

O PROPAGACJI FAL NAPRĘŻENIA W SPREŻYSTO-PLASTYCZNYM PRZEWODNIKU PODDANYM DZIAŁANIU RUCHOMEJ SIŁY MASOWEJ W OBECNOŚCI POLA MAGNETYCZNEGO

KRZYSZTOF PODOLAK

IPPT PAN

1. Wstęp

Rozwój technik wytwarzania silnych pól magnetycznych [1] spowodował znaczny wzrost zainteresowania badaniami na temat wzajemnego oddziaływania pól natury elektromagnetycznej z polami odkształceń mechanicznych w ciałach stałych. Przyjmuje się, że rozważania nad tematyką określaną jako elektro- i magnetosprężystość zapoczątkowała praca [2]. Od czasu jej ukazania się opublikowano znaczną liczbę prac w tej dziedzinie. W liczbie tej znajdują się również opracowania monograficzne, jak na przykład [3, 4, 9].

Wyniki badań o charakterze poznawczym oraz stosowane procesy technologiczne [1, 5] świadczą o tym, że oddziaływanie pól elektromagnetycznych i mechanicznych w ośrodku może prowadzić do pojawienia się w nim odkształceń trwałych. W badaniach tego rodzaju procesów niezbędne jest korzystanie z teorii plastyczności, stąd też dziedzinę obejmującą te badania nazywa się elektro- i magnetoplastycznością [6]. Dziedzina ta w porównaniu z elektro- i magnetosprężystością charakteryzuje się znacznie mniejszą liczbą publikacji i zupełnym brakiem opracowań monograficznych.

Zależnie od celu, do jakiego służy wytworzone pole elektromagnetyczne, towarzyszące mu odkształcenia plastyczne ośrodka mogą być traktowane jako niepożądany bądź jako zamierzony efekt. Przykładem pierwszego typu działania pola jest wywołane przez nie płynięcie materiału uzwojenia cewek w elektromagnesach służących do wytwarzania pól magnetycznych o dużych natężeniach [1]. Drugi typ działania dotyczy przede wszystkim technologicznych procesów formowania plastycznego [5, 7].

W ostatnim przypadku pole elektromagnetyczne ma dwojakie zastosowanie. W pierwszym zastosowaniu spełnia jedynie rolę pomocniczą, której celem jest uzyskanie pożądanego rozkładu naprężeń w obrabianym plastycznie elemencie. Podstawowym źródłem sił czynnych może być tutaj materiał wybuchowy. W drugim zastosowaniu pola stanowi jedyne źródło sił, za pomocą których realizowany jest proces obróbki plastycznej.

Pole elektromagnetyczne stosowane w procesach obróbki plastycznej ma zwykle charakter impulsowy [5, 7]. Wytworzone przez odpowiednio skonstruowaną cewkę pole wnika do wnętrza obrabianego przedmiotu (będącego przewodnikiem) wzbudzając w nim prądy wirowe. Wzajemne oddziaływanie pola i prądów przejawia się pod postacią sił działających na ten przedmiot.

W przedstawionych niżej rozważaniach zbadano niestacjonarne działanie pola magnetycznego wnikaącego do wnętrza obrabianego elementu przewodzącego, w procesie plastycznego formowania. Działanie pola zmodelowano za pomocą poruszającego się obciążenia masowego o zmiennej intensywności. Uproszczenie to pozwala uniknąć badania złożonego (por. [5] i cytowana tam literatura), nieliniowego zagadnienia dyfuzji pola magnetycznego i jego oddziaływania ze wzbudzonymi prądami oraz polem odkształceń w ośrodku przewodzącym. Z uwagi na to, że w odniesieniu do wymiarów powierzchni obrabianych elementów, głębokości na jakie wnika pole są zwykle małe (por. [5]), można rozpatrywany tu proces traktować jako rozprzestrzenianie się płaskich fal naprężenia w półprzestrzeni przewodzącej, umieszczonej w pierwotnym polu magnetycznym.

Przedstawiony wyżej model oddziaływań, uzupełniony dalszymi założeniami upraszczającymi służy do pełnego sformułowania zagadnienia, które podano w § 2. Paragraf 3 przedstawia rozwiązanie tego zagadnienia w przypadku, w którym występują tylko odkształcenia sprężyste. Rozwiązania te oraz odpowiednie zależności obowiązujące w obszarach odkształceń plastycznych i odciążenia wykorzystano w § 4 do określenia granic obszaru odkształceń plastycznych. Rozważania zawarte w wymienionych dotychczas paragrafach ilustruje przykład liczbowy, który zamieszczono w § 5. Końcowy § 6 poświęcony jest omówieniu wniosków wynikających z przeprowadzonych rozważań.

2. Analityczny opis zagadnienia

2.1. Zbadamy rozprzestrzenianie się fal naprężenia w sprężysto-plastycznym ośrodku przewodzącym, umieszczonym w stałym, pierwotnym polu magnetycznym. Założymy, że badany ośrodek ma postać półprzestrzeni oraz, że pozostałą część przestrzeni stanowi próżnia. Ruch ośrodka spowodowany jest przez przemieszczające się obciążenie masowe, rozłożone wewnątrz warstwy ograniczonej dwoma płaszczyznami odległymi od siebie o odcinek długości \bar{L} i równoległymi do granicy półprzestrzeni.

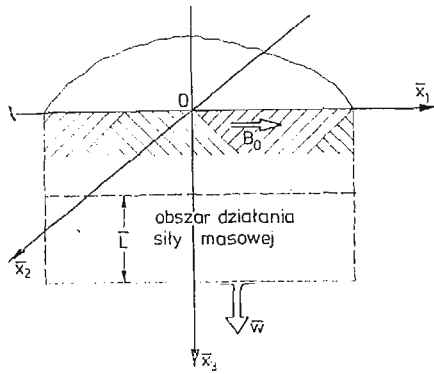
Przebieg powstałego w tych warunkach procesu falowego rozważany jest w ramach teorii małych odkształceń sprężysto-plastycznych. W opisie sprężystego zachowania się ośrodka korzystamy z liniowej teorii sprężystości. Opis ruchu ośrodka w zakresie odkształceń plastycznych oparto na deformacyjnej teorii plastyczności z uwzględnieniem liniowego wzmocnienia. O powstaniu odkształceń plastycznych w ośrodku decyduje spełnienie warunku Hubera-Misesa.

Wprowadzimy układ współrzędnych prostokątnych $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3$, którego dwie osie \bar{x}_1, \bar{x}_2 leżą na powierzchni granicznej półprzestrzeni, natomiast oś \bar{x}_3 skierowana jest w głąb ośrodka (patrz rys. 1). Przyjmijmy ponadto, że oś \bar{x}_1 ma kierunek zgodny z wektorem pierwotnego pola indukcji magnetycznej \bar{B}_0 .

