \\ \varphi_{32}^1 &= -[\Delta_{31} \text{ch}_+ - \Delta_{32} \text{sh}_+ + \Delta_{33} \text{sh}_-], \\ \varphi_{33}^1 &= (a_+^1 - a_-^1) (\Delta_{35} \text{ch}_+ - \Delta_{36} \text{sh}_+) \text{sh}_-, \\ \varphi_{34}^1 &= (a_-^1 - a_+^1) (\Delta_{37} \text{ch}_+ - \Delta_{38} \text{sh}_+) \text{sh}_-, \\ \varphi_{41}^1 &= -[a_+^1 \Delta_{41} + \Delta_{44} (a_-^1 - a_+^1)] \text{ch}_+ + a_+^1 (\Delta_{42} \text{sh}_+ - \Delta_{43} \text{ch}_-), \\ \varphi_{42}^1 &= \Delta_{41} \text{ch}_+ - \Delta_{42} \text{sh}_+ + \Delta_{43} \text{ch}_-, \\ \varphi_{43}^1 &= (a_-^1 - a_+^1) \text{ch}_+ (\Delta_{45} \text{ch}_+ - \Delta_{46} \text{sh}_+), \\ \varphi_{44}^1 &= (a_-^1 - a_+^1) \text{ch}_+ (\Delta_{47} \text{ch}_+ - \Delta_{48} \text{sh}_+), \\ \varphi_{11}^2 &= a_+^1 (\Delta_{51} \text{ch}_+ - \Delta_{52} \text{sh}_+ + \Delta_{53} \text{ch}_- - \Delta_{54} \text{sh}_-), \\ \varphi_{12}^1 &= -\Delta_{51} \text{ch}_+ + \Delta_{52} \text{sh}_+ - \Delta_{53} \text{ch}_- + \Delta_{54} \text{sh}_-, \\ \varphi_{13}^2 &= (a_-^1 - a_+^1) [(-\Delta_{55} \text{ch}_+ + \Delta_{57} \text{sh}_+) \text{ch}_- + (\Delta_{59} \text{ch}_+ - \Delta_{5,11} \text{sh}_+) \text{sh}_-], \\ \varphi_{14}^2 &= (a_-^2 - a_+^1) [(\Delta_{56} \text{ch}_+ - \Delta_{58} \text{sh}_+) \text{ch}_- - (-\Delta_{5,10} \text{ch}_+ + \Delta_{5,12} \text{sh}_+) \text{sh}_-], \\ \varphi_{31}^2 &= -a_+^1 (\Delta_{61} \text{ch}_+ - \Delta_{62} \text{sh}_+) + a_-^1 (\Delta_{63} \text{ch}_- - \Delta_{64} \text{sh}_-), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi_{32}^2 &= \Delta_{61} \text{ch}_+ - \Delta_{62} \text{sh}_+ + \Delta_{63} \text{ch}_- - \Delta_{64} \text{sh}_-, \\ \varphi_{33}^2 &= (a_+^1 - a_-^1) [(\Delta_{65} \text{ch}_+ - \Delta_{66} \text{sh}_+ + \Delta_{67} \text{sh}_-) \text{ch}_- - \\ &\quad - (\Delta_{68} \text{ch}_+ - \Delta_{69} \text{sh}_+ + \Delta_{6,10} \text{ch}_-) \text{sh}_-, \\ \varphi_{34} &= (a_-^1 - a_+^1) [(\Delta_{75} \text{ch}_+ - \Delta_{76} \text{sh}_+ + \Delta_{77} \text{sh}_-) \text{ch}_- - \\ &\quad - (\Delta_{78} \text{ch}_+ - \Delta_{79} \text{sh}_+ + \Delta_{7,10} \text{ch}_-) \text{sh}_-], \end{aligned}$$

Przyjeliśmy tu oznaczenia

$$\text{ch}_\pm \equiv \text{Ch}(\sqrt{sr_\pm^2} h) \quad \text{sh}_\pm \equiv \text{Sh}(\sqrt{sr_\pm^2} h)$$