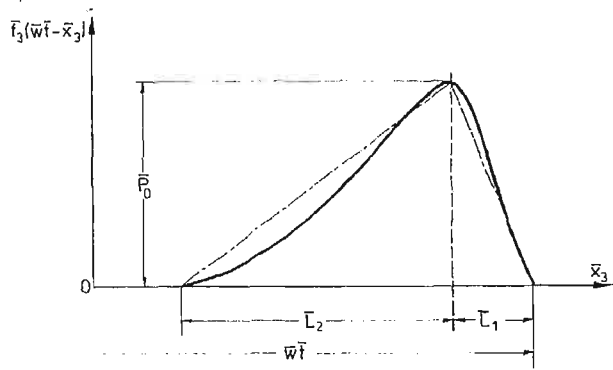
Odnosnie do obciążenia przyjmijmy, że w chwili $\bar{t} = 0$ zaczyna ono wnikać do wnętrza ośrodka a następnie porusza się w dodatnim kierunku \bar{x}_3 ze stałą prędkością \bar{w} . Intensywność $\bar{f}_3(\bar{w}\bar{t} - \bar{x}_3)$ siły wymuszającej zmienia się wzdłuż grubości warstwy (patrz rys. 2), nie zależy natomiast od zmiennych \bar{x}_1, \bar{x}_2 . Zmienność ta charakteryzuje się występowaniem jednego maksimum w odległości \bar{L}_1 od czoła obciążenia. W utworzonych w ten sposób dwóch przedziałach intensywność zmienia się monotonicznie, jak pokazano na rys. 2.

Przyjmujemy, że w opisywanych warunkach wytworzy się jednoosiowy stan odkształcenia, analogiczny do rozpatrywanego w [8].

Odnosnie do własności elektromagnetycznych ośrodka założymy, że charakteryzuje się on doskonałą przewodnością, nie występują w nim ładunki swobodne oraz prądy



Rys. 1



Rys. 2.

przesunięcia są pomijalne. Jedną z konsekwencji przyjętego tu założenia o powolności ruchu jest to, że efekty oddziaływania mechano-elektromagnetycznego są małe. Dzięki temu można wektor całkowitej indukcji magnetycznej \vec{B} przedstawić w następującej postaci

$$(2.1) \quad \vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{b},$$

gdzie \vec{b} jest wektorem zaburzenia pola indukcji, spowodowanego przez proces falowy w przewodniku oraz

$$\frac{|\vec{b}|}{|\vec{B}_0|} \ll 1.$$

Związek między wektorem indukcji magnetycznej i wektorem natężenia pola magnetycznego \vec{H} przyjmujemy w postaci

$$(2.2) \quad \vec{B} = \mu \vec{H},$$

gdzie μ — współczynnik przenikalności magnetycznej ośrodka.

Z założenia (2.1) korzystamy przy linearyzacji równań (por. [8, 9]), które opisują badane zagadnienie.

2.2 Ogólny układ równań opisujących zjawisko oddziaływania pola elektromagnetycznego z przewodnikiem jest cytowany w licznych publikacjach (np. [8, 9]). Niżej ograniczymy się do podania równań, które uwzględniają tylko oddziaływanie o charakterze dynamicznym występujące w tym zjawisku. Równania te po dokonaniu uproszczeń wynikających z wyszczególnionych wyżej założeń sprowadzają się do następującej postaci ściśle odpowiadającej rozważanemu tu przypadkowi.

Pola w przewodniku spełniają zależności:

$$(2.3) \quad \vec{v}_{3,t} - \vec{A}_\alpha \vec{\sigma}_{33,3} = \vec{F}_3,$$

$$(2.4) \quad \vec{E}_\alpha \vec{v}_{3,3} - \sigma_{33,t} = 0,$$

gdzie

$\bar{v}_3, \bar{\sigma}_{33}$ — składowe wektora prędkości i tensora naprężenia — przecinek użyty w indeksie danej wielkości oznacza jej pochodną czastkową względem zmiennej stojącej po przecinku,

$$\bar{A}_\alpha = \begin{cases} (\bar{E}_s + \bar{\rho} \bar{a}_\lambda^2) / \bar{\rho} \bar{E}_s, & \alpha = s \text{ — zakres odkształceń sprężystych i odciążenia,} \\ (\bar{E}_p + \bar{\rho} \bar{a}_\lambda^2) / \bar{\rho} \bar{E}_p, & \alpha = p \text{ — zakres obciążenia plastycznego,} \end{cases}$$

$$\bar{E}_\alpha = \begin{cases} \frac{1}{3} (4\bar{G} + 3\bar{K}), & \alpha = s, \\ \frac{1}{3} (4\bar{G}_p + 3\bar{K}), & \alpha = p, \end{cases}$$

$$\bar{K} = \bar{\lambda} + \frac{2}{3} \bar{G},$$

$$\bar{a}_\lambda^2 = \frac{\mu \bar{H}_{01}^2}{4\pi \bar{\rho}}$$

\bar{H}_{01} — składowa wektora natężenia pierwotnego pola magnetycznego w przewodniku, w kierunku osi \bar{x}_1 ,

$\bar{G}, \bar{\lambda}$ — stałe Lamé, \bar{G} — moduł wzmocnienia, $\bar{\rho}$ — gęstość początkowa ośrodka,

$$\bar{F}_3 = \begin{cases} \bar{f}_3(\bar{w}t - \bar{x}_3) \text{ — zakres odkształceń sprężystych i plastycznych,} \\ \frac{4}{3} \frac{\bar{a}_\lambda^2 (\bar{G} - \bar{G}_p)}{\bar{E}_s \bar{E}_p} \frac{d\bar{\sigma}_{33}^p}{d\bar{x}_3} + \bar{f}_3(\bar{w}t - \bar{x}_3) \text{ — zakres odciążenia,} \end{cases}$$

$\bar{\sigma}_{33}^p$ — składowa tensora naprężenia na froncie fali odciążenia.

Wektor natężenia pola magnetycznego można przedstawić w postaci analogicznej do (2.1)

$$(2.5) \quad \bar{H} = \bar{H}_0 + \bar{h},$$

gdzie

$\bar{H}_0 = (\bar{H}_{01}, 0, 0)$, $\bar{h} = (h_1, h_2, h_3)$ — wektor zaburzenia pola magnetycznego.

Wynikają stąd następujące równania pola elektromagnetycznego w przewodniku

$$(2.6) \quad \begin{aligned} \bar{h}_1 &= -\bar{H}_{01} \varepsilon_{33}, \\ \bar{h}_2 &= \bar{h}_3 = 0, \\ \bar{E}_1 &= \bar{E}_3 = 0, \end{aligned}$$

$$(2.7) \quad \bar{E}_2 = -\frac{\mu}{c} \bar{v}_3 \bar{H}_{01},$$

gdzie ε_{33} — składowa tensora odkształcenia,

$\bar{E} = (\bar{E}_1, \bar{E}_2, \bar{E}_3)$ — wektor natężenia pola elektrycznego w przewodniku,

\bar{c} — prędkość światła w próżni,

\bar{v}_3 — składowa wektora prędkości przemieszczenia ośrodka w kierunku osi \bar{x}_3 .

Pole elektromagnetyczne w próżni opisane jest przez równania

$$(2.8) \quad \bar{h}_{1,33}^* - \frac{1}{c^2} \bar{h}_{1,tt}^* = 0, \quad \bar{h}_2^* = \bar{h}_3^* = 0,$$

$$(2.9) \quad \bar{E}_1^* = \bar{E}_3^* = 0, \quad \bar{E}_{2,33}^* - \frac{1}{c^2} \bar{E}_{2,tt}^* = 0,$$

gdzie

$\bar{h}_1^*, \bar{h}_2^*, \bar{h}_3^*$ — składowe wektora zaburzenia pola magnetycznego
 $\bar{E}_1^*, \bar{E}_2^*, \bar{E}_3^*$ — składowe wektora natężenia pola elektrycznego.

Warunki brzegowe dla $\bar{x}_3 = 0$:

$$(2.10) \quad \bar{h}_1 = \bar{h}_1^* = -\bar{H}_{01} \varepsilon_{33},$$

$$(2.11) \quad \bar{E}_2 = \bar{E}_2^* = -\frac{\mu}{c} \bar{H}_{01} \bar{v}_3,$$

$$(2.12) \quad \bar{\sigma}_{33} = 0.$$

Przedstawione równania wraz z warunkami brzegowymi i początkowymi opisują szczególny przypadek propagacji płaskich fal naprężenia (por. [8]). Przy konstrukcji rozwiązania tego układu równań korzystano z metody charakterystyk.

W obliczeniach przyjęto trójkątny rozkład intensywności siły masowej, który na rys. 2 zaznaczono linią przerywaną. Intensywność można wyrazić analitycznie w następujący sposób

$$(2.13) \quad \bar{f}_3(\bar{w}t - \bar{x}_3) = \begin{cases} \frac{\bar{P}_0}{\bar{L}_1} (\bar{w}t - \bar{x}_3) & \text{— dla } \bar{w}t - \bar{L}_1 < \bar{x}_3 \leq \bar{w}t, \\ \frac{\bar{P}_0}{\bar{L}_2} [\bar{L} - (\bar{w}t - \bar{x}_3)] & \text{— dla } \bar{w}t - \bar{L} \leq \bar{x}_3 \leq \bar{w}t - \bar{L}_1. \end{cases}$$

Wprowadźmy dodatkowe oznaczenie, przydatne przy tworzeniu wielkości bezwymiarowych

$$(2.14) \quad \bar{a}_E^2 = \bar{c}_1^2 + \bar{a}_A^2,$$

gdzie

$$\bar{c}_1^2 = \frac{4\bar{G} + 3\bar{K}}{3\bar{Q}} \quad \text{— prędkość podłużnych fal sprężystych.}$$

2.3 Otrzymane rozwiązania przedstawiono za pomocą układu następujących wielkości bezwymiarowych

$$(2.15) \quad \begin{aligned} v &= \frac{\bar{v}_3}{\bar{a}_E}, & \sigma &= \frac{\bar{\sigma}_{33}}{\bar{\sigma}_0}, & x &= \frac{\bar{x}_3}{\bar{L}}, \\ t &= \frac{\bar{t} \bar{a}_E}{\bar{L}}, & L_1 &= \frac{\bar{L}_1}{\bar{L}}, & L_2 &= \frac{\bar{L}_2}{\bar{L}}, & w &= \frac{\bar{w}}{\bar{a}_E}, \\ P_0 &= \frac{\bar{p}_0 \bar{L}}{\bar{a}_E^2}, & a_p &= \frac{\bar{a}_p}{\bar{a}_E}, & a_A &= \frac{\bar{a}_A}{\bar{a}_E}, & H_{01}^2 &= \frac{\bar{H}_{01}^2}{\bar{\sigma}_0} \end{aligned}$$

$$(2.15) \quad G = \frac{\bar{G}}{\bar{\sigma}_0}, \quad G_p = \frac{\bar{G}_p}{\bar{\sigma}_0}, \quad E_s = \frac{\bar{E}_s}{\bar{\sigma}_0}, \quad E_p = \frac{\bar{E}_p}{\bar{\sigma}_0},$$

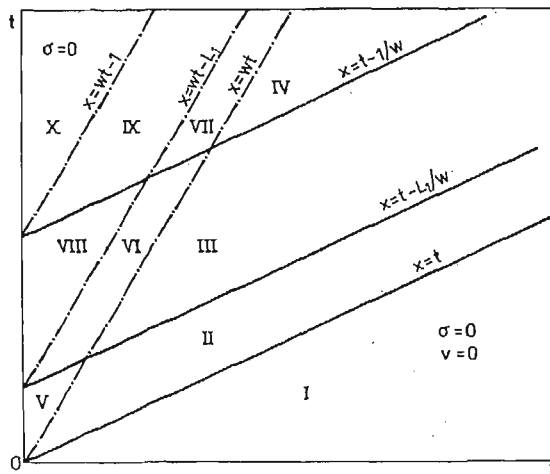
$$A_s = A_s \sigma_0 a_3^{-2}, \quad A_p = A_p \sigma_0 a_E^{-2},$$

gdzie

$\bar{\sigma}_0$ — wartość granicy plastyczności w próbie rozciągania.

3. Rozwiązanie zagadnienia w przypadku sprężystych odkształceń

Na pełne rozwiązanie przedstawionego wyżej problemu składają się dwa elementy (por. [9]): rozwiązanie statyczne zagadnienia magnetosprężystości, wynikającego z istnienia pierwotnego pola indukcji magnetycznej w przewodniku oraz rozwiązanie zagadnienia propagacji fal naprężenia wywołanych przez ruchome obciążenie masowe w sprężysto-plastycznym ośrodku przewodzącym, umieszczonym w polu magnetycznym. W dalszej



Rys. 3

części pracy ograniczymy się do podania rozwiązania zagadnienia dynamicznego, uwzględniając rozwiązanie problemu statycznego jedynie w przypadku formułowania warunku uplastycznienia materiału przewodnika. Z tego względu również rozwiązania przypadku sprężystego zamieszczone w tym paragrafie reprezentują tylko część dynamiczną zagadnienia. Celem ich przedstawienia będziemy posługiwać się schematem podanym na rys. 3, gdzie obszary, w których obowiązuje inna postać rozwiązania oznaczono różnymi cyframi rzymskimi.