Wielkości Δ_{ki} zależą jedynie od stałych materiałowych warstwy i półprzestrzeni, można je względnie łatwo wyznaczyć z rozwiązania układu równań (7.1) zgodnie ze wzorem (7.4). Z powodu złożoności i dużej liczby wzorów o podobnym charakterze, z braku miejsca nie cytujemy ich. Podstawienie wyznaczonych współczynników B_i^k danych wzorami (7.3) do (5.9) i (5.10) z uwzględnieniem (7.2), (7.4) i (7.5) umożliwia nam napisanie transformat Laplace'a koncentracji masy i temperatury zarówno dla warstwy jak i półprzestrzeni. Wykonanie odwrotnych transformat w przypadku ogólnym, dla dowolnych czasów jest możliwe tylko w sposób przybliżony. Ponieważ w praktycznych przypadkach interesuje nas dyfuzja dla dużych czasów t , wykorzystamy rozwinięcia asymptotyczne. Jako przykład weźmiemy następujące warunki brzegowe

$$(7.7) \quad \sigma(t) = \sigma^* H(t), \quad q(t) = \Theta^* H(t)$$

Przy tych założeniach otrzymujemy dla dużych czasów t następujące wzory na koncentrację masy i temperaturę w półprzestrzeni $z \leq 0$

$$(7.8) \quad C_2(z, t) = C_2^0 + \frac{1}{(r_2 - r_1) \delta_7^2 k_7^2} \left\{ \alpha_+^2 \left[\omega_{11}^2 \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) E^+ + \left(-\frac{\omega_{11}^2}{r_1} + \omega_{12} - r_1 \omega_{13} \right) \psi_1^+ + \left(\frac{\omega_{11}^2}{r_2} - \omega_{12} + r_2 \omega_{13}^2 \right) \psi_2^+ \right] + \alpha_-^2 \left[\omega_{21}^2 \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) E^- + \left(-\frac{\omega_{21}^2}{r_1} + \omega_{22} - r_1 \omega_{23}^2 \right) \psi_1^- + \left(\frac{\omega_{21}^2}{r_2} - \omega_{22} + r_2 \omega_{23}^2 \right) \psi_2^- \right] \right\},$$

$$(7.9) \quad T_2(z, t) = T_2^0 + \omega_{11}^2 \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) E^+ + \left(-\frac{\omega_{11}^2}{r_1} + \omega_{12} - r_1 \omega_{13}^2 \right) \psi_1^+ + \left(\frac{\omega_{11}^2}{r_2} - \omega_{12} + r_2 \omega_{13}^2 \right) \psi_2^+ + \omega_{21}^2 \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) E^- + \left(-\frac{\omega_{21}^2}{r_1} + \omega_{22} - r_1 \omega_{23}^2 \right) \psi_1^- + \left(\frac{\omega_{21}^2}{r_2} - \omega_{22} + r_2 \omega_{23}^2 \right) \psi_2^-,$$

gdzie

$$E^\pm = \text{Erfc} \left(-\frac{z \sqrt{r_\pm^2}}{2\sqrt{t}} \right); \quad \psi_k^\pm = \exp[r_k \sqrt{r_\pm^2} z + (r_k)^2 t] \text{Erfc} \left(-\frac{z \sqrt{r_\pm^2}}{2\sqrt{t}} + r_k \sqrt{t} \right).$$

Wzory opisujące pole temperatury i pole koncentracji dyfundującego składnika w warstwie $0 \leq z \leq h$ można przedstawić w przybliżeniu w następującej postaci

$$(7.10) \quad c_1(z, t) = C_1^0 + \frac{1}{\delta_T^1 k_T^1} \frac{1}{r_2 - r_1} \left[R_{0c} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) - R_{0c} \left(\frac{E_1}{r_1} - \frac{E_2}{r_2} \right) + \right. \\ \left. + R_{1c}(z)(E_1 - E_2) - R_{2c}(z)(r_1 E_1 - r_2 E_2) \right],$$