Obszar I

$$(3.1) \quad \sigma_1 = 0, \quad v_1 = 0.$$

obszar niezaburzony.

Obszar II

$$(3.2) \quad \sigma_{II} = -\frac{1}{2}\Omega_1 \cdot (x-t)^2, \quad v_{II} = -A_s\sigma_{II},$$

$$\Omega_1 = \frac{P_0}{A_s L_1} \frac{w^2}{1-w^2};$$

intensywność naprężenia jest funkcją rosnącą czasu.

Obszar III

$$(3.3) \quad \sigma_{III} = \frac{1}{2}\Omega_3 \{ [w(x-t) + 1]^2 - L_2 \}, \quad v_{III} = -A_s\sigma_{III},$$

$$\Omega_3 = \frac{P_0}{A_s L_1} \frac{1}{1-w^2};$$

intensywność naprężenia jest funkcją rosnącą czasu.

Obszar IV

$$(3.4) \quad \sigma_{IV} = -\frac{P_0}{2A_s(1-w^2)}, \quad v_{IV} = -A_s\sigma_{IV}.$$

Obszar stałych wartości naprężenia i prędkości przemieszczeń.

Obszar V

$$(3.5) \quad \sigma_V = \frac{1}{2}\Omega_2 [(x-wt) + w(x-t)]x,$$

$$v_V = -\frac{1}{2}A_s\Omega_2 w(x^2-t^2), \quad \Omega_2 = \frac{P_0}{A_s L_1} \frac{1}{1+w};$$

intensywność naprężenia jest funkcją rosnącą czasu.

Obszar VI

$$(3.6) \quad \sigma_{VI} = \frac{1}{2}\Omega_4 \left\{ L_1 w^2 \left(x-t + \frac{1}{w} \right)^2 + L_2 [(x-wt)^2 - L_1] \right\},$$

$$v_{VI} = -A_s\sigma_{VI}, \quad \Omega_4 = \frac{P_0}{A_s L_1 L_2} \frac{1}{1-w^2}.$$

Intensywność naprężenia jest rosnącą funkcją czasu w części obszaru leżącej poniżej prostej o równaniu

$$(3.7) \quad x = mt - b,$$

gdzie

$$m = \frac{w}{wL_1 + L_2}, \quad b = \frac{L_1}{wL_1 + L_2}.$$

W części obszaru położonej powyżej prostej (3.7) (rys. 4) intensywność naprężenia jest malejącą funkcją czasu.

Obszar VII

$$(3.8) \quad \sigma_{VII} = \frac{\Omega_1}{2w^2} [(x-wt)^2 - L_1],$$

$$v_{VII} = -\frac{\Omega_1 A_s}{2w^2} [w(x-wt) - L_1];$$

intensywność naprężenia jest malejącą funkcją czasu.

Obszar VIII

$$(3.9) \quad \begin{aligned} \sigma_{\text{VIII}} &= -\frac{P_0 x}{2A_s L_2 (1+w)} \left[x - wt + 1 + w \left(x - t + \frac{1}{w} \right) \right], \\ v_{\text{VIII}} &= \frac{P_0}{2L_2 (1+w)} \left[(x - wt + 1)wt + \left(x - t + \frac{1}{w} \right) wx - (x - wt + L_1) \right]; \end{aligned}$$

intensywność naprężenia jest malejącą funkcją czasu.

Obszar IX

$$(3.10) \quad \begin{aligned} \sigma_{\text{IX}} &= -\frac{1}{2} \Omega_3 (x - wt + 1)^2, \\ v_{\text{IX}} &= \frac{1}{2} A_s \Omega_3 [w(x - wt + 1)^2 + (1 - w)L_2]; \end{aligned}$$

intensywność naprężenia jest malejącą funkcją czasu.

Obszar X

$$(3.11) \quad \sigma_x = 0, \quad v_x = \frac{P_0}{2(1+w)}.$$

Podane dotychczas rozwiązania stanowią podstawę dalszych badań mających na celu określenie warunków powstawania odkształceń plastycznych, wyznaczenie granic obszaru odkształceń plastycznych i rozwiązań wewnątrz tego obszaru.

4. Analiza rozwiązania w przypadku występowania odkształceń plastycznych

4.1 Jeżeli wielkości charakteryzujące rozpatrywany proces spełniają warunek

$$(4.1) \quad H_{01}^2 < 8\pi(1-\nu)[(1-2\nu+\mu\nu)^2 + 3\mu^2(1-\nu^2)]^{-\frac{1}{2}},$$

to uplastycznienie materiału przewodnika może nastąpić tylko w skutek działania obciążenia masowego. Dalej będziemy zajmować się wyłącznie takim przypadkiem.

* Warunkiem pojawienia się odkształceń plastycznych w tym przypadku jest spełnienie nierówności:

$$\frac{P_0}{1-w^2} \geq \frac{A_s \Theta}{1-2\nu}. \quad (4.2)$$

gdzie

$$\Theta = (1-\nu)(4-3\mu^2\kappa^2)^{\frac{1}{2}} - \kappa(1-2\nu+\mu\nu),$$

$$\kappa = \frac{H_{01}^2}{4\pi}.$$

4.2 Parametry określające obciążenie masowe wpływają na postać obszaru odkształceń plastycznych na płaszczyźnie fazowej x, t . Wpływ ten można najlepiej uwidocznić przez podanie warunków decydujących o występowaniu fal obciążenia plastycznego w poszczególnych obszarach płaszczyzny fazowej przedstawionych na rys. 3. W tym punkcie uwzględ-

nimy jedynie te zależności opisujące falę obciążenia plastycznego, do wyznaczenia których wystarcza znajomość rozwiązania przypadku odkształceń sprężystych.

Warunkiem postania fali obciążenia plastycznego w obszarze II jest spełnienie nierówności

$$(4.3) \quad \frac{P_0 L_1}{1-w^2} > \frac{A_s \Theta}{1-2\nu}.$$

Falę tą reprezentuje prosta opisana równaniem

$$(4.4) \quad x = t - \vartheta_1^{\frac{1}{2}},$$

gdzie

$$\vartheta_1 = \frac{\Theta}{(1-2\nu)\Omega_1}.$$

Przedłużeniem fali (4.4) w obszarze V jest łuk krzywej o równaniu

$$(4.5) \quad t = \frac{1+w}{2w} x + \frac{\vartheta_2}{2wx},$$

gdzie

$$\vartheta_2 = \frac{\Theta}{(1-2\nu)\Omega_2}.$$

Współrzędne punktu początkowego fali (4.5) są następujące:

$$(4.6) \quad x_0 = \left(\frac{\vartheta_2}{1+3w} \right)^{1/2}, \quad t_0 = \frac{1+2w}{w} \left(\frac{\vartheta_2}{1+3w} \right)^{1/2}.$$

Powstanie fali obciążenia plastycznego w obszarze III jest uwarunkowane przez spełnienie następującej nierówności:

$$(4.7) \quad \frac{A_s \Theta}{1-2\nu} < \frac{P_0}{1-w^2} \quad \text{i} \quad \frac{P_0 L_1}{1-w^2} \leq \frac{A_s \Theta}{1-2\nu}.$$

Prosta reprezentująca tą falę opisana jest przez równanie

$$(4.8) \quad x = t + \frac{1}{w} [(L_2 - \vartheta_3)^{1/2} - 1],$$

gdzie

$$\vartheta_3 = \frac{\Theta}{(1-2\nu)\Omega_3}.$$

Przedłużeniem fali (4.8) w obszarze VI jest łuk krzywej opisanej przez równanie

$$(4.9) \quad L_1 w^2 \left(x - t + \frac{1}{w} \right)^2 + L_2 [(x - wt)^2 - L_1] + \vartheta_4 = 0,$$

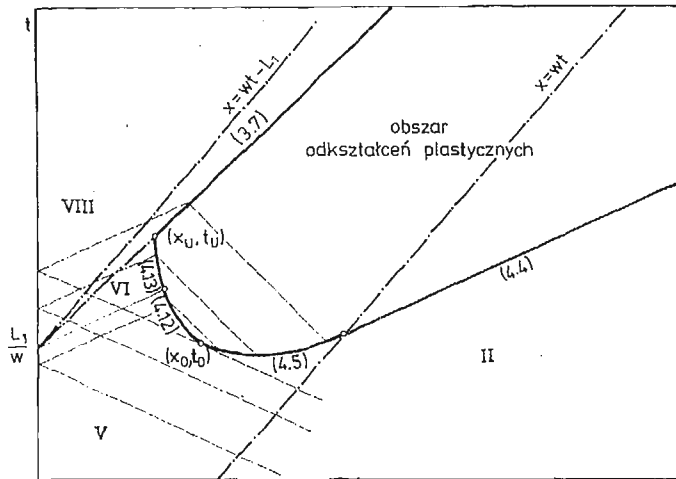
gdzie

$$\vartheta_4 = \frac{\Theta}{(1-2\nu)\Omega_4}.$$

Punkt początkowy fali (4.9) wyznacza się obliczając współrzędne punktu przecięcia krzywej (4.9) z prostą opisaną przez równanie

$$(4.10) \quad x = \frac{(w + wL_1 + L_2)w}{2w^2L_1 + L_2(1+w)} t - \frac{2wL_1}{2w^2L_1 + L_2(1+w)}.$$

4.3 Konstrukcję dalszego przebiegu fali obciążenia plastycznego przedstawimy opierając się na przypadku, w którym spełniona jest nierówność (4.3). Z przypadku tego wynikają pozostałe konfiguracje obszaru odkształceń plastycznych, z jakimi możemy mieć do czynienia w badanym zagadnieniu.



Rys. 4

Krzywoliniowy odcinek fali obciążenia plastycznego, zawarty między punktem początkowym (x_U, t_U) fali odciążenia i punktem o współrzędnych (4.6), wyznaczamy na podstawie związków wzdłuż ujemnych charakterystyk dla obszaru odkształceń plastycznych oraz dodatnich charakterystyk sprężystych (patrz rys. 4). Poszukiwany odcinek fali jest podzielony na dwie części przez charakterystykę o równaniu

$$(4.11) \quad x = t - \frac{L_1}{w}.$$

Każda z tych części jest opisana za pomocą innej zależności. Łuk położony w obszarze V (patrz rys. 4) jest reprezentowany przez równanie

$$(4.12) \quad R_1 x^2 - 2R_2 xt + 2R_3 t^2 + 2R_4(x + a_p t)[w^2(x + a_p t)^2 - U_1 \vartheta_2]^5 + R_5 = 0,$$

gdzie

$$R_1 = (U_1 a_p^{-1})^2 [a_p(1+w) - w(1-a_p)] + 2w^3(1-a_p),$$

$$R_2 = a_p w [(U_1 a_p^{-1})^2 - 2w^2(1-a_p)],$$

$$R_3 = a_p^2 w^3(1-a_p),$$

$$R_4 = w^2(1-a_p),$$

$$R_5 = U_1 [w(1+a_p) + a_p(1+w)] \vartheta_2,$$

$$U_1 = a_p [a_p(1+w) + 2w].$$

odciążenia. Oznaczmy przez t_{p1} , t_{p2} i t_{p3} punkty położone na linii reprezentującej falę obciążenia, w których biorą początek dodatnie charakterystyki dla obszaru odkształceń plastycznych. Odpowiednio w punktach t_{N1} , t_{N2} , t_{N3} mają początek charakterystyki ujemne. Poszukujemy rozwiązań w punktach (x, t) leżących wewnątrz obszaru odkształceń plastycznych powstałych przez przecięcie wymienionych charakterystyk. Korzystamy w tym celu ze znanych wielkości naprężenia i prędkości przemieszczeń na fali obciążenia plastycznego oraz scałkowanych związków wzdłuż charakterystyk dla obszaru odkształceń plastycznych.

W części obszaru odkształceń plastycznych ograniczonej przez falę obciążenia plastycznego (4.4) i charakterystykę dodatnią opisaną równaniem

$$(4.15) \quad x = a_p t - \frac{a_p - w}{1 - w} \vartheta_1^{1/2}$$

wartości składowych naprężenia i prędkości przemieszczeń są stałe i równe tym, jakie występują na fali (4.4).

Rozwiązanie w punkcie (x, t) przecięcia charakterystyk zaczynających się w t_{p1} i t_{N1} , położonym w obszarze przyległym do krzywej (4.5), ma następującą postać

$$(4.16) \quad \sigma(x, t) = -\frac{a_p}{2A_p} \left[v_V(t_{p1}) - \frac{A_p}{a_p} \sigma_V(t_{p1}) \right] + \frac{a_p}{2A_p} \left[v_V(t_{N1}) + \frac{A_p}{a_p} \sigma_V(t_{N1}) \right] - \\ - \frac{P_0 a_p}{4A_p L_1} [2a_p t^2 + (a_p - w)t_{p1}^2 + (a_p + w)t_{N1}^2 + 2(C_p t_{p1} - C_N t_{N1})],$$

$$(4.17) \quad v(x, t) = \frac{1}{2} \left[v_V(t_{p1}) - \frac{A_p}{a_p} \sigma_V(t_{p1}) \right] + \frac{1}{2} \left[v_V(t_{N1}) + \frac{A_p}{a_p} \sigma_V(t_{N1}) \right] + \\ + \frac{P_0}{4L_1} [2wt^2 - 4xt + (a_p - w)t_{p1}^2 - (a_p + w)t_{N1}^2 + 2(C_p t_{p1} + C_N t_{N1})]$$