$$(7.11) \quad T_1(z, t) = T_1^0 + \frac{1}{r_2 - r_1} \left[R'_{0T} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) - R'_{0T} \left(\frac{E_1}{r_1} - \frac{E_2}{r_2} \right) + \right. \\ \left. + R_{1T}(z)(E_1 - E_2) - R_{2T}(z)(r_1 E_1 - r_2 E_2) \right],$$

gdzie

$$R_{0c} = \alpha_+^1 \omega_{11}^1 + \alpha_-^1 \omega_{31}^1, \quad R_{1c} = \alpha_+^1 (\omega_{12}^1 + \omega_{21}^1 \sqrt{r_+^1} z) + \alpha_-^1 (\omega_{32}^1 + \omega_{41}^1 \sqrt{r_-^1} z),$$

$$R_{2c} = \alpha_+^1 (\omega_{13}^1 + \omega_{22}^1 \sqrt{r_+^1} z + \omega_{11}^1 r_+^1 z^2) + \alpha_-^1 (\omega_{33}^1 + \omega_{43}^1 \sqrt{r_-^1} z + \omega_{31}^1 r_-^1 z^2),$$

$$R'_{0T} = \omega_{11}^1 + \omega_{31}^1, \quad R_{1T} = (\omega_{12}^1 + \omega_{21}^1 \sqrt{r_+^1} z) + (\omega_{32}^1 + \omega_{41}^1 \sqrt{r_-^1} z),$$

$$R_{2T} = \omega_{13}^1 + \omega_{33}^1 + (\omega_{22}^1 \sqrt{r_+^1} + \omega_{42}^1 \sqrt{r_-^1}) z + (\omega_{11}^1 r_+^1 + \omega_{31}^1 r_-^1) z^2,$$

$$E_k = \exp[(r_k)^2 t] \operatorname{Erfc}(r_k \sqrt{t}), \quad k = 1, 2$$

$$r_{1,2} = \frac{[(\Delta_2 + \Delta_5) \sqrt{r_-^1} + \Delta_3 \sqrt{r_+^1}] \pm \sqrt{[(\Delta_2 + \Delta_5) \sqrt{r_-^1} + \Delta_3 \sqrt{r_+^1}]^2 - 4\Delta_1 [\Delta_1 (r_+^1 + r_-^1) + \Delta_4 r_+^1 r_-^1]}}{2[\Delta_1 (r_+^1 + r_-^1) + \Delta_4 r_+^1 r_-^1]},$$

wzory na ω_{ij}^k obliczamy z wyrażeń:

$$(7.12) \quad \sum_{j=1}^4 P_j^k \varphi_{ij}^k = \sum_{l=1}^3 \omega_{il}^k (\bar{s})^{l-1}, \quad \text{gdzie } k = 1, 2; \quad i = 1, 2, 3, 4,$$

$$P_1 = \Theta^* - \Theta^0, \quad P_2 = M_1^* - (\hat{\gamma}_1^1 \Theta_1^0 + \hat{\gamma}_c^1 C_1^0) - \hat{\gamma}_\sigma \sigma^*,$$

$$P_3 = \Theta_2^0 - \Theta_1^0,$$

$$P_4 = (\hat{\gamma}_\theta^2 \Theta_2^0 + \hat{\gamma}_c^2 C_2^0) - (\hat{\gamma}_\theta^1 \Theta_1^0 + \hat{\gamma}_c^1 C_1^0) + (\gamma_\sigma^2 - \gamma_\sigma^1) \sigma^*.$$

8. Wnioski

1. Wzory (6.8) i (6.10) przedstawiają zależność zmiany koncentracji dyfundującego składnika. Ze wzorów tych wynika, że wykładniki funkcji błędu są wprost proporcjonalne do głębokości rozpatrywanego punktu i odwrotnie proporcjonalne do pierwiastka kwadratowego czasu, ponadto zależą od stałych materiałowych. Wykładniki funkcji błędu nie zależą od warunków początkowych. Wielkości P_{ik} zależą nie tylko od stałych materiałowych ale również liniowo od początkowych temperatur i początkowych koncentracji.