gdzie

$$v_V(t_{p1}) - \frac{A_p}{a_p} \sigma_V(t_{p1}) = -\frac{P_0}{2A_s L_1 a_p (1+w)} \{c_p^2 [(1+w)A_p + a_p w A_s] + \\ + 2C_p t_{p1} [(a_p + a_p w - w)A_p + a_p^2 w A_s] + t_{p1}^2 a_p [(a_p + a_p w - 2w)A_p + w(a_p^2 - w)A_s]\},$$

$$v_V(t_{N1}) + \frac{A_p}{a_p} \sigma_V(t_{N1}) = \frac{P_0}{2A_s L_1 a_p (1+w)} \{C_N^2 [(1+w)A_p - a_p w A_s] + \\ - 2C_N t_{N1} [(a_p + a_p w + w)A_p - a_p^2 w A_s] + t_{N1}^2 a_p [(a_p + a_p w + 2w)A_p - w(a_p^2 - w)A_s]\},$$

$$C_p = x - a_p t, \quad C_N = x + a_p t,$$

$$t_{p1} = U_2^{-1} \{ -C_p Q_2 - [(wC_p)^2 - U_2 \vartheta_2]^{1/2} \},$$

$$t_{N1} = U_1^{-1} \{ C_N Q_1 - [(wC_N)^2 - U_1 \vartheta_2]^{1/2} \},$$

$$Q_1 = a_p(1+w) + w,$$

$$U_2 = a_p[a_p(1+w) - 2w],$$

$$Q_2 = a_p(1+w) - w.$$

Podobnie rozwiązanie w punkcie (x, t) powstałym z przecięcia charakterystyk zaczynających się w t_{p1} i t_{N2} przyjmuje postać

$$(4.18) \quad \sigma(x, t) = -\frac{a_p}{2A_p} \left[v_V(t_{p1}) - \frac{A_p}{a_p} \sigma_V(t_{p1}) \right] + \frac{a_p}{2A_p} \left[v_{II}(t_{N2}) + \frac{A_p}{a_p} \sigma_{II}(t_{N2}) \right] - \\ - \frac{P_0 a_p}{2A_p L_1} \left[2a_p t^2 + (a_p - w)t_{p1}^2 + 2C_p t_{p1} - \frac{C_N^2}{a_p + w} \right],$$

$$(4.19) \quad v(x, t) = \frac{1}{2} \left[v_V(t_{p1}) - \frac{A_p}{a_p} \sigma_V(t_{p1}) \right] + \frac{1}{2} \left[v_{II}(t_{N2}) + \frac{A_p}{a_p} \sigma_{II}(t_{N2}) \right] + \\ + \frac{P_0}{4L_1} \left[[2wt^2 - 4xt + (a_p - w)t_{p1}^2 + 2C_p t_{p1} + \frac{C_N^2}{a_p + w}] \right],$$

gdzie

$$v_{II}(t_{N2}) + \frac{A_p}{a_p} \sigma_{II}(t_{N2}) = \frac{a_p A_s - A_p}{2a_p} \frac{\Theta}{1 - 2\nu}.$$

Rozwiązanie w punkcie (x, t) przecięcia charakterystyk zaczynających się w t_{p1} i t_{N3} ma następującą postać

$$(4.20) \quad \sigma(x, t) = -\frac{a_p}{2A_p} \left[v_V(t_{p1}) - \frac{A_p}{a_p} \sigma_V(t_{p1}) \right] + \frac{a_p}{2A_p} \left[v_{II}(t_{N3}) + \frac{A_p}{a_p} \sigma_{II}(t_{N3}) \right] - \\ - \frac{P_0 a_p}{4A_p L_1} \left[\frac{C_p^2}{a_p - w} + (a_p - w)t_{p1}^2 + 2C_p t_{p1}^2 \right].$$

$$(4.21) \quad v(x, t) = \frac{1}{2} \left[v_V(t_{p1}) - \frac{A_p}{a_p} \sigma_V(t_{p1}) \right] + \frac{1}{2} \left[v_{II}(t_{N3}) + \frac{A_p}{a_p} \sigma_{II}(t_{N3}) \right] + \\ + \frac{P_0}{4L_1} \left[\frac{C_p^2}{a_p - w} + (a_p - w)t_{p1}^2 + 2C_p t_{p1} \right],$$

gdzie

$$v_{II}(t_{N3}) + \frac{A_p}{a_p} \sigma_{II}(t_{N3}) = \frac{a_p A_s - A_p}{2a_p} \frac{\Theta}{1 - 2\nu}.$$

Rozwiązania w pozostałych częściach obszaru odkształceń plastycznych mają zbliżony charakter do tych, które przedstawiono wyżej.

4.5 W punktach 4.2 i 4.3 podano zależności opisujące falę obciążenia plastycznego. Łączy się ona z falą odciążenia w punkcie (x_U, t_U) przecięcia krzywej (4.13) i prostej (3.7). Na podstawie rozważań opisanych w [10] można wykazać, że początkowy odcinek fali odciążenia leży na prostej (3.7) (przy założeniu $a_p > m$). Wyznaczając zależności określające stan naprężenia i prędkości przemieszczeń w punktach należących do tej prostej korzystamy ze związków wzdłuż dodatnich charakterystyk dla obszaru odciążenia i ujemnych charakterystyk dla obszaru odkształceń plastycznych (patrz rys. 4). Otrzymane tą drogą wyrażenia dla wymienionych wielkości przyjmują postać

$$(4.22) \quad \sigma^u(x) = -\frac{2a_A^2(G-G_p)\Theta}{(1-2\nu)A} + \left[v_V(t_{N1}) + \frac{A_p}{a_p} \sigma_V(t_{N1}) \right] \frac{3E_s E_p}{A} - \\ - \frac{3P_0 E_s E_p}{2L_1 L_2 (1-w^2)A} \left\{ 2L_1 L_2 - (1+w)L_2(x-wt)^2 - 2L_1 [w(x-t)+1]^2 - \right. \\ \left. - (1-w^2)L_2 [(a_p+w)(t^2-t_{N1}^2) - 2C_N(t-t_{N1})] \right\},$$

$$(4.23) \quad v_3^u(x) = \frac{2a_A^2 A_p (G-G_p)\Theta}{(1-2\nu)a_p A} + \\ + \frac{3E_p + 4a_A^2(G-G_p)}{A} \left\{ v_V(t_{N1}) + \frac{A_p}{a_p} \sigma_V(t_{N1}) + \frac{P_0}{2L_1} [(a_p+w)(t^2-t_{N1}^2) - 2C_N(t-t_{N1})] \right\} + \\ + \frac{3P_0 a_p E_s}{2L_1 L_2 (1-w^2)A} \left\{ 2L_1 L_2 - (1+w)L_2(x-wt)^2 - 2L_1 [w(x-t)+1]^2 \right\},$$

gdzie

$$t = \frac{x+b}{m},$$

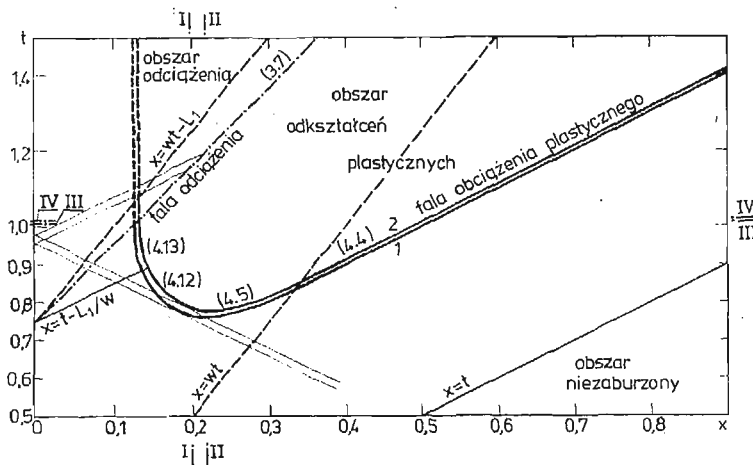
$$A = 3(a_p E_s + E_p) + 4a_A^2(G-G_p);$$

pozostałe oznaczenia jak we wzorach wyżej.

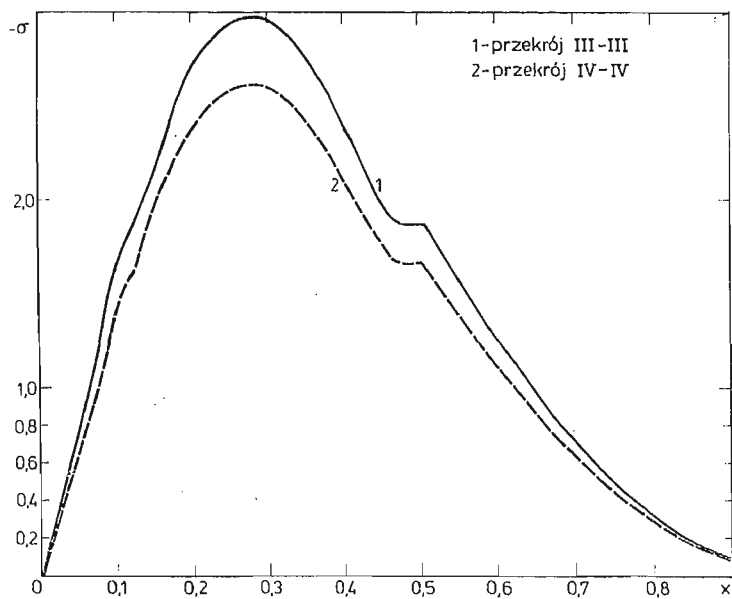
Korzystając ze znanych na podstawie (4.22) i (4.23) wartości naprężenia i prędkości przemieszczeń ośrodka wzdłuż początkowego odcinka (3.7) fali odciążenia jesteśmy w stanie wyznaczyć, w sposób wyżej opisany, zarówno rozwiązania w części obszaru odkształceń plastycznych, przyległej do tego odcinka, jak i dalszy przebieg fali odciążenia.

5. Wyniki rozwiązania przykładu liczbowego

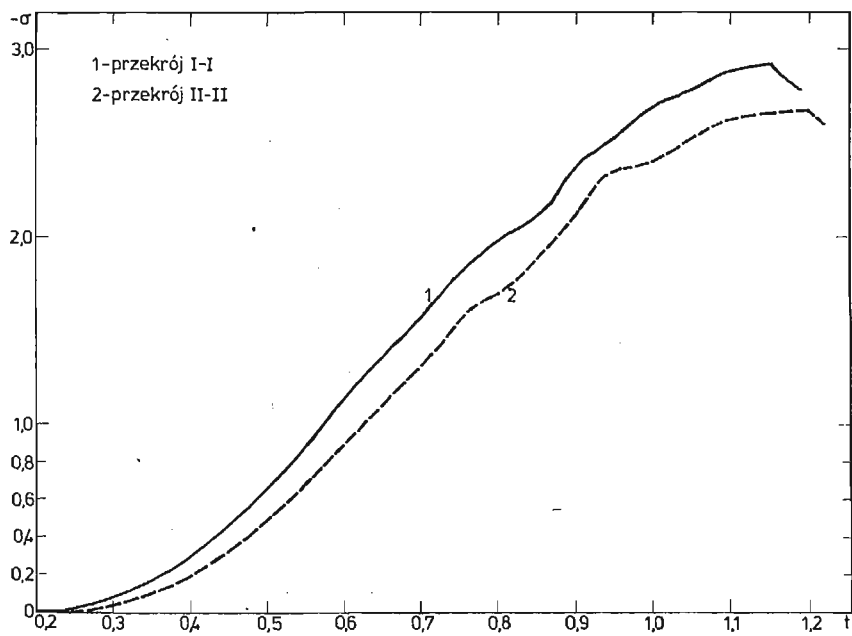
Podane niżej rezultaty obliczeń numerycznych służą do zilustrowania rozważań przedstawionych w poprzednich paragrafach. W rozwiązany przykładzie wykorzystano dane



Rys. 6



Rys. 7

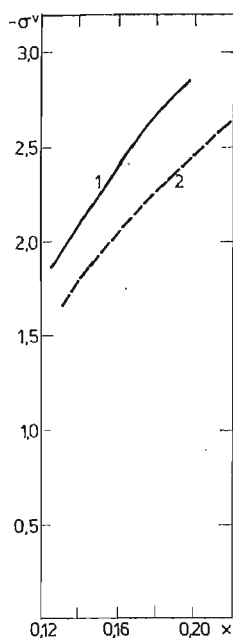


Rys. 8

materiałowe dla miedzi (Cu): $\bar{E}_y = 1,18 \cdot 10^{11} \text{ N m}^{-2}$ (moduł Younga), $\bar{\sigma}_0 = 2,45 \cdot 10^8 \text{ N m}^{-2}$, $\bar{G}_p = 9,81 \cdot 10^8 \text{ N m}^{-2}$, $\bar{\rho} = 8,93 \cdot 10^3 \text{ kg m}^{-3}$, $\nu = 0,33$ (współczynnik Poissona), $\mu = 1$.