2. Istotna różnica w porównaniu z dotychczasowymi rozwiązaniami zagadnień termodyfuzji dla ciał stałych polega na uwzględnieniu pola odkształceń i jego wpływu na proces dyfuzji.

3. Otrzymanie wyników liczbowych uzależnione jest od znajomości stałych materiałowych, które określić można tylko na drodze doświadczalnej. Wykonanie obliczeń ma

sens dla konkretnych materiałów i przypadków, na które istnieje zapotrzebowanie usprawiedliwiające poniesienie kosztów obliczeń.

4. W przypadku kontaktu warstwy z półprzestrzenią wykonanie odwrotnych transformacji jest możliwe tylko w sposób przybliżony. Wzory (7.8) - (7.11) dotyczą dużych czasów.

Literatura cytowana w tekście

1. M. A. BIOT, *Thermoelasticity and Irreversible Thermodynamics*, J. Appl. Phys., 27, 1956.
2. JA. S. PIDSTRIGACZ, *Differencjalni riwnnannja zadaczi termodyfuziji w twerdomu izotropnomu tili*, DAN Ukr. RSR, nr. 2, 1961, (w j. ukraińskim).
3. JA. S. PODSTRIGACZ, W. S. PAWLINA, *Diffuzionnyje processy w nierawnomierno nagretom deformirujemom sloje*, Woprosy miechaniki realnego twerdogo tiela, 1, Kijów 1962, (w j. rosyjskim).
4. JA. S. PODSTRIGACZ, W. S. PAWLINA, *Diffuzionnyje processy w nagrewajemom deformirujemom szarie*, 2, Kijów 1964, (po rosyjsku).
5. W. NOWACKI, *Dynamic problems of thermodiffusion in elastic solids*, Proc. Vibr. Problems, 2, 15, 1974
6. W. NOWACKI, *Termodyfuzja w cieple stalym*, Mechanika Teoret. i Stos., t. 13, z. 2, 1975.
7. K. GRYSA, R. SZCZEPAŃSKI, *O płaskim quasi-stacycznym zagadnieniu termodyfuzji dla sprężystego walca kołowego*, Mech. Teoret. i Stos., t. 17, z. 2, 1979.
8. M. J. BUDA, *Zagadnienie termodyfuzji w ciałach stalych*, Biul. WAT, 6, 26, 1977.
9. M. J. BUDA, G. F. PIELAK, *Badania porównawcze efektów dyfuzji i termodyfuzji*, Biul. WAT, 1, 28, 1979.
10. H. S. CARSLAW, J. C. JAEGER, *Conduction of heat in solids*, Oxford 1959, również wyd. rosyjskie Nauka 1964.
11. A. ERDELYI i inni, *Tables of integral transforms*, tom 1 McGraw-Hill, 1954.
12. J. JANKOWSKI, *Wpływ drgań na dyfuzję i termodyfuzję w cieple stalym*, dysertacja doktorska, Politechnika Poznańska 1980.
13. J. STEFANIAK, J. JANKOWSKI, *Płaskie fale harmoniczne i dyfuzja w cieple stalym*, Mech. Teoret. i Stos., t. 18, z. 3, 1980.

Резюме

ТЕРМОДИФФУЗИЯ ПРИ КОНТАКТЕ УПРУГОГО СЛОЯ С ПОЛУПРОСТРАНСТВОМ

Рассматривается процесс термодиффузии при контакте двух упругих полупространств, а также в системе состоящим из слоя и полупространства в случае, когда свободная плоскость слоя нагружена некоторым распределением сил и тепла. Для квази-стационарной задачи контакта двух упругих полупространств получено решение в замкнутом виде, а в случае контакта слоя и полупространства приближенное решение для больших значений времени.

Summary

THERMODIFFUSION IN A CONTACT OF AN ELASTIC LAYER WITH A SEMISPAC

A process of thermodiffusion is considered in contact of two elastic semispace and in a system consisting of a layer and a semispace when the free bounding plane of the layer is loaded by a distribution of forces and heat. For quasi-static case the exact solution has been obtained for the contact of two elastic semispace, and an approximate solution for large values of time for the contact of the layer and the semispace.