Obliczenia wykonano dla dwóch wartości natężenia pierwotnego pola magnetycznego w przewodniku: $H_{01}^{(1)} = 1,11$, $H_{01}^{(2)} = 1,82$. W obu przypadkach przyjęto różne maksymalne wartości intensywności siły masowej, tj. odpowiednio $P_0^{(1)} = 3,3 \cdot 10^{-2}$, $P_0^{(2)} = 2,8 \cdot 10^{-2}$. Pozostałe parametry charakteryzujące wymuszenie są w obu przypadkach jednakowe i mają następujące wartości: $w = 0,4$, $L_1 = 0,3$, $L_2 = 0,7$.

Na rys. 6 przedstawiono granice obszarów odkształceń plastycznych, odpowiadające obu przypadkom oraz zaznaczono przekroje, w których obliczono przebieg naprężenia σ . Rysunek 7 pokazuje zmienność naprężenia w funkcji odległości x od powierzchni przewodnika, w wybranych chwilach czasu. Na rys. 8 zilustrowano przebieg zmian naprężenia w czasie dla ustalonych wartości x . Rysunek 9 przedstawia zmienność naprężenia wzdłuż początkowego odcinka (3.7) fali odciążenia. Cyfry 1 i 2 używane do oznaczenia linii na wykresach przyporządkowują te linie odpowiednim wartościom natężenia pierwotnego pola magnetycznego.



Rys. 9

6. Uwagi końcowe

Przedstawione w pracy rozważania należy traktować jako wstępny etap w badaniu efektów towarzyszących wnikananiu pola magnetycznego do wnętrza sprężysto-plastycznego przewodnika. Przyjęty sposób modelowania działania pola magnetycznego przez ruchome obciążenie masowe jest daleko idącym uproszczeniem i nie uwzględnia w szczególności oddziaływań natury elektromagnetycznej, jakie mają miejsce w rzeczywistym przypadku.

Dalsze zatem rozwinięcie tych badań będzie zmierzać do uwzględnienia wnikającego pola magnetycznego, jako czynnika wywołującego propagację fal naprężenia w przewodniku. W tym przypadku może być ono wyznaczone niezależnie, na podstawie rozwiązania odpowiedniego problemu elektrodynamiki a następnie traktowane jako wielkość dana w zagadnieniu magnetosprężystości i magnetoplastyczności.

Istotne ograniczenie stosowalności przedstawionych tu rozważań wynika z założenia o jednowymiarowości stanu odkształcenia, które należy pominąć w przyszłych badaniach. Powoduje ono, że rezultaty tej pracy są nieprzydatne w przypadku często przyjmowanego założenia o nieściśliwości materiału w stanie odkształceń plastycznych.

Przyjęty model, mimo wymienionych wad, pozwolił uzyskać rezultaty obserwowane w technologicznych procesach obróbki plastycznej za pomocą pola magnetycznego.

Pierwszym z efektów, który jest wyraźnie widoczny na podstawie rys. 6 i 7, jest występowanie warstwy ośrodka nieodkształconego plastycznie, przyległej do powierzchni, przez którą wnika pole magnetyczne (por. [5]).

Kolejnym efektem jest stwierdzenie rozprzestrzeniania się obszaru plastycznego w głąb przewodnika. Wyprzedza on strefę, w której występuje impulsowe pole magnetyczne. Potwierdza to sugestie szeregu autorów (patrz [5]), że uplastycznienie materiału elementów obrabianych, jakie obserwuje się po zaniknięciu impulsu pola magnetycznego jest rezultatem działania procesu dynamicznego.

Literatura cytowana w tekście

1. H. KOLM, A. FREEMAN, *Intense magnetic fields*, Scientific American, 212 (4), 66, 1965.
2. L. КНОПФ, *The interaction between elastic wave motion and a magnetic field in electrical conductors*—J. Geophys. Res., 60, 1955, (441).
3. W. F. BROWN, *Magnetoelastic Interactions*, Springer Tracts in Natural Philosophy, Vol. 9, Springer, Verlag, Berlin—Heidelberg—New York, 1966.
4. H. PARKUS, *Magneto-thermoelasticity*, CISM, Courses and Lectures — No. 118, Springer-Verlag, Wien—New York, Udine 1972.
5. J. DOBROGOWSKI, Z. KOŁACZKOWSKI, F. ТУСНОВСКИ, *Tłoczenie metali impulsowym polem magnetycznym*, PWN, Warszawa—Poznań, 1979.
6. В. П. Демущкий, Р. В. Половин, *О магнитопластическом течении*, ПММ, т. 33, вып. 6, 1969.
7. R. W. WANIEK, *High-energy-rate forming*, z „New Trends in Materials Processing”, Detroit, 1974.
8. G. PARRA, *The propagation of magneto-thermo-elastic plane waves*, Proc. Camb. Phil. Soc., 58, 1962, (527 - 531).
9. С. А. Амбарцумян, Г. Е. Багдасарян, М. В. Белубекян, *Магнитоупругость тонких оболочек и пластин*, Изд. „Наука”, Глав. Ред. Физ.-Мат. Лит., Москва, 1977.
10. K. PODOLAK, *Propagation of plane stress waves, produced by a moving load in an elastic-plastic medium*, Proc. Vibr. Probl. 3, 8, 1967, (251 - 271).

Резюме

О РАСПРОСТРАНЕНИИ ВОЛН НАПРЯЖЕНИЯ В УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКОМ ПРОВОДНИКЕ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ПОДВИЖНОЙ МАССОВОЙ СИЛЫ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

В статье рассматривается вопрос распространения плоских волн напряжения в упруго — пластическом идеальном проводнике находящимся в начальном постоянном магнитном поле. Действие

мгновенного магнитного поля вызывающего волновое движение моделируется движущейся массовой силой. Производится анализ точного решения полученного методом характеристик. Показано, что в проводнике существует слой касающийся его поверхности, в котором нет пластической деформации, и что распространение пластической области опережает движение массовой силы. Таковы эффекты являются сходными к тем которые встречаются в процессе электромагнитного формообразования металлов.

S u m m a r y

ON PROPAGATION OF STRESS WAVES PRODUCED BY A MOVING BODY FORCE IN AN ELASTIC-PLASTIC CONDUCTOR SUBJECT TO A MAGNETIC FIELD

The propagation of plane stress waves in an elastic-plastic perfect conductor placed in a constant primary magnetic field is considered. The action of an instantaneous magnetic field, which generates the wave motion in the conductor, is modelled by means of a moving body force. An analysis of an exact form solution obtained by the method of characteristics is performed. It is shown that a boundary layer free of plastic deformations appears at the outer surface of the conductor and that the propagation of a plastic zone precedes the motion of a body force. These effects are similar to those observed in a process of electromagnetic forming of metals.

Praca została złożona w Redakcji dnia 5 sierpnia 1980 roku.
